

المحاضره السادسه / المتغيرات العشوائيه المنفصله

مثال / حدد هل الداله التاليه تمثل توزيع احتمالي ام لا :

$$P(x) = \binom{3}{x} \times \frac{1}{8}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

$$P(x_i) \geq 0 \quad \bullet$$

$$\sum p(x_i) = 1 \quad \bullet$$

$$P(0) = \binom{3}{0} \cdot \frac{1}{8} = 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$P(1) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{8} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(2) = \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{8} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(3) = \binom{3}{3} \cdot \frac{1}{8} = 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

∴ الداله تمثل توزيعا احتماليا

$$2. p(x) = \frac{x}{10}, \quad x = 1, 2, 3$$

$$P(1) = \frac{1}{10}$$

$$P(2) = \frac{2}{10} \quad \sum p(x_i) = 1$$

$$P(3) = \frac{3}{10} \quad \frac{6}{10} \neq 1$$

∴ لا يمثل الاقتران توزيعا احتماليا

x	0	1	2	
P(x _i)	0.6	0.5	-0.1	1

∴ لا يمثل توزيعا احتماليا

التوقع : يعرف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منفصل x هو $E(x) = \sum x_i p(x_i)$

مثال :- اوجد التوقع الرياضي لظهور الصوره عند رمي قطعه نقد 3 مرات

x	0	1	2	3
P(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

الحل :

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum x_i p(x_i) \\ &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} \\ &= 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} \\ &= \frac{12}{8} = 1,5 \end{aligned}$$

مثال :- اوجد التوقع الرياضي للتوزيع الاحتمالي .

$$P(x) = \frac{x}{10}, \quad x = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum p(xi) = 1 = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

x	1	2	3	4
P(x)	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

$$E(x) = \sum xi p(xi)$$

$$\begin{aligned} &= 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{4}{10} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{9}{10} + \frac{16}{10} \\ &= \frac{30}{10} = 3 \end{aligned}$$

إذا كان التوزيع الاحتمالي x

x	1	2	3
P(x)	0.1	0.6	0.3

اوجد $E(x)$, $E(5x)$, $E(5x+3)$, $E(x^2)$

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum xi p(xi) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.6 + 3 \times 0.3 \\ &= 0.1 + 1.2 + 0.9 = 2.2 \end{aligned}$$

$$E(5x) = 5E(x) = 5 \times 2.2 = 11$$

$$E(5x+3) = 5E(x) + 3 = 5 \times 2.2 + 3 = 14$$

$$E(x^2) = \sum x^2 p(xi)$$

$$\begin{aligned} &= 1 \times 0.1 + 4 \times 0.6 + 9 \times 0.3 \\ &= 5.2 \end{aligned}$$

خصائص التوقع الرياضي .

∴ إذا كان a, b اعداد ثابتة و x متغير عشوائي منفصل

$$E(b) = b$$

$$E(ax) = aE(x)$$

$$E(ax+b) = aE(x) + b$$

مثال:- اوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل Y إذا كان التوقع الرياضي

للمتغير العشوائي المنفصل x هو 3 و العلاقة بين المتغيريين هي

$$Y = 2x + 5, \quad E(x) = 3$$

$$E(y) = E(2x + 5)$$

$$= 2 \times 3 + 5 = 11$$

$$E(y) = 11$$

$$E(4) = 11$$

$$E(5x) = 5E(x) = 5 \times 3 = 15$$

مثال :- اوجد التوقع الرياضي لجدول التوزيع الاحتمالي التالي

X	3	4	5	6	7
P(x)	0.3	0.2	0.2	0.1	0.2

$$\begin{aligned}
E(x) &= \sum xi p(xi) \\
&= 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 + 5 \times 0.2 + 6 \times 0.1 + 7 \times 0.2 \\
&= 0.9 + 0.8 + 1 + 0.6 + 1.4 \\
&= 4.7
\end{aligned}$$

التباين

يعرف التباين لمتغير عشوائي x و وسطه الحسابي $E(x)=M$ هو

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x)} &= E(x - M)^2 \\
&= E(x)^2 - (E(x))^2
\end{aligned}$$

مثال :-

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

اوجد التباين .

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x)} &= E(x)^2 - (E(x))^2 \\
E(x)^2 &= \sum x^2 p(xi) \\
&= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{1}{8} \\
&= 0 + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = \frac{24}{8} = 3 \\
\sqrt{(x)} &= 3 - (1.5)^2 = 0.75
\end{aligned}$$

مثال:- اذا كان التوزيع الاحتمالي لقطع جهاز كمبيوتر المعيبه هو

x	0	1	2	3	4	5	
$P(x)$	0.02	0.02	0.3	0.3	0.1	0.08	=1

اوجد التوقع و الانحراف المعياري للقطع المعيبه في شحنه σ

$$\begin{aligned}
E(x) &= \sum xi p(xi) = \\
&= 0 \times 0.02 + 1 \times 0.02 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.08 \\
&= 2.5
\end{aligned}$$

التوقع

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x)} &= E(x)^2 - (E(x))^2 \\
E(x^2) &= \sum x^2 p(xi) \\
&= 0.02 \times 0 + 1 \times 0.02 + 4 \times 0.3 + 9 \times 0.3 + 16 \times 0.1 + 25 \\
&\quad \times 0.08 = 7.7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x)} &= E(x^2) - (E(x))^2 \\
&= 7.7 - (2.5)^2 = 1.45
\end{aligned}$$

$$\Sigma = \sqrt{\sqrt{X}} = \sqrt{1.45}$$

الانحراف المعياري

خصائص التباين

اذا كان a, b اعداد ثابتة و كان x يمثل متغير عشوائي فإن

$$\sqrt{(b)} = 0$$

$$\sqrt{(ax)} = a^2 \sqrt{(x)}$$

$$\sqrt{(ax + b)} = a^2 \sqrt{(x)}$$

مثال :- اوجد التباين للمتغير العشوائي y اذا كان تباين المتغير العشوائي x هو 0.5 و العلاقة $y=2x+3$

$$\begin{aligned}\sqrt{(y)} &= \sqrt{(2x + 3)} \\ &= 2\sqrt{(x)} = 4 \times 0.5 = 2 \\ \sqrt{(5)} &= 0 \\ \sqrt{(5x)} &= 25\sqrt{(x)} = 25 \times \frac{1}{2} = 12.5\end{aligned}$$

مثال : x متغير عشوائي وسطه 70 و انحرافه المعياري 3 اوجد

$$Y = -2x + 5, \quad z = \frac{x-70}{2}$$

$$E(y) = E(-2x + 5)$$

$$= -2E(x) + 5 = -2 \times 70 + 5$$

$$= -140 + 5$$

$$= -135$$

$$E(z) = E\left(\frac{1}{2}x - 35\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times E(x) - 35$$

$$= \frac{1}{2} (70) - 35 = 0$$

$$\sqrt{(y)} = \sqrt{(-2x + 5)}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{(x)}$$

$$= 4 \times 9 = 36$$

$$\sqrt{(z)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x - 35\right)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(x)}$$

$$= \frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4}$$

الانحراف المعياري يساوي جذر التباين

$$\Sigma = \sqrt{\sqrt{x}}$$

مثال :- بائع مظلات يربح 30 ريال يوميا اذا كان الجو ماطر و يخسر 6 ريالات اذا كان الجو صحو . ما هو توقع ربحه اذا علمت ان احتمال ان يكون الجو ماطر هو 0.3 .

X: هو عدد الريالات التي يربحها البائع

x	-6	30	
P(x)	0.7	0.3	1

$$E(x) = \sum xi p(xi)$$

$$= -6 \times 0.7 + 30 \times 0.3$$

$$= -4.2 + 9 = 4.8$$

$$E(x)^2 = \sum xi^2 p(xi) = 36 \times 0.7 + 900 \times 0.3$$

$$= 25.2 + 270$$

$$= 295.2$$

$$\sqrt{(x)} = E(x^2) - (E(x))^2 = 295.2 - (4.8)^2 =$$

مثال :- اذا كان x متغير عشوائي وسطه 50 و تباينه 10 و كان $y = 8x + 15$ اوجد التوقع $\sqrt{(x)}$,

$$E(y) = E(8x + 15) \bullet$$

$$= 8E(x) + 15$$

$$= 8 \times 50 + 15 = 400 + 15 = 415$$

*

$$\sqrt{(y)} = \sqrt{(8x + 15)}$$

$$= 8^2 \sqrt{(x)}$$

$$= 64 \times 10 = 640$$

*

$$E(5) = 5$$

*

$$\sqrt{(5)} = 0$$

#بعد المذاكرة:

اللهم إني أستودعك ما قرأت و ما حفظت و ما تعلمت،
فرده عند حاجتي إليه، إنك على كل شيء قدير، حسبنا الله و نعم الوكيل..

تلخيص / Mu*