المحاضره الثامنة

تابع المصفوفات (Matrices)

عمليات الصف البسيط :-

هي مجموعة من العمليات تقام على الصفوف وهذه العمليات تتكون من ثلاثة عمليات فقط هي:

1- ضرب صف بعدد ثابت.
2- ضرب صف بعدد ثابت وجمعه الى صف آخر.
3- تبديل صف مكان صف.

مثال:-
في المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نفذ العمليات التالية على المصفوفة على الترتيب.
1- أضرب الصف الثاني بالعدد 2.
2- اضرب الصف الاول بالعدد (-1) واجمعه الى الصف الثالث.
3- بدل الصف الثاني مع الصف الثالث.

الحل:-

$$1)\ 2r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2)\ -1r_1 + r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$3)\ r_2 \leftrightarrow r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -5 \\ 12 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

سوف نعتمد على عملية الصف البسيط في ايجاد معكوس المصفوفة وسوف **نرمز الى معكوس المصفوفة بالرمز A^{-1} .**

مثال 1:-
أوجد معكوس المصفوفة التالية باستخدام عمليات الصف البسيط

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:-
لإيجاد معكوس المصفوفة نستخدم العلاقة السابقة بحيث نضع المصفوفة ومعها المصفوفة المحايدة I_2 وباستخدام عمليات الصف البسيط تتحول A إلى I_2 و تتحول I_2 إلى A^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{3}r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -6r_1 + r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow -\frac{1}{3}r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \rightarrow -\frac{4}{3}r_2 + r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\therefore \ A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

للتحقق من الحل : $\mathbf{AA^{-1} = I}$

$$\mathrm{AA^{-1}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{9} + \frac{8}{3} & \frac{12}{9} - \frac{4}{3} \\ -\frac{30}{9} + \frac{10}{3} & \frac{24}{9} + \frac{-5}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{15}{9} + \frac{24}{9} & \frac{12}{9} - \frac{12}{9} \\ -\frac{30}{9} + \frac{30}{9} & \frac{24}{9} + \frac{-15}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط :-

اذا كان لدينا النظام التالي من المعادلات الخطية:

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2}$$

نعرف المصفوفات التالية:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \ , \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}$$

حيث تسمى A مصفوفة المعاملات X مصفوفة المتغيرات، B مصفوفة الثوابت، وبالتالي يمكن التعبير عن نظام المعادلات باستخدام المصفوفات كالآتي:

$$\boldsymbol{AX = B}$$

ولحل هذا النظام باستخدام عمليات الصف البسيط **نستخدم الخطوات التالية:**

1- نضع المصفوفة $[A|B]$.

2- نطبق عليها عمليات الصف البسيط.

3- ينتج $[I|C]$ حيث C تمثل مصفوفة الحل وتكون $X = C$.

مثال 1:-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط.

$$3x + 2y = 7$$
$$4x - y = 2$$

الحل:-

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

مصفوفة المتغيرات $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \frac{1}{3}r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 3 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\to -4r_1 + r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{22}{3} \end{array}\right] \to -\frac{3}{11}r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\to -\frac{2}{3}r_2 + r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1 \quad , y = 2$$

مثال 2:-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط.

$$5x + 2y = 23$$
$$6x + 10y = 58$$

الحل:-

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

مصفوفة المتغيرات $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 23 \\ 58 \end{bmatrix}$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 23 \\ 6 & 10 & 58 \end{array}\right] \to \frac{1}{5}r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 6 & 10 & 58 \end{array}\right]$$

$$\to -6r_1 + r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & \frac{38}{5} & \frac{152}{5} \end{array}\right] \to \frac{5}{38}r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\to -\frac{2}{5}r_2 + r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3 \quad , y = 4$$

التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

مثال 1:-

تنتج شركة النجاح نوعين من الدفاتر المدرسية النوع الأول (دفتر 60 ورقة) ويباع بسعر 2 ريال ويحتاج إلى 3 ساعات عمل في قسم القص و 2 ساعة عمل في قسم التجميع، والنوع الثاني (دفتر 120 ورقة) يباع بسعر 3 ريال ويحتاج إلى 2 ساعة عمل في قسم القص و 4 ساعات عمل في قسم التجميع، فإذا علمت أن الساعات المتاحة في قسم القص هي 35 ساعة، و 50 ساعة في قسم التجميع، المطلوب باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج والتي تحقق أعلى ربح ممكن

الحل:-

1- **جدول تمهيد الحل:**

المنتج / اقسام التشغيل	قسم القص	قسم التجميع	ثمن البيع
دفتر 60 ورقة (x)	3	2	2
دفتر 120 ورقة (y)	2	4	3
ساعات العمل المتاحة لكل قسم	35	50	-

2- صياغة المشكلة رياضياً:

أ- دالة الهدف (الربح / ثمن البيع): $p = 2x + 3y$

ب- القيود:

$$3x + 2y = 35$$
$$2x + 4y = 50$$

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

مصفوفة المتغيرات $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 35 \\ 50 \end{bmatrix}$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 35 \\ 2 & 4 & 50 \end{array}\right] \to \frac{1}{3}r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 2 & 4 & 50 \end{array}\right]$$

$$\to -2r_1 + r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{80}{3} \end{array}\right] \to \frac{3}{8}r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

$$\to -\frac{2}{3}r_2 + r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = 5 \ \ , y = 10$$

ربح النموذج:

$$\Longrightarrow p = 2x + 3y = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40\ SAR$$

مثال 2:-

تنتج شركة الفهد نوعين من المنتجات $(x\ ,\ \ y)$ وتستخدم نوعين من المواد الخام الخشب والحديد فإذا علمت أن النوع الأول من المنتجات يتطلب 8 م^2 من الخشب و 2 كغ من الحديد والنوع الثاني من المنتجات يتطلب 10 م^2 من الخشب و 4 كغ من الحديد، ويبلغ ربح الوحدة من النوع الأول 100 ريال والنوع الثاني 150 ريال، فإذا علمت أن كمية الخشب المتوافرة في المخزن هي 280 م^2 من الخشب و 100 كغ من الحديد.

المطلوب: باستخدام اسلوب المصفوفات، أوجد الكمية المثلى من الانتاج والتي تحقق أعلى ربح ممكن.

الحل:-

1- جدول تمهيد الحل:

المنتجات / المواد الخام	الخشب	الحديد	الربح
x	8	2	100
y	10	4	150
كمية المواد الخام المتاحة	280	100	-

2- صياغة المشكلة رياضياً:

أ- دالة الهدف (الربح / ثمن البيع): $p = 100x + 150y$

ب- القيود:

$$8x + 10y = 280$$
$$2x + 4y = 100$$

(مصفوفة المعاملات) $A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(مصفوفة المتغيرات) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(مصفوفة الثوابت) $B = \begin{bmatrix} 280 \\ 100 \end{bmatrix}$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 10 & 280 \\ 2 & 4 & 100 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{8}r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 2 & 4 & 100 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -2r_1 + r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & \frac{12}{8} & \frac{240}{8} \end{array}\right] \rightarrow \frac{8}{12}r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -\frac{10}{8}r_2 + r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = 10 \ \ , y = 20$$

ربح النموذج:

$$\Longrightarrow p = 100x + 150y = 100 \times 10 + 150 \times 20 = 4000\ SAR$$

مثال 3:-

تنتج شركة الأحلام للثلاجات نوعين من الثلاجات هما ثلاجة 10 قدم وثلاجة 12 قدم فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلاجات يمر بمرحلتين إنتاجيتين هما مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب. فإذا فرض أن الثلاجة 10 قدم تحتاج 4 ساعات عمل في مرحلة التصنيع وساعتين في مرحلة التشطيب، وأن الثلاجة 12 قدم تحتاج إلى 5 ساعات عمل في مرحلة التصنيع و 3 ساعات في مرحلة التشطيب. مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هي 2400 ساعة لمرحلة التصنيع، 1300 ساعة لمرحلة التشطيب فإذا كانت سياسة الإنتاج في المصنع هي استخدام كافة الطاقات المتاحة فالمطلوب تحديد عدد الوحدات المنتجة من كل نوع.

الحل:-

1- جدول تمهيد الحل:

النوع / مرحلة الانتاج	التصنيع	التشطيب
10قدم(x)	4	2
12قدم(y)	5	3
الساعات المتاحة	2400	1300

نفرض أن:

x = عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 10 قدم.

y = عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 12 قدم.

← ومن ثم يمكن صياغة المشكلة الرياضية السابقة كنظام للمعادلات كما يلي:

$$4x + 5y = 2400$$

$$2x + 3y = 1300$$

(مصفوفة المعاملات) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(مصفوفة المتغيرات) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(مصفوفة الثوابت) $B = \begin{bmatrix} 2400 \\ 1300 \end{bmatrix}$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 2400 \\ 2 & 3 & 1300 \end{array}\right] \to \frac{1}{4}r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 2 & 3 & 1300 \end{array}\right]$$

$$\to -2r_1 + r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 0 & \frac{1}{2} & 100 \end{array}\right] \to 2r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right]$$

$$\to -\frac{5}{4}r_2 + r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = 350 \quad , y = 200$$

لا قيمة للنجاح بدون الاجتهاد والمثابرة

المحاضره التاسعة

المحددات (DETERMINANTS)

محدد المصفوفة من الرتبة الثانية :-

مُحَدِّد المصفوفة هي **القيمة الرقمية للمصفوفة** ويرمز لها بأحد الرموز التالية:

$$Det\ A\ ,\ \Delta A\ ,\ |A|$$

1- محدد المصفوفة من الرتبة الثانية 2×2:

المصفوفة من الرتبة 2×2 تكون على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

وتكون محددتها هي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال:-

أوجد قيمة المحددات التالية:

$$1)\ \Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta A = 5 \times 4 - 2 \times 3 = 20 - 6 = 14$$

$$2)\ \Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta B = 1 \times 2 - 3 \times 5 = 2 - 15 = -13$$

$$3)\ \Delta C = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta C = 2 \times 9 - 3 \times 6 = 18 - 18 = 0$$

ملاحظة: اذا كانت $\Delta A = 0$ فإن A تسمى مصفوفة مفردة (Singular matrix).

2- محدد المصفوفة من الرتبة الثالثة:

المصفوفة من الرتبة الثالثة تكون على الصورة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ولإيجاد محدد المصفوفة A نستخدم واحدة من الطريقتين:

أ- طريقة الأسهم.

ب- طريقة المحددات الصغرى.

أ- طريقة الأسهم (سايروس):

في هذه الطريقة نكرر العمود الأول والثاني، ثم نجد حاصل ضرب الأقطار الرئيسية ونطرح منها حاصل ضرب الاقطار المرافقة كالاتي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} detA &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad -(a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

مثال 1:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta A &= (1 \times 4 \times 3 + 2 \times 6 \times (-1) + 3 \times 5 \times 7) \\ &\quad -(2 \times 5 \times 3 + 1 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times (-1)) \\ &= (12 - 12 + 105) - (30 + 42 - 12) \\ &= 105 - 60 \\ &= 45 \end{aligned}$$

مثال 2:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta A &= (3 \times 8 \times 4 + 1 \times 9 \times 6 + 2 \times 7 \times 2) - (1 \times 7 \times 4 + 3 \times 9 \times 2 + 2 \times 8 \times 6) \\ &= (96 + 54 + 28) - (28 + 54 + 96) \\ &= 178 - 178 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ A مصفوفة مفردة.

ب- طريقة المحددات الصغرى:

نجد المحدد بالنسبة لأي صف أو عمود فإذا كانت

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن محدد A بالنسبة للصف الأول هي:

$$\boldsymbol{\Delta A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

ثم نجد محددات المصفوفات الثنائية.

ونستطيع ايجاد المحدد بالنسبة لأي صف أو أي عمود وتكون اشارات المصفوفة كالآتي:

$$\boldsymbol{A=\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}}$$

مثال 1:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\boldsymbol{\Delta A = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= 3(10-21) - 0(-5-7) + 4(-3-2)}$$

$$\boldsymbol{= -53}$$

مثال 2:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\boldsymbol{\Delta A = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - (5)\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= 4(7-0) - 5(42-0) - 2(18-8)}$$

$$\boldsymbol{= -202}$$

خواص المحددات :-

1- اذا كانت عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة أصفار فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

مثال:-

أحسب قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:-

حيث أن الصف الثاني أصفار فإن $\boldsymbol{\Delta A = 0}$

2- اذا تساوت عناصر صفين أو عمودين في المصفوفة فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

مثال:-

احسب قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل:-

حيث أن عناصر العمود الأول و الثالث متساوية فإن $\Delta A = 0$

3- اذا ضرب أحد الصفوف أو أحد الأعمدة بعدد ثابت فإن قيمة المحدد تضرب في نفس العدد.

مثال:-

اذا كانت قيمة المحدد التالي تساوي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} , \quad \Delta A = 5$$

فأوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:-

نلاحظ أن المصفوفة B هي المصفوفة A مضروب الصف الثالث فيها بالعدد (3).

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \Delta A$$

$$\Longrightarrow \Delta B = 3\Delta A = (3)(5) = 15$$

4- اذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة مربعة وكان k أي عدد حقيقي فإن:

$$Det(kA) = k^n \, Det(A)$$

مثال:-

اذا كانت $\Delta(A_{2\times 2}) = 5$ فأوجد قيمة المحدد $\Delta(3A)$.

الحل:-

$$\Delta(3A) = 3^2(\Delta A) = (9)(5) = 45$$

5- اذا بدلنا صف مكان صف أو عمود مكان عمود في المحدد فإن قيمة المحدد تنعكس اشارتها.

مثال:-

اذا كانت

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta A = -2$$

فأوجد قيمة المحدد

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:-

المصفوفة B **هي ناتج تبديل الصف الأول بالصف الثاني في المصفوفة $\boldsymbol{A}$**

$$\Longrightarrow \ \boldsymbol{\Delta B = \ -(-2) = \ 2}$$

6- اذا كان أحد الصفوف مضاعف لصف آخر أو أحد الأعمدة مضاعف للآخر فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\boldsymbol{\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}}$$

الحل:-

لأن الصف الثالث من مضاعفات الصف الثاني فإن $\boldsymbol{\Delta A = 0}$

$$\boldsymbol{7 - \ \Delta(AB) = (\Delta A)\ (\Delta B)}$$

مثال:-

اذا كانت A ، B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت:

$\boldsymbol{(\Delta A) = 2}$, $\boldsymbol{(\Delta B) = 5}$, فأوجد $\boldsymbol{\Delta(AB)}$

الحل:-

$$\boldsymbol{\Delta(AB) = (\Delta A)\ (\Delta B) = (2) \times (5) = 10}$$

$$\boldsymbol{8 - \quad \Delta A \ = \Delta A^{T}}$$

مثال:-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$\boldsymbol{\Delta A = 10 \ - 6 = 4}$$

$$\boldsymbol{A^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \Delta A^T = 10 - 6 = 4}$$

$$\therefore \ \boldsymbol{\Delta A \ = \ \Delta A^T}$$

9- محدد المصفوفة القطرية = حاصل ضرب القطر

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\mathbf{\Delta A = (2)(1)(-3)(-4) = 24}$$

10- محدد المصفوفة المحايدة = 1

أي $\boldsymbol{det(I_n) = 1}$

مثال:-

أوجد قيمة محدد المصفوفة $\mathbf{I_5}$

الحل:-

$$\mathbf{\Delta\, I_5 = 1}$$

11- قيمة محدد المصفوفة المثلثية = حاصل ضرب القطر

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\mathbf{\Delta A = (2)(3)(4) = 24}$$

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\mathbf{\Delta A = (1)(1)(3) = 3}$$

النجاح رحلة وليس هدفاً.