المحاضره العاشرة

تابع / المحددات (DETERMINANTS)

استخدام المحددات في إيجاد معكوس المصفوفة :-

أ- اذا كانت A مصفوفة من الرتبة 2×2 أي:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فنجد معكوس المصفوفة بالخطوات التالية:

1- نجد قيمة محدد المصفوفة $det\ A$.

2- يكون معكوس المصفوفة A^{-1} هو:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

مثال 1:-

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$\Rightarrow \mathbf{det}(A) = 8 - 3 = 5$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

مثال 2:-

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}$$

الحل:-

$$\Rightarrow \mathbf{det}(A) = 12 - 12 = 0$$

∴ لا يوجد معكوس للمصفوفة A .

ملاحظة 1:

اذا كانت قيمة محدد المصفوفة = صفر فإن المصفوفة لا يوجد لها معكوس.

ملاحظة 2:

معكوس المصفوفة المحايدة هو نفس المصفوفة.

أي اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ب- اذا كانت A مصفوفة من الرتبة 3×3 بحيث $(detA \neq 0)$

أي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فنجد معكوس المصفوفة A باستخدام المحددات كالاتي:

1- نجد محدد المصفوفة: $.\det(A)$

2- نجد محدد المرافقات لكل عنصر من عناصر المصفوفة ونضعها في مصفوفة **ونرمز لها بالرمز A^{ι} .**

$$A^{\iota}=\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

حيث A_{11} هي محدد المرافقات للعنصر a_{11} و تكون:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3- نجد المصفوفة المرافقة (Adjoint Matrix): $\mathbf{adjA}=(\mathbf{A}^{\iota})^{T}$

$$adj\ A=\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

4- يكون معكوس المصفوفة هو:

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}\ adj\ A$$

مثال 1:-

أوجد معكوس المصفوفة A.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:-

نجد في البداية محدد A

$$\det A=5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}+6\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$=5(9+0)-2(12-0)+6(-8-3)$$
$$=5\times 9-2\times 12+6\times -11=-45$$

ثم نجد محددات المرافقات للعناصر:

المصفوفة الاصلية $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}=A^{\iota}=\begin{bmatrix} 9 & -18 & -18 \\ -12 & 9 & 24 \\ -11 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$adj\ A=\begin{bmatrix} 9 & -12 & -11 \\ -18 & 9 & 12 \\ -18 & 24 & 7 \end{bmatrix} \qquad \therefore A^{-1}=\frac{1}{-45}\begin{bmatrix} 9 & -12 & -11 \\ -18 & 9 & 12 \\ -18 & 24 & 7 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{9}{-45} & -\frac{12}{-45} & -\frac{11}{-45} \\ -\frac{18}{-45} & \frac{9}{-45} & \frac{12}{-45} \\ -\frac{18}{-45} & \frac{24}{-45} & \frac{7}{-45} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{11}{45} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{8}{15} & -\frac{7}{45} \end{bmatrix}$$

مثال 2:-

أوجد معكوس المصفوفة A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 \times -2 + 0 = 6$$

مصفوفة المرافقات $A^{t} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $adj\, A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} \\ \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

استخدام المحددات في حل أنظمة المعادلات الخطية :-

أ- حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة:

مثال 1:-

حل النظام التالي من المعدلات باستخدام معكوس المصفوفة، ثم تأكد من الحل:

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - y = 7$$

الحل:-

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

نجد أولاً معكوس A حيث

$$\det A = -2 - 9 = -11$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

ويكون حل النموذج هو:

$$X = A^{-1} B$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} + \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} - \frac{14}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{11} \\ -\frac{11}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 2 \;,\; y = -1$$

للتأكد نعوض عن قيم x و y في المعادلة الأولى:

$$2x + 3y = 1$$

$2(2) + 3(-1) = 1$ (الحل صحيح)

مثال 2:-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$3\,x_1 + 2\,x_2 = 5$$
$$x_1 - 4\,x_3 = -3$$

الحل:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

معكوس A:

$$\Longrightarrow det\ A = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times -8 - 3 \times -4 + 1 \times 2 = 6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$ المصفوفة الاصلية

مصفوفة المرافقات $A^{\iota} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$

مصفوفة المرافقات $A^{\iota} = \begin{bmatrix} -8 & 12 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad adj\ A = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{6} & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{12}{6} & -\frac{3}{6} & -\frac{3}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$= A^{-1} \,.\, B = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(-\frac{4}{3}\right) \times 1 + \frac{2}{3} \times 5 + (\frac{1}{3}) \times (-3) \\ 2 \times 1 + (-\frac{1}{2}) \times 5 + (-\frac{1}{2}) \times (-3\,) \\ (-\frac{1}{3}) \times 1 + \frac{1}{6} \times 5 + (-\frac{1}{6}) \times (-3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} + \frac{10}{3} - 1 \\ 2 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{3}{6} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ب- حل انظمة المعادلات الخطية باستخدام المحددات (طريقة كرامر):

مثال 1:-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات باستخدام المحددات:

$$x + y = 1$$
$$2x + 3y = 5$$

الحل:-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{2}{1} = -2 \ , \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3$$

ملاحظة: اذا كانت محدد المصفوفة Δ تساوي صفر فإن النظام لا يوجد له حل.

مثال 2:-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات:

$$2x + y + 3z = 3$$
$$x + 2y + 2z = 5$$
$$5x + 3y + 6z = 7$$

الحل:-

$$1)\ \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times (12 - 6) - 1 \times (6 - 9) + 5(2 - 6)$$
$$= 12 + 3 - 20$$
$$= -5$$

$$2)\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \times (12 - 6) - 5 \times (6 - 9) + 7(2 - 6)$$
$$= 18 + 15 - 28$$
$$= 5$$

$$3)\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times (30 - 14) - 1 \times (18 - 21) + 5(6 - 15)$$
$$= 32 + 3 - 45$$
$$= -10$$

$$4)\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (14 - 15) - 1 \times (7 - 9) + 5(5 - 6)$$

$$= -2 + 2 - 5$$

$$= -5$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$\Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$\Rightarrow z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$$

مثال 3:-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات:

$$x + 2y + 6z = 7$$
$$3x + y + 3z = 7$$
$$4y + 12z = 10$$

الحل:-

$$1)\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (12 - 12) - 3 \times (24 - 24) + 0(6 - 6)$$

$$= 0 + 0 + 0$$

$$= 0$$

$\Leftarrow$ بما أن $\Delta A = 0$ فإن النظام لا يوجد له حل.

كل إناء يضيق بما جعل فيه إلا وعاء العلم فإنه يتسع

المحاضره الحادي عشرة
التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير.
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج والطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة لسعر.

قواعد التفاضل :-

يطلق على عملية التفاضل في بعض الأحيان إيجاد المشتقة الأولى للدالة أو المعامل التفاضلي الأول.
ودائما تكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع وهو y والآخر متغير مستقل وهو x ويكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة.

المعطى: دالة أو معادلة $y = 5x + 9$

المطلوب: المشتقة الأولى للدالة $\frac{dy}{dx} = ???$

1- تفاضل المقدار الثابت:

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائما صفر فمثلا إذا كانت الدالة على شكل:

$$\boldsymbol{y = 15}$$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائما مهما تغير المتغير المستقل x وعلى ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يؤثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضيا كما يلي:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 0}$$

2- تفاضل المتغير x المرفوع إلى أس (x^n):

يتم تنزيل الاس والطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :

1- $y = x^5$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

2- $y = 15x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 60x^3$$

3- $y = 10x$

$$\frac{dy}{dx} = 10$$

3- تفاضل الدوال كثيرات الحدود:

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة.

مثال :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$

4- مشتقة حاصل ضارب دالتين:

مشتقة حاصل ضارب دالتين يساوي الدالة الأولى كما هي ضارب مشتقة الدالة الثانية زائد الدالة الثانية كما هي ضارب مشتقة الدالة الأولى.

مثال :-

1- $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x^2 - 7x)(3)$

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)$

5- مشتقة حاصل قسمة دالتين:

مشتقة حاصل قسمة دلتين يساوي المقام ضارب مشتقة البسط ناقص البسط ضارب مشتقة المقام على المقام تربيع.

$$\frac{\text{المقام} \times \text{البسط مشتقة} - \text{البسط} \times \text{المقام مشتقة}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$y = \frac{4x+2}{3x}$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 3x - 6}{9x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$

6- مشتقة القوس المرفوع لأس:

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله.

مثال :-

1- $y = (15x^2 + 20)^3$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 3\,(15x^2 + 20)^2(30x)$

2- $y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$

7- المشتقات العليا للدالة:

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$\mathbf{y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12}$

(المشتقة الاولى) $\rightarrow \frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5$

(المشتقة الثانية) $\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40$

(المشتقة الثالثة) $\rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72$

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1 – المرونة
2 – النهايات العظمى والصغرى
3 – الاستهلاك والادخار
4 – الربح الحدي

مرونة الطلب :-

أ- تعريف مرونة الطلب السعرية:

تعرف مرونة الطلب السعرية على أنها **مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في السعر.**

ب- تعريف مرونة الطلب الداخلية:

تعرف مرونة الطلب الداخلية على أنها **مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل.**

ج - قيس مرونة الطلب:

مرونة الطلب باستخدام التفاضل هي:

$$\text{م} = \text{المشتقة الأولى لدالة الطلبب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

ملاحظة:

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

د- حالات المرونة السعرية (م):

- القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة).
- **القيمة المطلقة للمرونة < واحد (طلب قليل المرونة أو غير مرن).**
- القيمة المطلقة للمرونة = واحد (طلب متكافئ المرونة).
- **القيمة المطلقة للمرونة > واحد (طلب مرن).**
- القيمة المطلقة للمرونة = ما لا نهاية (طلب لا نهائي المرونة).

مثال 1:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 80 - 6x$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 100 وحدة عند سعر يساوي 10 ريال.

الحل:-

- أولا نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب: $D' = -6$
- ثانيا التعويض في القانون: **م = المشتقة الاولى لدالة الطلب ×** $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = (6-) × $\frac{10}{100}$ **= 0.6-**

حيث أن القيمة المطلقة (أي النتائج بقطع النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا الطلب في هذه الحالة **قليل المرونة أو غير مرن.**

مثال 2:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 200 - 10x$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 200 وحدة عند سعر يساوي 20 ريال.

الحل:-

- أولا نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب: $D' = -10$
- ثانيا التعويض في القانون: **م = المشتقة الاولى لدالة الطلب ×** $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = (10-) × $\frac{20}{200}$ **= 1-**

حيث أن القيمة المطلقة (أي النتائج بقطع النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا الطلب في هذه الحالة **متكافئ المرونة.**

مثال 3:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 15x - 20$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 1000 وحدة عند سعر يساوي 100 ريال.

الحل:-

- أولا نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب: $D' = 15$
- ثانيا التعويض في القانون: **م = المشتقة الاولى لدالة الطلب ×** $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = (15) × $\frac{100}{1000}$ **= 1.5**

حيث أن القيمة المطلقة (أي النتائج بقطع النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا الطلب في هذه الحالة **مرن.**

تمرين واجب :-

مثال 3:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 1.5x + 20$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 600 وحدة عند سعر يساوي 200 ريال.

النهايات العظمى والصغرى :-

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى:

1- يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة.

2- يتم إيجاد المشتقة الثانية.

3- تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى).

← إذا كانت إشارة المشتقة الثانية **سالبة** فهذا يدل على وجود نهاية **عظمى**.

← إذا كانت إشارة المشتقة الثانية **موجبة** فهذا يدل على وجود نهاية **صغرى**.

مثال 1:-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل

$P= -0.4x^2 + 300x -2000$

حدد إذا ما كانت هذه الدالة تمثل نهاية كبرى أو صغرى ؟

الحل:-

- المشتقة الأولى للدالة:

$P^{/} = -0.8x + 300$

- المشتقة الثانية للدالة:

$P^{//} = -0.8$

← نجد أن المشتقة الثانية للدالة **سالبة** وبالتالي فهي **تحقق نهاية عظمى.**

مثال 2:-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل

$P= 500-0.2x +0.1x^2$

حدد إذا ما كانت هذه الدالة تمثل نهاية كبرى أو صغرى ؟

الحل:-

- المشتقة الأولى للدالة:

$P^{/} = -0.2 + 0.2x$

- المشتقة الثانية للدالة:

$P^{//} = 0.2$

← نجد أن المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي **تحقق نهاية صغرى**

رأس مالك علمك ، و عدوك جهلك

المحاضره الثاني عشرة

تابع / التفاضل وتطبيقاته التجارية

الاستهلاك والادخار :-

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل.

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون **موجبة** لكن أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب).

2- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل.

قيمة الميل الحدي للاستهلاك أو للادخار تكون **موجبة** لكن أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب).

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال 1:-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي: $(K = 15 + 0.6x - 0.02x^2)$، المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك والميل الحدي للادخار.

الحل:-

- دالة الاستهلاك الحدي هي المشتقة الأولى للاستهلاك:

$$K' = 0.6 - 0.04x$$

- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي واحد ريال هو:

$$K'(1) = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 - 0.4 = 0.56$$

- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي واحد ريال هو:

= 1 − الميل الحدي للاستهلاك = 1− 0.56 = 0.44

مثال 2:-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي: $(K = 18 + 0.8x - 0.15x^2)$، المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك والميل الحدي للادخار.

الحل:-

- دالة الاستهلاك الحدي هي المشتقة الأولى للاستهلاك:

$$K' = 0.8 - 0.3x$$

- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي واحد ريال هو:

$$K'(1) = 0.8 - 0.3 \times 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي واحد ريال هو:

= 1 − الميل الحدي للاستهلاك = 1− 0.5 = 0.5

الربح الحدى :-

1- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة.

2- الربح الكلي = الإيراد الكلي − التكلفة الكلية.

3- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي.

4- التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية.

5- الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي.

6- الربح الحدي = الإيراد الحدي − التكلفة الحدية.

مثال 1:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية:

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل:-

- دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي:

$$\boldsymbol{R' = 36x^2 + 40x - 10}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذا $x = 10$.

$$\boldsymbol{R' = 36 \times 10^2 + 40 \times 10 - 10 = 3990\ S.R.}$$

مثال 2:-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة الواحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :

$$r = 4x^2 + 6x + 5 \quad (\text{الوحدة بيع سعر})$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة.

المطلوب:

إيجاد الإيراد الحدي عند بيع وإنتاج 15 وحدة ؟

الحل:-

- دالة الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$$\boldsymbol{R = x \times r = x(4x^2 + 6x + 5) = 4x^3 + 6x^2 + 5x}$$

- دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي:

$$\boldsymbol{R' = 12x^2 + 12x + 5}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدة إذا $x = 15$.

$$\boldsymbol{R' = 12 \times 15^2 + 12 \times 15 + 5 = 2885\ S.R}$$

مثال 3:-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة الواحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :

$$r = 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20 \quad (\text{الوحدة بيع سعر})$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة.

المطلوب:

إيجاد الإيراد الحدي عند بيع وإنتاج 5 وحدة ؟

الحل:-

- دالة الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$$\boldsymbol{R = x \times r = x(10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x}$$

- دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي:

$$\boldsymbol{R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدة إذا $x = 15$.

$$\boldsymbol{R' = 40 \times 5^3 - 33 \times 5^2 + 10 \times 5 - 20 = 4205\ S.R.}$$

مثال 4:-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ شكل:

$$C = 10x^2 - 12x + 15$$

أوجد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل:-

- دالة التكاليف الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية:

$$\boldsymbol{C' = 20x - 12}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذا $x = 10$.

$$\boldsymbol{C' = 20 \times 10 - 12 = 188\ S.\ R.}$$

مثال 5:-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ شكل:

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^2$$

أوجد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة ؟

الحل:-

- دالة التكاليف الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية:

$$\boldsymbol{C' = 3(5x^2 - 3x + 15)(10x - 3)}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذا $x = 20$.

$$\boldsymbol{C' = 3 \times (5 \times 20^2 - 3 \times 20 + 15)^2(10 \times 20 - 3) \ = 1155405\ S.\ R}$$

مثال 6:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي:

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب:

اوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة

الحل:-

- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$$

$$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

- دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي:

$$P' = 6x^2 - 42x + 1$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 30 وحدة إذا $x = 30$.

$$P' = 6x^2 - 42x + 1 = 6 \times 30^2 - 42 \times 30 + 1 = 4141\ \text{S.R.}$$

مثال 7:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي:

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب:

اوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة

الحل:-

- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20) \\ &= 12x^3 - 5x^2 - 5x + 80 \end{aligned}$$

- دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي:

$$P' = 36x^2 - 10x - 5$$

← **حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 30 وحدة إذا** $x = 30$.

$$P' = 36x^2 - 10x - 5 = 36\times25^2 - 10\times25 - 5 = 22245 \text{ S.R.}$$

تمرين شامل :-

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية والإرادات الكلية وتأخذ هذه الدوال الشكل التالي:

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

المطلوب:

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات.

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة.

3- دالة الربح الكلي.

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات.

الحل:-

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات:

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$\Rightarrow R' = 120x^3 + 24x - 6$$

← **حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذا** $x = 10$.

$$R' = 120\times10^3 + 24\times10 - 6 = 120234 \text{ S.R.}$$

تابع الحل:-

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة:

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$\Rightarrow C' = 39x^2 - 10x + 3$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدات إذا $x = 12$.

$$C' = 39\times 12^2 - 10\times 12 + 3 = 5499 \text{ S.R.}$$

3- دالة الربح الكلي:

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= R - C \\ &= (30x^4 + 12x^2 - 6x + 15) - (13x^3 - 5x^2 + 3x - 20) \\ &= 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35 \end{aligned}$$

3- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات:

$$P = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

$$\Rightarrow P' = 120x^3 - 39x^2 + 34x - 9$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذا $x = 5$.

$$P' = 120\times 5^3 - 39\times 5^2 + 34\times 5 - 9 = 14186 \text{ S.R.}$$

العلم كالأرض، لايمكننا أن نمتلك منه سوى القليل القليل