

المحاضره الرابعه عشر / التقدير بالفترة

*ايجاد فترات الثقة للوسط الحسابي μ :

نظرية 1: اذا اخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ بحيث ان التباين للمجتمع σ^2 معلوم فان فترة الثقة $100(1-\alpha)\%$

للمعلمه μ هي

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

\bar{X} =الوسط الحسابي للعينة

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \text{قيمة } Z \text{ التي تكون المساحة على يسارها } 1 - \frac{\alpha}{2}$$

σ = الانحراف المعياري للمجتمع

n = حجم العينة

مثال: عينة عشوائية حجمها 25 اخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري 4 فأعطت $\bar{x}=60$ اوجد فترة الثقة 95% للوسط الحسابي μ

$$100(1-\alpha)\% = 95\%$$

$$1-\alpha = \frac{95}{100} = 0.95$$

$$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(60 - Z_{0.975} \frac{4}{\sqrt{25}}, 60 + Z_{0.975} \frac{4}{\sqrt{25}} \right)$$

$$= \left(60 - 2.33 \times \frac{4}{5}, 60 + 2.33 \times \frac{4}{5} \right)$$

$$= (58.14, 61.86)$$

مثال : عينة عشوائية حجمها 49 اخذت من مجتمع تباينه 9 فأعطت $\bar{x}=30$ اوجد فترة الثقة 95 % للوسط الحسابي للمجتمع μ

الحل:

$$100(1-\alpha) = 95$$

$$1-\alpha = 0.95$$

$$\rightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$\rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$$

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(30 - 1.96 \times \frac{3}{7}, 30 + 1.96 \times \frac{3}{7} \right)$$

$$=(29.16, 30.84)$$

نظرية 2: اخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم فان فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة الوسط الحسابي μ تعطى

$$\left(\bar{x} - t \left[1 - \frac{\alpha}{2}, n - 1 \right] \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t \left[1 - \frac{\alpha}{2}, n - 1 \right] \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

مثال: اخذت عينة عشوائية حجمها 15 من مجتمع طبيعي فأعطت $s = 2.1$, $\bar{x} = 17.4$ اوجد فترة 95%

$$100(1-\alpha) = 95$$

$$\rightarrow 1-\alpha = 0.95$$

$$\rightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$\rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$$

$$\left(\bar{x} - t \left[1 - \frac{\alpha}{2}, n - 1 \right] \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t \left[1 - \frac{\alpha}{2}, n - 1 \right] \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(17.4 - t[0.975,14] \frac{2.1}{\sqrt{15}}, 17.4 + t[0.975,14] \frac{2.1}{\sqrt{15}} \right)$$

$$(16.24, 18.56)$$

فترة الثقة 95% للوسط الحسابي μ

تمرين: عينة عشوائية حجمها 16 اخذت من مجتمع طبيعي اذا علمت ان الوسط الحسابي للعينة يساوي 20 اوجد:

1-فترة الثقة 90% للوسط الحسابي μ اذا كان التباين للمجتمع يساوي 9

2- فترة الثقة 90% للوسط الحسابي μ اذا كان التباين للعينة يساوي 9

فترة الثقة للفريق بين وسطين

نظرية 3: اذا كان x_1, x_2, \dots, x_{n1} عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وكانت y_1, y_2, \dots, y_{n2} عينة عشوائية من مجتمع طبيعي اخر $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ بحيث ان تباين المجتمعان معلومان فان فترة $100(1-\alpha)$ ثقة للفريق بين الوسط الحسابي $\mu_1 - \mu_2$ تعطى

$$[(\bar{x} - \bar{y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{x} - \bar{y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}]$$

مثال: اخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1, 25)$ ثم اخذت عينة عشوائية حجمها 15 من مجتمع طبيعي اخر $N(\mu_2, 40)$ فاذا اعطت العينة الاول وسط حسابي 32 والعينة الثانية وسط حسابي 47 اوجد

1- فترة ثقة 95% للفرق بين الوسطين $\mu_1 - \mu_2$

$$100(1-\alpha) = 95$$

$$\rightarrow 1-\alpha = 0.95$$

$$\rightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$\rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$$

$$\left((\bar{x} - \bar{y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_1}}, (\bar{x} - \bar{y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

$$\left((32 - 47) - Z_{0.975} \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}}, (32 - 47) + Z_{0.975} \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}} \right)$$

$$=(-20.1, -9, 9)$$

2- فترة ثقة 90% للفرق بين الوسطين $\mu_2 - \mu_1$

$$100(1-\alpha) = 90$$

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 1 - 0.9$$

$$\rightarrow \alpha = 0.1$$

$$\rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.1}{2} = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$((\bar{y} - \bar{x}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{y} - \bar{x}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

$$= \left((47 - 32) - Z_{0.95} \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}}, (47 - 32) + Z_{0.95} \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}} \right)$$

$$= (10.73, 19.27)$$

تقدير النسبة

نظرية 4: إذا كانت $\bar{p} = \frac{x}{n}$ نسبة نجاح في عينة عشوائية حجمها n فان فترة الثقة $100\% (1 - \alpha)$ نسبة النجاح P تعطى

$$\left(\bar{P} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{P}(1 - \bar{P})}{n}}, \bar{P} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{P}(1 - \bar{P})}{n}} \right)$$

مثال: اوجد فترة 95% ثقة لنسبة عدد الطلاب في احد المدارس الذين لديهم ضعف في البصر. اخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب ووجد 15 طالب لديهم ضعف البصر

$$\bar{P} = \frac{15}{100} = 0.15$$

$$100(1 - \alpha)\% = 95\% \rightarrow 1 - \alpha = 0.95$$

$$\rightarrow \alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975$$

فترة الثقة للنسبة للنجاح p هي

$$\begin{aligned} & \left(\bar{p} - \frac{Z_{1-\alpha}}{2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}, \bar{p} + \frac{Z_{1-\alpha}}{2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \right) \\ & = \left(0.15 - 1.96 \sqrt{\frac{(0.15)(0.85)}{100}}, 0.15 + 1.96 \sqrt{\frac{(0.15)(0.85)}{100}} \right) \\ & = (0.08, 0.22) \end{aligned}$$

تقدير التباين

نظرية: إذا كانت x_1, x_2, \dots, x_n عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فان فترة الثقة $100(1-\alpha)\%$ للتباين σ^2 هي

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{x^2[1-\frac{\alpha}{2}, n-1]}, \frac{(n-1)s^2}{x^2[\frac{\alpha}{2}, n-1]} \right)$$

مثال: عينة عشوائية حجمها 20 اخذت من مجتمع طبيعي فاعطت تباين $s^2 = 15$ اوجد فترة ثقة 90% للتباين σ^2

$$(1-\alpha)100\% \Rightarrow 90\% \rightarrow 1-\alpha = 0.9$$

$$\rightarrow \alpha = 0.1$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.1}{2} = 0.95$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05$$

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{x^2[1-\frac{\alpha}{2}, n-1]}, \frac{(n-1)s^2}{x^2[\frac{\alpha}{2}, n-1]} \right)$$

$$= \left(\frac{(20-1)15}{x^2[0.95, 19]}, \frac{(20-1)15}{x^2[0.05, 19]} \right)$$

$$= \left(\frac{(19)(15)}{30.14}, \frac{(19)(15)}{6.84} \right)$$

$$= (9.456, 41.667)$$

#بعد المذاكرة:

اللهم اني استودعك ما قرأت و ما حفظت و ما تعلمت،
فرده عند حاجتي اليه، انك على كل شيء قدير، حسبنا الله و نعم الوكيل..

تلخيص / Mu*

