المحاضره السادسه عشر .

اختبار الفرضيات للوسط الحسابي μ

<u>نظرية (1):</u> إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ بحيث يكون التباين معلوم فإن

دالة الاختبار تعطى $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

بحيث أن $\bar{X}$ الوسط الحسابي للعينة

1- اختبر الفرضية الصفرية $H_0 : \mu = \mu_0$
2- مقابل الفرضيات
   1. $H_1 : \mu \neq \mu_0$
   2. $H_1 : \mu > \mu_0$
   3. $H_1 : \mu < \mu_0$
3- مستوى الدلالة $\propto$

4- دالة الاختيار $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$

5- منطقة الرفض لـ H_0

الحل:

:(i)

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

$Z < Z_{\frac{\propto}{2}}$ OR $Z < Z_{1-\frac{\propto}{2}}$

نقوم برفض H_0 ودعم H_1

:(ii) $H_1 : \mu > \mu_0$

$Z > Z_{1-\propto}$

نقوم برفض H_0 ودعم H_1

:(iii) $H_1 : \mu < \mu_0$

$Z < Z_{\propto}$

نقوم برفض H_0 ودعم H_1

مثال: *تخضع أوزان عبوات أحد المساحيق لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 7 ومعدله μ على مستوى الدلاله $\propto = 0.05$ ، اختبر الفرضية $H_0: \mu = 50$ مقابل الفرضية البديلة $H_1: \mu \neq 50$*

إذا علمت أن الوسط الحسابي لعينة حجمها 12 هو $\bar{X}=56$

الحل:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{56 - 50}{7/\sqrt{12}} = 2.97$$

$Z_{\frac{\propto}{2}}$	$Z_{1-\frac{\propto}{2}}$
$< Z_{\frac{0.05}{2}}$	$> Z_{1-0.025}$
$< Z_{0.025}$	$> Z_{0.975}$
< -1.96 ×	> 1.96 √

ندعم H_1 ونرفض H_0

مثال: شركة متخصصة في صناعة لعب الأطفال تعاقدت لشراء نوع جديد من الخيوط الصناعية ويدعي صانع هذه الخيوط أن متوسط قوة تحمل الخيط 15 كيلوجرام بانحراف معياري 0.5 كيلوجرام. ولاختبار صحة هذا الادعاء أخذت عينة عشوائية من 50 خيطاً وتم اختبارها فوجد أن متوسط قوة التحمل في العينة 14.8 كيلوجرام. فهل يمكن تأييد ادعاء صانع الخيوط عند مستوى معنوية 1% ؟

المعطيات:

$H_0 : \mu = 15$ $\qquad \sigma = 0.5$

$H_1 : \mu \neq 15$ $\qquad n=50$

$\propto = 0.01$ $\qquad \bar{X}=14.8$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{14.8 - 15}{0.5/\sqrt{50}} =$$

$< Z_{\frac{\propto}{2}}$

$8 < Z_{\frac{0.01}{2}}$

$8 < Z_{0.005}$

$8 < -2.575$ √

$Z_{1-\frac{\propto}{2}}$

$8 > Z_{1-0.005}$

$8 > Z_{0.995}$

$8 > 2.585$ ✗

ندعم الفرضية البديلة H_1 ونرفض الفرضية الصفرية

نظرية (2): أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ وكان التباين غير معلوم وكان الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ وتباين العينة S^2 عند مستوى الدلالة $\propto$ فإن دالة الاختبار:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

1. الفرضية الصفرية $H_0 : \mu = \mu_0$
2. الفرضية البديلة $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

$H_1 : \mu < \mu_0$

3. مستوى الدلالة $\propto$
4. دالة الاختبار $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$T < -t\left[1 - \frac{\propto}{2}, n-1\right] \quad \text{OR} \quad T > t\left[1 - \frac{\propto}{2}, n-1\right]$$

ترفض الفرضية الصفرية وتدعم الفرضية البديلة

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$T > t\,[1-\propto, n-1]$$

ترفض الفرضية الصفرية وتدعم الفرضية البديلة

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

$$T < -t\,[1-\propto, n-1]$$

نقوم برفض الفرضية الصفرية H_0 ودعم الفرضية البديلة H_1

مثال: أظهرت سجلات احدى المدارس أن معدل تحصيل الطلبة في امتحان اللغة الإنجليزية هو410، بدأت المدرسة بإعطاء دروس تقوية لمادة اللغة الإنجليزية. اختبر فرضية أن هذا المعدل قد تحسن إذا أعطت نتائج 14 طالب وسطاً حسابياً مقداره 418 وبانحراف معياري21 ؟

اعتبر مستوى الدلالة $\propto = 1\%$

$H_0 : \mu = 410$

$H_1 : \mu > 410$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} = \frac{418 - 410}{21 / \sqrt{14}} = 1.42$$

$$T > t\,[1 - \propto, n - 1]$$
$$1.42 > t\,[1 - 0.01 \,, 14 - 1]$$
$$1.42 > t\,[0.99 \,, 13]$$
$$1.42 > t\,[0.99 \,, 13]$$
$$1.42 > \cancel{2}.65$$

نقوم بدعم الفرضية الصفرية H_0 ورفض الفرضية البديلة H_1 ، لانستطيع القول بأن المعدل قد تحسن وندعم أن المعدل بقي كما هو 410

مثال: في عينة عشوائية مكنة من تسجيل 81 حالة وفاة في قرية معينة تبين أن متوسط العمر في العينة 67.5 بانحراف معياري 8 أعوام فهل هذا يوضح أن متوسط العمر في هذه القرية أكبر من 65 عاماً عند مستوى معنوية 5% ؟

المعطيات

$\mu = 65$ $\qquad$ $S = 8$

$\mu > 65$ $\qquad$ n=81

$\propto = \quad 0.05$ $\qquad$ =6 $\quad$ 7.5

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} = \frac{67.5 - 65}{8 / \sqrt{81}} = 2.812$$

$$T > t\,[1-\propto, n-1]$$
$$2.812 > t\,[1-0.05\,, 81-1]$$
$$1.42 > t\,[0.95\,, 80]$$
$$1.42 > 1.664$$

نقوم برفض الفرضية الصفرية ودعم الفرضية البديلة.

نظرية (3): اختبار الفرضيات المتعلقة بالفرق بين وسطين

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع $N(\mu_1\,, \sigma_1^2)$ وعينة أخرى من مجتمع $N(\mu_2\,, \sigma_2^2)$ حجمها n_2 وكان التباين معلوم في المجتمعين فإن دالة الاختبار تعطى:

$$Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

لاختبار الفرضية الصفرية $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

الفرضية البديلة: $H_1 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

مستوى الدلالة $\propto$

دالة الاختبار $Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$Z < Z_{\frac{\propto}{2}}$ OR $Z < Z_{1-\frac{\propto}{2}}$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$

$Z > Z_{1-\propto}$

$H_1 : \mu_1 < \mu_2$

$Z < Z_{\propto}$

إذا تحققت احدى المتباينات فإننا نقوم برفض الفرضية الصفرية H_0 ودعم الفرضية البديلة H_1

مثال: اخذت عينة عشوائية حجمها *72* من مجتمع $N(\mu_1, 144)$ وعينة أخرى مستقلة من مجتمع آخر حجمها *27* $N(\mu_2, 81)$ ، فأعطت العينة الأولى وسط حسابي *73* والأخرى وسط حسابي*69* ، اختبر فرضية $H_0: \mu_1 = \mu_2$ مقابل فرضية $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ على مستوى الدلالة $\propto = 0.05$

،

لحسابي 7

$$Z = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{73-69}{\sqrt{\frac{144}{72}+\frac{81}{27}}} = 1.79$$

$$Z > Z_{1-\propto}$$

$$1.79 > Z_{1-0.05}$$

$$1.79 > Z_{0.95}$$

$$1.79 > 1.645$$

نقوم برفض الفرضية الصفرية وندعم الفرضية البديلة

اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة:

يشبه اختبار الفرضيات المتعلقة بالوسط الحسابي والتباين معلوم يتغير فقط دالة الاختبار.

نظرية (4): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع ذات الحدين (مجتمع برنولي) بحيث كان $\bar{P}$ هي نسبة النجاح في العينة فإن دالة الاختبار:

$$Z = \frac{\bar{P}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

الفرضية الصفرية $H_0 : P = P_0$

الفرضية البديلة: $H_1 : P \neq P_0$

$H_1 : P > P_0$

$H_1 : P < P_0$

مستوى الدلالة $\propto$

دالة الاختبار $Z = \frac{\bar{P}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$

ترفض الفرضية الصفرية وتدعم الفرضية البديلة إذا كان:

$$H_1 : P \neq P_0$$

$$Z < Z_{\frac{\propto}{2}} \qquad \text{OR} \qquad Z < Z_{1-\frac{\propto}{2}}$$

$$H_1 : P > P_0$$

$$Z > Z_{1-\propto}$$

$$H_1 : P < P_0$$

$$Z < Z_{\propto}$$

مثال: من المعلوم أن نسبة مستخدمي حزام الأمان في السيارات هي 0.8 درست عينة عشوائية حجمها 200 سائق بعد صدور التشريع الإلزامي فوجد 170 سائق يستعملون الحزام. اختبر فرضية ما اذا كان التشريع قد زاد نسبة مستخدمي حزام الأمان على مستوى دلالة 0.1 ؟

$H_0 : P = 0.8$ $\qquad$ $\bar{P} = \frac{170}{200} = \frac{17}{20} = 0.85$

$H_1 : P > 0.8$

$$Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = \frac{0.85 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{200}}} = 1.8$$

$$Z > Z_{1-\propto}$$

$$1.8 > Z_{1-0.1}$$

$$1.79 > Z_{0.90}$$

$$1.79 > 1.28$$

نقوم برفض الفرضية الصفرية ودعم الفرضية البديلة، عدد مستخدمي حزام الأمان قد تحسن.

مثال: إذا كان من المعروف أن جسم الانسان البالغ في المتوسط يحتاج يومياً إلى 800 ميللجرام من الكالسيوم لكي يقوم بوظائفه خير قيام. ويعتقد أحد علماء التغذية أن الأفراد ذوي الدخل المنخفض لا يستطيعون تحقيق هذا المتوسط، ولاختبار ذلك تم اختيار عينة من 49 شخصاً بالغاً من ذوي الدخل المنخفض فكان متوسط ما يتناوله

من الكالسيوم يومياً هو 755 ميللجرام بانحراف معياري 210 ميللجرام. فهل تدل هذه النتائج على أن متوسط ما يتناوله الأشخاص البالغون من ذوي الدخل المنخفض من الكالسيوم تقل عن 800 ميللجرام مستخدماً بنسبة معنوية 5% ؟

المعطيات:

$= 800$ $S = 21$

< 800

$\propto = 0.05$ 5

$\mu = 800$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} = \frac{755 - 800}{210 / \sqrt{49}} = \frac{-45}{30} = -1.5$$

$$T < -t\,[1 - \propto, n - 1]$$

$$-1.5 < -t\,[1 - 0.05\,, 49 - 1]$$

$$-1.5 < -t\,[0.95\,, 48]$$

$$-1.5 < \cancel{-}1.671$$

نقوم بدعم الفرضية الصفرية ورفض الفرضية البديلة

نرفض أن تكون نسبة الكالسيوم لذوي الدخل المنخفض أقل من 800 ميللجرام وندعم أن تكون النسبة تساوي 800مللیجرام.

#بعد المذاكرة:
اللهم إني أستودعك ما قرأت و ما حفظت و ما تعلمت،
فرده عند حاجتي إليه، إنك على كل شيء قدير، حسبنا الله و نعم الوكيل..

تلخيص / *Mu