

عمادة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

المحاضرة المسجلة الثانية

د. رائد الخصاونة

الرياضيات للإدارة



الفصل الأول: الدوال (العلاقة)

- تعريف: العلاقة

هي ارتباط بين بعض أو كل من عناصر مجموعة ببعض أو كل من عناصر مجموعة أخرى.

- مثال: إذا كان لدينا $X = \{1,2,4\}$ ، $Y = \{1,2,3,4,5\}$ وكانت لدينا العلاقة R من x الى y بحيث R تعني: $b = a + 2$ حيث $a \in X$ و $b \in y$ ، اكتب بيان R ومثلها بمخطط سهمي؟

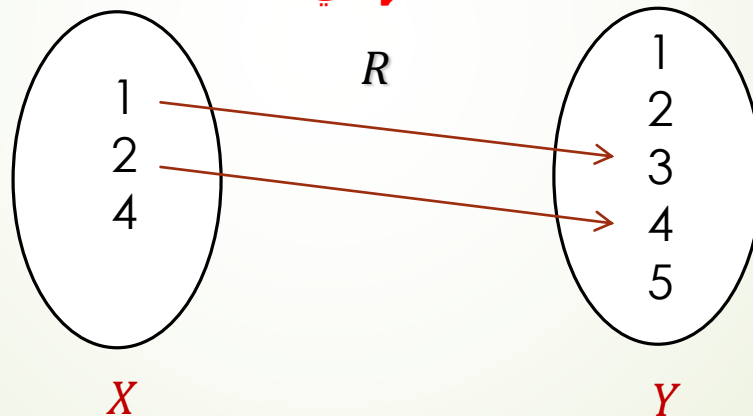
الحل: الصفحة التالية



الفصل الأول: الدوال (الدالة)

$$R = \{(1, 3), (2, 4)\}$$

المخطط
السهمي



لاحظ أن العدد ٤
من المجموعة X
لا يمكن أن يرتبط
بأي عدد من
المجموعة Y
وذلك لأن $٦ = ٢ + ٤$
والعدد ٦ لا ينتمي
إلى المجموعة Y

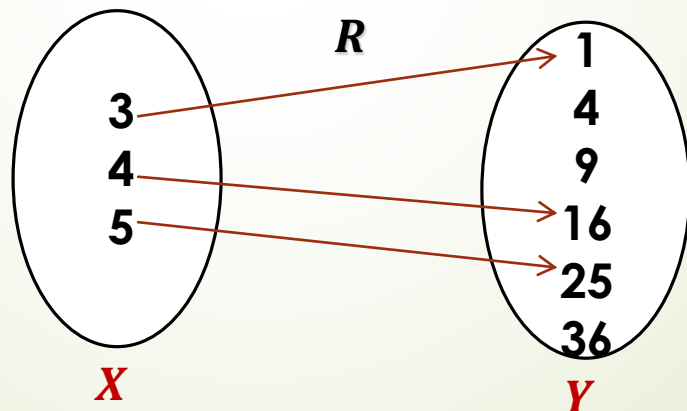


الفصل الأول: الدوال (العلاقة)

- مثال: إذا كان لدينا $X = \{3,4,5\}$ ، $Y = \{1,4,9,16,25,36\}$

وكانت لدينا العلاقة R من x الى y بحيث R تعني: $b = a^2$ حيث $a \in X$ و $b \in Y$
اكتب بيان العلاقة R ومثلها بمخطط سهمي؟

الحل: $R = \{(3,9), (4,16), (5,25)\}$





الفصل الأول: الدوال (العلاقة)

- تمرين: إذا كان لدينا $X = \{0,1,2,3\}$ ، $Y = \{0,1,2,3,4,5\}$

وكانت لدينا العلاقة R من x الى y بحيث R تعني: $b = 1 + a$ حيث $a \in X$ و $b \in y$ اكتب بيان العلاقة R ومثلها بمخطط سهمي؟



الفصل الأول: الدوال (الدالة)

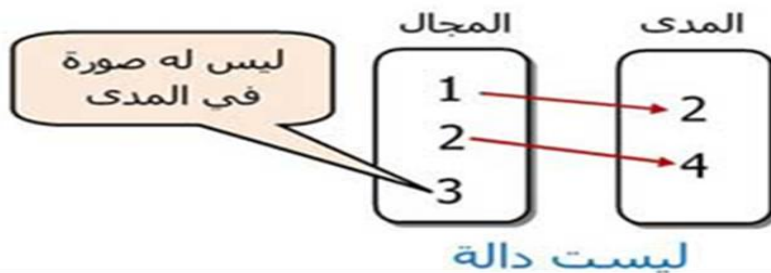
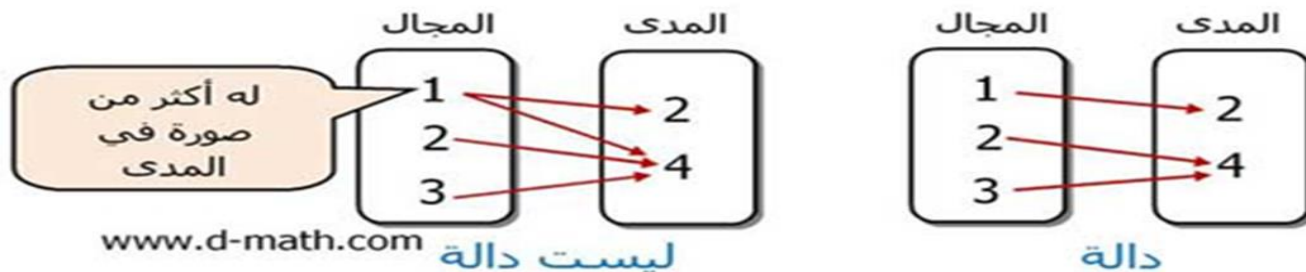
□ تعريف: الدالة

إذا كانت A, B مجموعتين، فإن دالة f من A الى B بمعنى $(f: A \rightarrow B)$ إذا كانت f مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي $A \times B$ بحيث أنه لكل $x \in A$ توجد y واحدة تنتمي الى B .
تسمى y قيمة الدالة عند x ويرمز لها بالرمز $y = f(x)$ ، كما يسمى المتغير x بالمتغير المستقل والمتغير y بالمتغير التابع.

الفصل الأول: الدوال (الدالة)

الدالة:

الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.





الفصل الأول: الدوال (الدالة)

□ مثال: إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ ، $B = \{4,8,12\}$ وكانت

$$f_2 = \{(1,4), (2,8)\} \quad \text{و} \quad f_1 = \{(1,4), (2,4), (3,12)\}$$

$$f_3 = \{(1,4), (1,8), (2,4), (3,12)\} \quad \text{و}$$

فأي من f_1 و f_2 و f_3 يعتبر دالة؟

الحل: f_1 يعتبر دالة لان كل عنصر في المجال

له صورة واحدة فقط في المجال المقابل كما ان

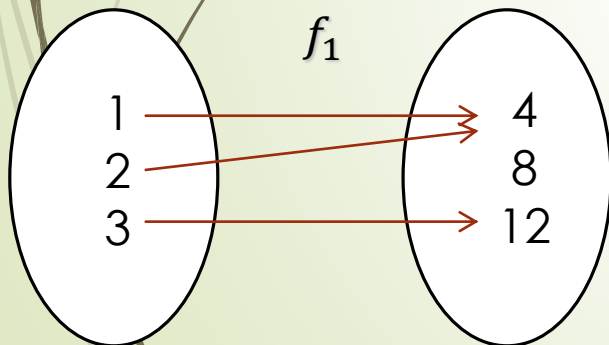
عناصر f_1 مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي

$A \times B$.

المخطط
السهمي



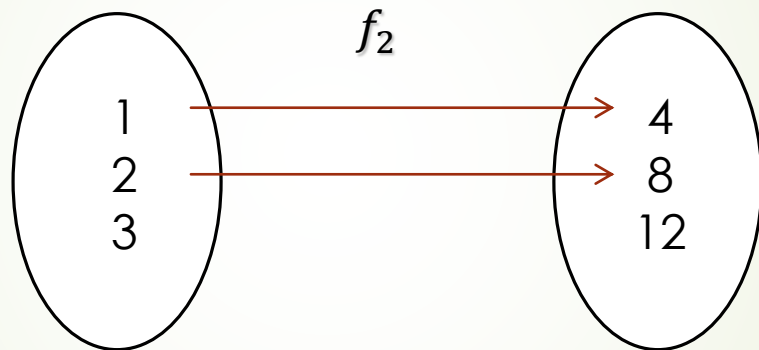
f_1





الفصل الأول: الدوال (الدالة)

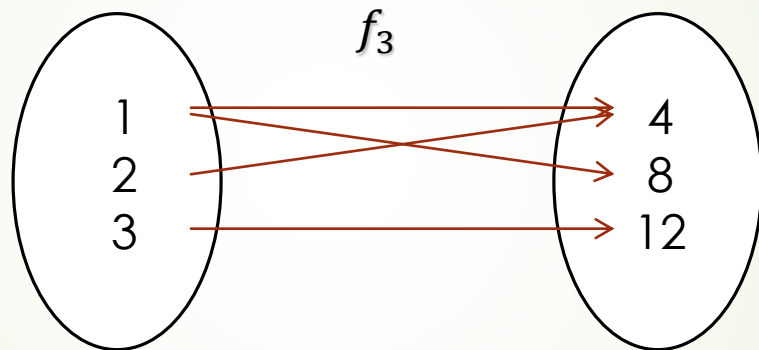
f_2 ليست دالة لان العدد $3 \in A$ ولكن ليس له صورة في B .





الفصل الأول: الدوال (الدالة)

f_3 ليست دالة لان العدد $1 \in A$. ولكن اكثر من صورة في B .





الفصل الأول: الدوال (الدالة)

► ملاحظة: إذا كانت f دالة من A الى B ، فإن A تسمى مجال الدالة وتسمى B بالمجال المقابل (مدى) الدالة.

$$f: A \rightarrow B$$



عناصر المجال
عناصر المقابل



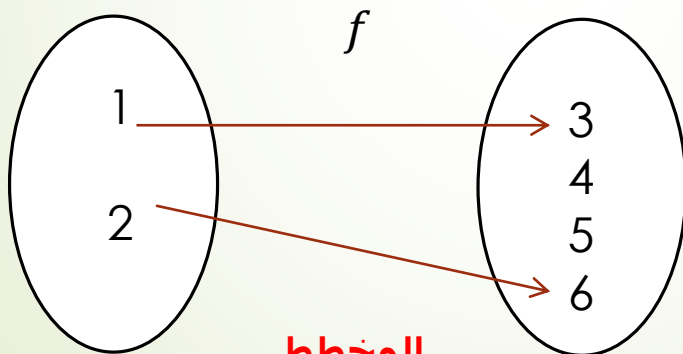
الفصل الأول: الدوال (الدالة)

□ مثال: إذا كانت $A = \{1,2\}$ ، $B = \{3,4,5,6\}$ وكانت

$$f = \{(1,3), (2,6)\}$$

مثل f بالمخطط السهمي ثم أوجد عناصر المجال والمدى؟

الحل:



المخطط
السهمي

عناصر المجال = $\{1,2\}$

عناصر المدى = $\{3,6\}$



الفصل الأول: الدوال (الدالة)

تمرين: أي من العلاقات التالية تمثل دالة

1. $R = \{(-1,2), (2,2), (3,5), (6,1)\}$

2. $R = \{(0,7), (1,5), (1,2), (3, -4)\}$

3. $R = \{(-3,1), (-1,1), (0, 1), (4,1)\}$

4. $R = \{(-4,0), (-4,4), (2,3), (1,9)\}$

5. $R = \{(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

6. $R = \{(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)\}$



الفصل الأول: الدوال (الدالة – كثيرات الحدود)

▶ أنواع الدوال: سنقتصر في دراستنا فقط على دراسة بعض من أنواع الدوال وهي الدالة الحقيقية، وهي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، أي $f: R \rightarrow R$

تعريف: كثيرات الحدود

تعرف دالة كثيرة الحدود بأنها الدالة التي تكتب على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ أعداد حقيقية وتسمى المعاملات أما المتغير n فهو عدد طبيعي (صحيح وموجب) وهي عبارة عن درجة كثيرة الحدود ممثلة بأعلى أس.



الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

□ ومن الأمثلة على كثيرات الحدود

١ - كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (وتسمى بالدالة الثابتة). ومن الأمثلة عليها

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 5 \\ f_2(x) &= -2 \end{aligned}$$

المدى

لاحظ أن مجال هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathcal{R} أما مداها فهو



الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

٢ - كثيرة حدود من الدرجة الأولى (وتسمى بالدالة الخطية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 5x$$

$$f_2(x) = -2x + 3$$

معامل
 x

الحد
الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathcal{R} ، كما أن قيمة أعلى أس للمتغير x تساوي العدد 1.



الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

٣- كثيرة حدود من الدرجة الثانية (وتسمى بالادلة التربيعية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 5x^2$$

$$f_2(x) = -2x^2 - x + 5$$

القيمة = ١- ولا يكتب

↑ معامل x^2

↑ معامل x

↑ الحد الثابت

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathcal{R} ، كما أن قيمة أعلى أس للمتغير x تساوي العدد 2



الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

٣- كثيرة حدود من الدرجة الثالثة (وتسمى بالدالة التكعيبية). ومن الأمثلة عليها

$$f_1(x) = 3x^3 - x^2 - 4$$

$$f_2(x) = \underbrace{-2}_{\substack{\text{معامل} \\ x^3}} x^3 \underbrace{-3}_{\substack{\text{معامل} \\ x^2}} x^2 \underbrace{-5}_{\substack{\text{معامل} \\ x}} x + \underbrace{1}_{\substack{\text{الحد} \\ \text{الثابت}}}$$

لاحظ أن مجال ومدى هذا النوع من الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية \mathcal{R} ، كما أن قيمة أعلى أس للمتغير x تساوي العدد 3.



الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

□ إيجاد قيمة دالة:

يمكن إيجاد قيمة أي عدد أو متغير في دالة من خلال تعويض ذلك العدد أو المتغير بدل المتغير x في تلك الدالة.

مثال: إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ ، فأوجد

(i) $f(2)$

(ii) $f(-1)$

(iii) $f(a)$



الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

الحل: □

$$(i) f(2) = 2^2 + 4 \times 2 - 3 = 4 + 8 - 3 = 9$$

$$(ii) f(-1) = (-1)^2 + (4 \times -1) - 3 = 1 - 4 - 3 = -6$$

$$(iii) f(a) = a^2 + 4 \times a - 3 = a^2 + 4a - 3$$



الفصل الأول: الدوال (كثيرات الحدود)

تمرين: إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x$ ، فأوجد \square

(i) $f(0)$

(ii) $f(-4)$



الفصل الأول: الدوال (العمليات على الدوال)

تشمل العمليات الثنائية على الدوال خمسة عمليات:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{١- الجمع}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{٢- الطرح}$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad \text{٣- الضرب}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0 \quad \text{٤- القسمة}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{٥- التركيب}$$

وهناك عملية احادية هي معكوس الدالة f ورمزها f^{-1} وتعرف كالاتي:

إذا كانت $y = f(x)$ فان معكوس الدالة يعني إيجاد x كدالة في y أي $x = f^{-1}(y)$



الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

► مثال: إذا كانت $f(x) = 3x + 5$ ، $g(x) = x^2 + 1$ ، فأوجد

i - $(f + g)(x)$

ii - $(f - g)(x)$

iii - $(f \times g)(x)$

iv - $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

v - $(f \circ g)(x)$

vi - $f^{-1}(x)$



الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

الحل:

$$(i) (f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 5 + x^2 + 1 \\ = x^2 + 3x + 6$$

$$(ii) (f - g)(x) = f(x) - g(x) = 3x + 5 - (x^2 + 1) \\ = 3x + 5 - x^2 - 1 = 3x - x^2 + 4$$

$$(iii) (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (3x + 5)(x^2 + 1) \\ = 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5 \\ = 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$$



الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

$$(iv) \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x + 5}{x^2 + 1}$$

الحل:

نعوض قيمة

$$g(x) = x^2 + 1$$

بدلاً من

$$f(x) = 3(x) + 5$$

$$(v) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) + 5$$

$$= 3x^2 + 3 + 5$$

$$= 3x^2 + 8$$



الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

(vi) - $f^{-1}(x)$

نلاحظ أنه
يمكن التعبير
عن الدالة
بالرمز
 $f(x)$
أو
 y

- لإيجاد معكوس دالة $f^{-1}(x)$ فإننا نقوم بكتابتها على الصورة $y = 3x + 5$ ثم نعيد كتابتها على صورة x كدالة في y من خلال استخدام العمليات الجبرية المختلفة.

$$3x = y - 5$$

نقل المتغير
 x

الى الطرف الآخر



$$x = \frac{y-5}{3}$$

قسمة الطرف الأيمن
على معامل

x



$$f^{-1} = \frac{y-5}{3}$$

فيكون المعكوس مساويا
للطرف الايمن



الفصل الأول: الدوال (تمارين وتدريبات)

► تمرين: إذا كانت $f(x) = 3x^2$ ، $g(x) = x+1$ ، فأوجد

i - $(f + g)(x)$

ii - $(f \times g)(x)$

v - $(f \circ g)(x)$

vi - $g^{-1}(x)$



انتهت المحاضرة المسجلة الثانية

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح