اسم المقرر

الإحصاء الاجتماعي

أستاذ المقرر

د. سعيد سيف الدين

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بُعد

جامعة الملك فيصل

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

كلية الآداب

المحاضرة الثامنة

مقاييس التشتت

١. تعريف التشتت
٢. المدى
٣. الانحراف المتوسط (متوسط الانحرافات)

١. تعريف التشتت

الدرجة التي تتجه بها البيانات الكمية للانتشار حول قيمة متوسطة (أحد مقاييس النزعة المركزية) تُسمى تشتت أو تغير البيانات

فمثلاً إذا كان لدينا ٣ مجموعات من الطلاب ، كل مجموعة مكونة من خمسة طلاب ، وكانت لها الدرجات التالية (من ١٠ درجات) في أحد المقررات

المجموعة الأولى	المجموعة الثانية	المجموعة الثالثة
5 , 5 , 5 , 5 , 5	3 , 4 , 5 , 6 , 7	1 , 2 , 5 , 8 , 9
وسطها الحسابي 5	وسطها الحسابي 5	وسطها الحسابي 5

المجموعات الثلاثة لها وسط حسابي 5 ، لكن في المجموعة الأولى : جميع القيم متساوية وتساوي الوسط 5 ، في حين تنتشر البيانات في المجموعة الثانية حول هذا الوسط بقدرٍ ما ، وفي المجموعة الثالثة تنتشر البيانات حول الوسط بقدرٍ آخر .

أي أن الوسط الحسابي وحده [وهو ممثل لمقياس نزعة مركزية ، أي قيمة نموذجية ممثلة للبيانات] ليس كافياً وحده لوصف البيانات ، ولكن لابد من وجود نوع آخر من المقاييس لرصد مدى تشتت البيانات عن تلك القيمة المتوسطة الممثلة للبيانات .

هذا النوع من المقاييس هو ما نسميه بـ مقاييس التشتت .

وهناك العديد من المقاييس التي يمكن استخدامها لقياس هذا التشتت ولكن أكثرها شيوعاً :

المدى – الانحراف المتوسط – الانحراف المعياري – الانحراف الربيعي (نصف المدى الربيعي)

ولنتعرف على كلٍ منها الآن

٢. المدى R :

مدى مجموعة من البيانات الكمية هو **الفرق** بين **أكبر** قيمة في البيانات **وأقل** قيمة فيها

فمثلاً لمجموعة القيم : ١٥ ٣ ٧ ٦ ١٢ ١٨ ٥ ٨ ١٣ ١٥ يكون المدى لها : $R = 18 - 3 = 15$

ولمجموعة القيم : ١٦ ٣ ١٤ ١٥ ١٧ ١٨ ١٧ ١٣ ١٤ ١٦ يكون المدى أيضاً : $R = 18 - 3 = 15$

أي أن المدى واحد للمجموعتين في حين يبدو للعين المجردة أن هناك تشتت للبيانات أكبر في المجموعة الأولى عنه في المجموعة الثانية ، مما يعني أن المدى هنا لا يظهر هذا الفارق ، لذا يُعد المدى **مقياساً للتشتت** لكنه **غير جيد** في كثير من الأحيان .

وبالرغم من بساطة تحديده إلا أن بعض العيوب [مثل تأثره بالقيم المتطرفة كما اتضح من المثال السابق عند حسابه للمجموعة الثانية حيث تأثر بالقيمة المتطرفة 3] ، فإذا استبعدنا تلك القيمة يكون المدى مساوياً لـ : $R = 18 - 13 = 5$.

أيضاً من بين عيوبه أنه لا يمكن تحديده في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة .

الفئة	العمر x
الأولى	$2 \le x < 6$
الثانية	$6 \le x < 12$
الثالثة	$12 \le x < 15$
الرابعة	$15 \le x < 18$

$R = 18 - 2 = 16$

الحد الأدنى للفئة الأولى — الحد الأعلى للفئة الأخيرة

الفئة	العمر x
الأولى	$x < 6$
الثانية	$6 \le x < 12$
الثالثة	$12 \le x < 15$
الرابعة	$15 \le x < 18$

مفتوح من أسفل

الفئة	العمر x
الأولى	$6 \le x < 12$
الثانية	$12 \le x < 15$
الثالثة	$15 \le x < 18$
الرابعة	$x \ge 18$

مفتوح من أعلى

الفئة	العمر x
الأولى	$x < 6$
الثانية	$6 \le x < 12$
الثالثة	$12 \le x < 15$
الرابعة	$x \ge 15$

مفتوح من الطرفين

لا يمكن تحديد مدى البيانات

٣. الانحراف المتوسط [أو متوسط الانحرافات] $M.D$

يُعرف الانحراف المتوسط (أو متوسط الانحرافات) [ويرمز له بالرمز $M.D$] على أنه متوسط القيم المطلقة للانحرافات عن قيمة متوسطة للبيانات [عادةً تكون الوسط الحسابي أو الوسيط] .

فإذا اعتبرنا أن القيمة المتوسطة للبيانات هي الوسط الحسابي ، فإن الانحراف المتوسط لمجموعة من البيانات عددها n يُعطى بـ

$$M.D = \frac{\sum |d|}{n}$$

حيث $d = x - \bar{x}$ هي انحراف القيمة x عن الوسط الحسابي ، $|d|$ هي القيمة المطلقة للانحراف d .

ملحوظة هامة : القيمة المطلقة لأي عدد y هي القيمة العددية له دون إشارة ، ونرمز له بنفس الرمز y لكن بين خطين رأسيي | | ، أي نكتب القيمة المطلقة لـ y على الصورة $|y|$. فمثلاً :

$|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|2.5| = 2.5$, $|-3.25| = 3.25$

وهكذا .

إذن لحساب الانحراف المتوسط (أو متوسط الانحرافات) $M.D$ لمجموعة من القيم يلزم حساب الوسط الحسابي أولاً ، ثم نحسب انحرافات كل قيمة من هذه القيم عن الوسط الحسابي ، ثم القيم المطلقة لهذه الانحرافات ، ثم متوسط هذه القيم المطلقة كما هو مبين :

احسب الوسط الحسابي ← ثم ← احسب الانحرافات عن الوسط ← ثم ← احسب القيم المطلقة للانحرافات ← ثم ← احسب متوسط القيم المطلقة

فمثلاً لمجموعة القيم ١٥ ٣ ٧ ٦ ١٢ ١٨ ٥ ٣ ١٣ ١٥ يمكن حساب الانحراف المتوسط لها كالتالي :

احسب الوسط الحسابي أولاً ← ثم احسب الانحرافات عن الوسط والقيم المطلقة لهذه الانحرافات ← ثم احسب متوسط القيم المطلقة

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{97}{10} = 9.7$$

ثم

x	$d = x - \bar{x}$	$\|d\|$
15	15 – 9.7 = 5.3	5.3
13	13 – 9.7 = 3.3	3.3
3	3 – 9.7 = -6.7	6.7
5	5 – 9.7 = -4.7	4.7
18	18 – 9.7 = 8.3	8.3
12	12 – 9.7 = 2.3	2.3
6	6 – 9.7 = -3.7	3.7
7	7 – 9.7 = -2.7	2.7
3	3 – 9.7 = -6.7	6.7
15	15 – 9.7 = 5.3	5.3
97		49
$\sum x$		$\sum \|d\|$

ثم

$$M.D = \frac{\sum |d|}{n} = \frac{49}{10} = 4.9$$

وهو الانحراف المتوسط المطلوب

وفي حالة توزيع تكراري كما هو مبين (بيانات منفصلة) ، يمكن تحديد الانحراف المتوسط $M.D$ من العلاقة :

$$M.D = \frac{\sum f \times |d|}{\sum f}$$

أي نضرب القيمة المطلقة لانحراف كل قيمة [عن الوسط] في تكرارها ، ثم نقسم الناتج على مجموع التكرارات

التوزيع التكراري

المتغير x	التكرار f
4	20
5	40
6	30
7	10

فمثلاً ، للتوزيع التكراري المبين ، يمكن حساب الانحراف المتوسط كالتالي :

إتجاه الحل

من هنا بداية الحل

الجدول التكراري

المتغير x	التكرار f	fx
4	20	80
5	40	200
6	30	180
7	10	70
	100	530

$\sum f = 100$ $\sum fx = 530$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{530}{100} = 5.3$$

خاص بحساب الوسط الحسابي

$d = x - \bar{x}$	$\|d\|$	$f \times \|d\|$
4 – 5.3 = -1.3	1.3	20 × 1.3 = 26
5 – 5.3 = -0.3	0.3	40 × 0.3 = 12
6 – 5.3 = 0.7	0.7	30 × 0.7 = 21
7 – 5.3 = 1.7	1.7	10 × 1.7 = 17
		$\sum f \|d\| = 76$

$$M.D = \frac{\sum f\,|d|}{\sum f} = \frac{76}{100} = 0.76$$

وهذا الجزء يُضاف إذا كان مطلوباً حساب الانحراف المتوسط

أما في حالة البيانات الكمية المتصلة (كما في التوزيع التكراري المبين) ، تُستخدم نفس العلاقة السابقة لتحديد الانحراف المتوسط $M.D$ ، أي يكون :

$$M.D=\frac{\sum f\times|d|}{\sum f}$$

حيث $d=x_0-\bar{x}$ ، x_0 تمثل مراكز الفئات

الفئة	المتغير x	التكرار f
الأولى	$0 \le x < 20$	4
الثانية	$20 \le x < 30$	16
الثالثة	$30 \le x < 35$	12
الرابعة	$35 \le x < 40$	10
الخامسة	$40 \le x < 50$	6
السادسة	$50 \le x < 60$	2

فمثلاً ، للتوزيع التكراري المبين ، يمكن حساب الانحراف المتوسط كالتالي :

إتجاه الحل

من هنا بداية الحل

الفئة	المتغير x	التكرار f	المركز x_0	fx_0
الأولى	$0 \le x < 20$	4	10	40
الثانية	$20 \le x < 30$	16	25	400
الثالثة	$30 \le x < 35$	12	32.5	390
الرابعة	$35 \le x < 40$	10	37.5	375
الخامسة	$40 \le x < 50$	6	45	270
السادسة	$50 \le x < 60$	2	55	110
		50		1585
		$\sum f$		$\sum fx_0$

خاص بحساب الوسط الحسابي

$$\bar{x}=\frac{\sum f\,x_0}{\sum f}=\frac{1585}{50}=\underline{\underline{31.7}}$$

$d=x_0-\bar{x}$	$\|d\|$	$f\times\|d\|$
10 – 31.7 = -21.7	21.7	86.8
25 – 31.7 = -6.7	6.7	107.2
32.5 – 31.7 = 0.8	0.8	9.6
37.5 – 31.7 = 5.8	5.8	58
45 – 31.7 = 13.3	13.3	79.8
55 – 31.7 = 23.3	23.3	46.6
		388
		$\sum f\,\|d\|$

$$\therefore\quad M.D=\frac{\sum f\,|d|}{\sum f}=\frac{388}{50}=\underline{\underline{7.76}}$$

وهذا الجزء يُضاف إذا كان مطلوباً حساب الانحراف المتوسط

تمت

بحمد الله