مقرر الرياضيات للإدارة

المستوى الثاني

الفصل الثالث

النهايات

جامعة الإمام عبدالرحمن بن فيصل
IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

وكالة التعليم الالكتروني والتعلم عن بعد

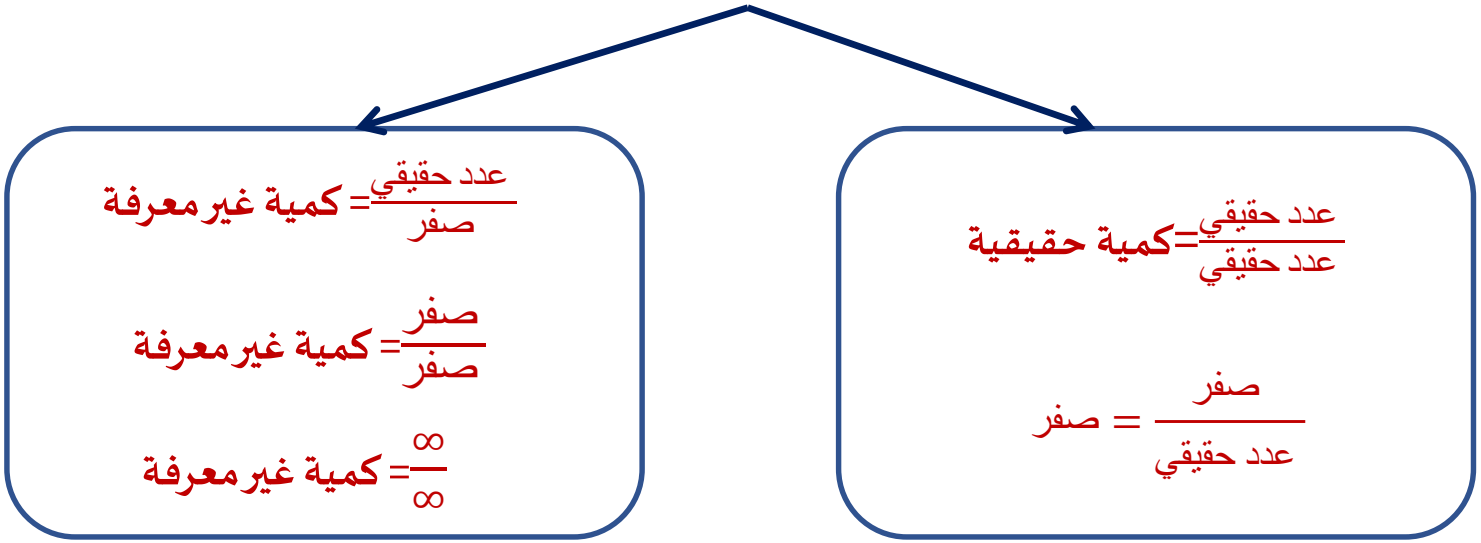
١٤٣٩هـ-٢٠١٧م

د. رائد الخصاونة

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

- هنالك بعض الدوال يكون ناتج نهايتها عند التعويض بقيمة معينة بالتعويض المباشرة قيمة غير معرفة.

لاحظ الشكل التالي:



الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

- يمكن التخلص من حالة عدم التعيين (القيمة غير المعرفة) التي تظهر عند حسابات النهايات بأحد الطرق التالية:

أولا: عندما تكون نتيجة التعويض المباشر= $\frac{0}{0}$ فإننا نطبق احد الطرق التالية :

أ- : باستخدام طرق التحليل المختلفة ، ثم الاختصار ثم التعويض.

١- اخراج العامل المشترك
٢- الفرق بين مربعين
٣- تحليل المقدار الثلاثي

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

مثال: أوجد نهاية كل مما يلي:

1. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

الحل:

بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \frac{1-1}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معرفة

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

إزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

قانون الفرق بين مربعين

$$(x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -1-1 = -2$$

عملية الاختصار بين البسط والمقام

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

قانون الفرق بين مربعين
$(x^2-y^2)=(x-y)(x+y)$

الحل:

كمية غير معرفة عند التعويض المباشر

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ ← قانون تحليل المقدار الثلاثي

الحل:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{1^2-3\times 1+2}{1-1} = \frac{1-3+2}{1-1} = \frac{0}{0}$$ كمية غير معرفة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية ونقوم بعملية الاختصار ثم التعويض بقيمة a

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x-2) = 1-2 = -1$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{2x}$

قانون اخراج العامل المشترك بين الحد الأول والحد الثاني

الحل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{2x} = \frac{0^2+0}{2\times 0} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معرفة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x\times 2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

ب- باستخدام القانون التالي:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}=\frac{n}{m}\times a^{n-m}$$

مثال: اوجد نهاية المقدار التالي:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-8}?$$

الحل:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2^4}{x^3-2^3}=\frac{4}{3}(2)^{4-3}=\frac{8}{3}$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

مثال: اوجد نهاية المقدار التالي:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^2-9}?$$

الحل: نلاحظ أن قيمة التعويض المباشر= $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x^4-3^4}{x^2-3^2}=\frac{4}{2}(3)^{4-2}=2\times 9=18$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

مثال: اوجد نهاية المقدار التالي:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^3-125}?$$

الحل: التعويض المباشر سنحصل على القيمة $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^3-125}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5^2}{x^3-5^3}=\frac{2}{3}(5)^{2-3}=$$

$$\frac{2}{3}\times 5^{-1}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

- ثانيا: عندما تكون نتيجة التعويض المباشر= $\frac{\infty}{\infty}$:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتا حدود بحيث كان المطلوب إيجاد قيمة نهاية حاصل قسمة الدالة f على الدالة g عندما $x \to \infty$ ، فإننا نطبق احد النتائج التالية:

١- إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام فإن:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

مثال: أوجد نهاية المقدار التالي:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+2x+1}$$

نلاحظ أن نتيجة التعويض المباشر= $\frac{\infty}{\infty}$، وبالتالي سنتعامل معها حسب القاعدة رقم (١)

الحل: بما أن درجة البسط أقل من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+2x+1} = 0$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

٢- إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام فإن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في البسط}}{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في المقام}}$$

مثال: أوجد نهاية المقدار

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5}$$

الحل: بما أن درجة البسط = درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5}=\frac{1}{3}$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

٣- إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام فإن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

مثال: أوجد نهاية كل مما يلي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^2+5}$$

الحل: بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^2+5}=\infty$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

مسائل اضافية: أوجد نهاية كل مما يلي:

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^5+1}{3x^5+x^2+5}$$

الحل: بما أن درجة البسط = درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^5+1}{3x^5+x^2+5} = \frac{-2}{3}$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

$$2. \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 - 3}{x^4 + 2x + 1}$$

الحل: بما أن درجة البسط أقل من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 - 3}{x^4 + 2x + 1} = 0$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

$$3.\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-10}{x+25}$$

الحل: بما أن درجة البسط اكبر من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-10}{x^2+25} = \infty$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

❑ ملاحظة: أي عدد حقيقي مقسوم على ∞، فإن الناتج = صفر $\left(\frac{\text{عدد حقيقي}}{\infty}\right) = 0$

وبالتالي نحصل على النتيجة التالية:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \left[\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right]^n = 0$$

❑ مثال:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

❑ مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right]^3=0$$

❑ مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{27}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)^3=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}\right]^3=0$$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

❑ تمارين: أوجد النهايات التالية

1. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-16}$

2. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x^2+5x+6}$

3. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2+4x}{x+4}$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

❑ تمارين: أوجد النهايات التالية

4. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1}$

5. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{7x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 4}$

6. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + 6x - 21}{x^2 + 1}$

الفصل الثالث: النهايات والاتصال (نهاية الدوال غير محددة القيمة)

❑ تمارين: أوجد النهايات التالية

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^6}$

8. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x+2}$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3+6x^2-x^4}{x^2+x^3}$

10. $\lim_{x\to 9} \frac{x^2-81}{x^3-729}$

انتهت المحاضرة المسجلة السادسة

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح