2018-2017 / 1439-1438

مقرر

الإحـــصـــاء في الإدارة

المستوى 3

د. ملفي الرشيدي

إعداد : لوسيندآ العصامية

المحاضـــره الأولى

الدوال و النهايات و الاتصال

الدالة

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ،وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو تتعين بواسطة) كمية أخرى .

ملاحظة :-

إذا كانت f دالة من A إلى B فإن A تسمى مجال الدالة و تسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .

حتى تكون f دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور .

الدوال الحقيقية :-

- **دالة كثيرة الحدود :**

هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ(x).

$$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$$

$$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)

2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)

3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$(الدرجة الثانية و تسمى الدالة التربيعية)

4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$(الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)

5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$(الدرجة الرابعة)

العمليات على الدوال :

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة،وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g- دالتين فإن:

1- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

1- $(f+g)(x)$

$= f(x) + f(g)$

$= 3x+5 + x^2+1$

$= x^2+3x+6$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد

$2\text{-}(f - g)(x) =$

$= f(x) - g(x)$

$= (3x+5) - (x^2+1)$

$= 3x+5 -x^2-1$

$= -x^2 + 3x +4$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد

$3\text{-} (f \times g)(x) =$

$= f(x) \times g(x)$

$= (3x+5) \times (x^2+1)$

$= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5$

$= 3x^3 + 5x^2 + 3x +5$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

$$4\text{-} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

معادلة الخط المستقيم :-

ايجاد ميل الخط المستقيم :- ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_1 , y_1)$

ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_2 \neq x_1$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,-3)$ و $B(3,7)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7--3}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(3,2)$ و $B(5,2)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(2,3)$ و $B(2,6)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0} = \infty$$

اذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$ax + by + c = 0$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a و b لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$2x + 4y - 8 = 0$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$5x = -4y + 10$

الحل

$5x + 4y - 10 = 0$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

$4x - y - 2 = 0$, $4x - y + 1 = 0$

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$

إذا المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال :-

هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل

$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$

$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{1}{3}$

$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{1}{3} = -1$

المستقيمان متعامدان

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميلة m و يمر بالنقطة $A(x_1,y_1)$ هي :-

$y - y_1 = m (x - x_1)$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (5,-3) و ميله يساوي 2- .

الحل

$m = -2 \;\; , \; x_1 = 5 \;\; , y_1 = -3$

$y - (-3) = -2(x-5)$

$Y + 3 = -2(x-5)$

$y = -2x + 7$

تمارين واجب :-

1- إذا $A=\{2,3,4,5,6\}$ و $B=\{5,9,13\}$ وكانت

$f_1 = \{(5,2),(9,3),(13,4)\}$

و $f_2 = \{(5,2),(9,3),(13,6)\}$

و $f_3 = \{(5,6),(9,2),(13,4),(9,6)\}$

فهل $f_1 f_2 f_3$ دوال من B إلى A ؟

2- أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- $R = \{(1,4),(2,4),(3,3),(4,5)\}$

2- $R = \{(2,4),(3,1),(3,2),(4,1),(5,2)\}$

3- $R = \{(-1,0),(-4,4),(2,3),(1,9)\}$

3- للدالة $f(x) = 2x^3 + 10x^2 - 15$ أحسب $f(1)+f(3)$

4-إذا كانت $\underline{f(x)=6x+3}$ و $\underline{g(x)=10}$ فأوجد:

$(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\times g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$

5- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(6,\frac{-3}{4})$ و $B(4,\frac{8}{5})$.

6- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$ و $B(7,\frac{-5}{8})$.

7- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$-5x + 3y - 8 = 0$

8- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$12x = -9y + 30$

9- هل المستقيمان $8x - 2y - 4 = 0$ و $4y = 16x + 4$ متوازيان ؟

10- هل المستقيمان $3y - 12x - 6 = 0$ ، $8y + 2x - 30 = 0$ متعامدان ؟

11- أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (9,-2) و ميله يساوي 5- ؟

النهايات

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x\to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a.

مثال :-

عندما f(x) يعني إيجاد قيمة الدالة $\lim_{x\to 2} f(x)$ فإن $f(x) = 2x + 1$ إذا كانت 2تؤول إلى وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5.

جبر النهايات :

١- إذا كانت $f(x)=c$ حيث c عدد حقيقي فإن (دالة ثابتة) $\lim_{x\to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a.

٢- إذا كانت $f(x) = mx + c$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a.

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x\to 5} 30$$

$$\lim_{x\to 2}(1 - 2x)$$

$$\lim_{x\to 2}(3x + 4)$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x - 5)$$

الحل

$$\lim_{x\to 5} 30 = 30$$

$$\lim_{x\to 2}(1 - 2x) = 1 - (2 \times 2) = -3$$

$$\lim_{x\to 2}(3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$$

$= 8 \times 1/2 - 5 = 4 - 5 = -1 \lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5)$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

1- $\lim_{x \to 5} [h(x) - f(x)]$

$= \lim_{x \to 2} h(x) - \lim_{x \to 2} f(x)$

$= 10.5 - 5 = 5.5$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

2- $\lim_{x \to 2} [g(x) \times h(x)]$

$= \lim_{x \to 2} g(x) \times \lim_{x \to 2} h(x)$

$= -8 \times 10.5 = -84$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

3- $\lim_{x \to 2} 8 f(x)$

$= 8 \times \lim_{x \to 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

4- $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{\lim_{x \to 2} f(x)}{\lim_{x \to 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$= [\lim_{x \to a} f(x)]^n \lim_{x \to a} [f(x)]^n$

مثال :

$= [\lim_{x \to 1} 3x - 1]^6 \lim_{x \to 1} [3x - 1]^6$

$= [3 \times 1 - 1]^6 = [3 - 1]^6 = [2]^6 = 64$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim\limits_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7)$

$= 3\times 2^3 + 5\times 2^2 - 7$

$= 3\times 8 + 5\times 4 - 7 = 37$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

2- $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2+7}{x-5}$

$= \frac{3\times 3^2+7}{3-5} = \frac{3\times 9+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

3- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-1}{5x+3}$

$= \frac{2\times 2-1}{5\times 2+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$

4- $\lim\limits_{x\to 2} e^x$

$= e^2$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

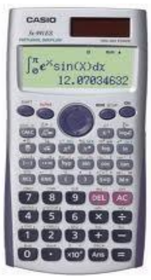
5- $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2+2x+1}$

$= e^{1^2+2\times 1+1} = e^{1+2+1} = e^4$

6- $\lim\limits_{x\to 2} \log(3x^2+5) = \log(3\times 2^2+5)$

$= \log(3\times 4+5)$

$= \log(12+5) = \log(17)$



أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

7- $\lim\limits_{x\to 3} \ln(2x-5) = \ln(2\times 3-5) = \ln(6-5) = \ln(1) = 0$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

8- $\lim\limits_{x\to1}(3x^3+4x-2)^3$ = ((3×1³) + 4 × 1 -2)³

= (3+4-2)³ = (5)³ = 125

9- $\lim\limits_{x\to2}\sqrt[3]{x^2+5}$ = $\sqrt[3]{2^2+5}$ = $\sqrt[3]{4+5}$ = $\sqrt[3]{9}$ = 2.08

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x)=\begin{cases}9x^2 & , \ x<5\\ 15x-2 & , \ x>5\end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى 3 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى 7 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \ x<1\\ 7x-2 & , \ x>1\end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ (و 3 تقع في مجال الدالة الثانية)

= 7x -2 = 7 × 3 -2 = 19

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \ x<1\\ 7x-2 & , \ x>1\end{cases}$$

فأوجد :-

2- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$ (و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (\frac{1}{2})^2 + 5 = 3\times\frac{1}{4} + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \ x<1\\ 7x-2 & , \ x>1\end{cases}$$

فأوجد :-

3- $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

الحل

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \ x<1\\ 7x-2 & , \ x>1\end{cases}$$

3- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

$= 7x - 2 = 7\times 1 - 2 = 5$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

$= 3x^2 + 5 = 3\times(1)^2 + 5 = 3+5 = 8$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}20x^2+15 & , \ x<5\\ 6x-10 & , \ x>5\end{cases}$$

فأوجد :-

$\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

الحل

$$f(x)=\begin{cases}20x^2+15 & , \ x<5\\ 6x-10 & , \ x>5\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 5} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

$= 6x - 10 = 6\times 5 - 10 = 20$

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

$= 20\times(5)^2 + 15 = 20\times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x\to5^+} f(x) \neq \lim_{x\to5^-} f(x)$$

$\lim_{x\to5} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

الاتصال :-

تعريف :

اذا تحققت الشروط التاليه : متصلة في النقطة a $f(x)$ **يقال للداله**

1- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R.

2- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

3- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , \ 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , \ x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

f(5) = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$\lim_{x\to5^+} f(x)$ = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$\lim_{x\to5^-} f(x)$ = 6x = 6× 5 = 30

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=5 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , \ 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , \ x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

f(10) = 20+4 x = 20 + 4×10 = 20 +40 = 60

$\lim_{x\to10^+} f(x)$ = 20+4x = 20 +4× 10 = 20 +40 = 60

$\lim_{x\to10^-} f(x)$ = $12x^2$ = 12× 10^2 = 1200

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , \ x \le 8 \\ 1160 + 15x & , \ x > 8 \end{cases}$$

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

$f(8) = 20\,x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$

$\lim_{x\to 8^+} f(x) = 1160 + 15x = 1160 + 15 \times 8 = 1280$

$\lim_{x\to 8^-} f(x) = 20\,x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند x=8 .

تمارين الواجب :-

تمرين 1 :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x\to 0} 5$$

$$\lim_{x\to 5}(10 - 2x + x^2)$$

$$\lim_{x\to 12}(3x + 6)$$

$$\lim_{x\to \frac{2}{3}}(9x - 2)$$

تمرين 2 :-

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 20$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -15$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 18.5$ ، فأوجد ما يلي :-

1- $\lim_{x\to 5}[h(x) + f(x)]$

2- $\lim_{x\to 5}[h(x) - g(x)]$

3- $\lim_{x\to 5}[g(x) \times f(x)]$

4- $\lim_{x\to 5}[\frac{g(x)}{f(x)}]$

تمرين 3 :-

أوجد :-

1- $\lim_{x\to 1}[5x - 2]^2$

2- $\lim_{x\to 2}[10 - 2x]^2$

تمرين 4 :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x\to 5}(2x^3 - 2x^2 - 50)$

2- $\lim_{x\to 0}(1 - e^x)$

3- $\lim_{x\to 1} log(10x^4 + 15)$

4- $\lim_{x\to 2} e^{2x^2+3x+2}$

5- $\lim_{x\to 3} ln(20x^2 - 5x + 10)$

تمرين 5 :-

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2 + 15 & , \quad x < 2 \\ 5x - 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x\to 3} f(x)$

2- $\lim_{x\to 1} f(x)$

تمرين 6 :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 3 + x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

المحاضره الثانيه

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- :بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل: يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y= 5x + 9$

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx}$ =؟؟؟؟؟

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$y = 15$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$\frac{dy}{dx}$ =0

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

1- $y = x^5$ $\quad \frac{dy}{dx} = 5x^4$

2- $y = 15x^4$ $\quad \frac{dy}{dx} = 60x^3$

3- $y = 10x$ $\quad \frac{dy}{dx} = 10$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$1-\ y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$$

$2-\ y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

$1-\ y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x2 - 7x)(3)$$

$2-\ y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$$\frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)(3)$$

القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-

مشتقة حاصل قسمة دالتين $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ =

$$\frac{\text{المقام} \times \text{البسط مشتقة} - \text{البسط} \times \text{المقام مشتقة}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4) - (x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 3x - 6}{9x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

$1 - y = (15x2 + 20)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(15x^2 + 20)^2(30x)$$

$2 - y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$$\frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5$$ (المشتقة الاولى)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40$$ (المشتقة الثانية)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72$$ (المشتقة الثالثة)

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1- المرونة

تعرف مرونة الطلب السعرية : على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية فتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = 1 (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

لاحظ أن :- المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (1):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 80 - 6x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 100وحدة عند سعر يساوي 10 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة **قليل المرونة أو غير مرن**.

مثال (2):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 200 - 10x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 200وحدة عند سعر يساوي 20 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -10)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (-10) \times \frac{20}{200} = -1$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة **متكافئ المرونة**.

مثال (3):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 15x - 20)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 1000وحدة عند سعر يساوي 100 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = 15)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (15) \times \frac{100}{1000} = 1.5$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة **مرن**.

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي $(D = 1.5x + 20)$ أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي 600 وحدة عند سعر 200 ريال ؟

2- الاستهلاك والادخار

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك $\underline{K}$ حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

2- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار $\underline{S}$ حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 15+0.6x - 0.02x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K' = 0.6 - 0.04\,x$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$K' = 0.6 - 0.04\,x\,1 = 0.6 - .04 = 0.56$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = $1 - 0.56 = 0.44$

3- النهايات العظمى و الصغرى

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

1. يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .
2. يتم إيجاد المشتقة الثانية .
3. تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .

موجبه = نهايه صغرى

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة ∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P = -0.4x^2 + 300x - 2000$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمى أم صغرى ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^{/} = -0.8x + 300$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = -0.8$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= 500-0.2x +0.1x^{2}$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^{/} = -0.2 + 0.2x$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = 0.2$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

4- الربح الحدي

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

2- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

3- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

4- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

5- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

6- = الايراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (1) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$R = 12x^{3} + 20x^{2} - 10x +30$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$R^{/} = 36x^{2} + 40x - 10$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$R^{/} = 36x^{2} + 40x - 10 = 36\times10^{2} + 40\times10 - 10=3990$

مثال (2) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$(\text{سعر بيع الوحدة}) = 4x^2 + 6x + 5$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 15 وحدة ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$R = (\text{دالة سعر بيع الوحدة} \times x)$

$R = (4x^2 + 6x + 5) \times x = 4x^3 + 6x^2 + 5x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 12x^2 + 12x + 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدات إذاً $x=15$

$R' = 12x^2 + 12x + 5 = 12 \times 15^2 + 12 \times 15 + 5 = 2885$

مثال (3) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

$(\text{Selling price سعر بيع الوحدة}) = 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :- إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$R = (\text{دالة سعر بيع الوحدة} \times x)$

$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) \times x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً $x=5$

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

$= 40 \times 5^3 - 33 \times 5^2 + 10 \times 5 - 20 = 4205$

مثال (4) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 - 12x + 15$

المطلوب :- إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = 10x^2 - 12x + 15$ (التكاليف الكلية)

$C' = 20x - 12$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$C' = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188$ ريال

مثال (6) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 15x^2 + 9x - 17$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$

$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

$P' = 6x^2 - 21x + 1$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=30$

$P' = 6x^2 - 21x + 1 = 6 \times 30^2 - 21 \times 30 + 1 = 4771$ ريال

مثال (7) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 + 3x + 20$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$

$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

$P' = 36x^2 + 30x - 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 25 وحدة إذاً $x=25$

$P' = 36x^2 + 30x - 5 = 36\times25^2 + 30\times25 - 5 = 23245$ ريال

تمرين شامل (1)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .

3- دالة الربح الكلي .

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

الحل

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$R' = 120x^3 + 24x^2 - 6$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$R' = 120\times10^3 + 24\times10^2 - 6 = 122394$ ريال

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

$C' = 39x^2 - 10x + 3$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$C' = 39\times12^2 - 10\times12 + 3 = 5499$ ريال

3- دالة الربح الكلي :-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

$P = R - C = 30x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 9x + 35$

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$P = 30x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 9x + 35$

$P' = 120x^3 - 39x^2 + 7x - 9$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً $x=12$

$P' = 120 \times 12^3 - 39 \times 12^2 + 7 \times 12 - 9 = 201819$ ريال

تمرين شامل (2)

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) $= 3x^2 + 25x - 18$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

المطلوب :-

1- دالة الايراد الكلي .

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

4- دالة الربح الكلي .

5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

Selling price (سعر بيع الوحدة) $= 3x^2 + 25x - 18$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

الحل

1- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$R = x^2$

$x \times R = (3x^2 + 25x - 18)$

$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R' = 9x^2 + 50x - 18$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$R' = 9 \times 5^2 + 50 \times 5^2 - 18 = 1457$ ريال

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$C' = 20x + 2$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C' = 20\times20 + 2 = 402$ ريال

٤- دالة الربح الكلي :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

$$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

$$P' = 9x^2 + 30x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً $x=10$

$$P' = 9\times10^2 + 30\times10 - 20 = 1180$$

المحاضره الثالثه

التكامل وتطبيقاته التجارية

التكامل :-

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ،

حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت $\frac{dy}{dx}$ وللتعبير عن عملية التكامل نستخدم الرمز $\int$ و هو رمز التكامل و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل $f(x)$ و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

$$\int f(x).dx$$

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

قواعد التكامل :-

١- تكامل x المرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$$\int x^n \, .dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int k \, .dx = k\,x + c$$

$$\int \, .dx = x + c$$

مثال:

1- $\int x^3 \, .dx = \frac{1}{4} x^4 + c \rightarrow \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

2- $\int x^5 \, .dx = \frac{1}{6} x^6 + c \rightarrow \frac{x^6}{6} + c$

3- $\int 6 \, .dx = 6x + c \rightarrow 6x+c$

4- $\int 3x^4 \, .dx = \frac{3}{5} x^5 + c \rightarrow 3\frac{x^5}{5} + \frac{3}{5}x^5 + C$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8 \ .dx$$

الحـــل:

$$y = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + c$$

$$y = \frac{1}{6}x^6 + x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int 4\,x^3 - 30x^2 + 20x + 3 \ .dx$$

الحـــل:

$$y = \frac{4}{4}x^4 - \frac{30}{3}x^3 + \frac{20}{2}x^2 + 3x + c$$

$$y = x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 3x + c$$

٢- تكامل e^x:-

$$\int e^x \,.dx = e^x + c$$

٣- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$$\int \frac{1}{x} \,.dx In\, x + c$$

إيجاد قيمة c :-

مثال :-

$9\frac{x^3}{3} - 10\frac{x^2}{2} + 15x + C$

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$3x^3 - 5x^2 + 15x + c$

$$\int (9\,x^2 - 10x + 15)\,.dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (4,1)؟

(x, y)

الحل

حيث أن قيمة x = 4 و قيمة y = 1 فإن :-

$$y = \frac{9}{3}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 15x + c$$

$$y = 3\,x^3 - 5x^2 + 15x + c$$

$$1 = 3\,(4)^3 - 5(4)^2 + 15\times 4 + c$$

$$1 = 3\times 64 - 5 \times 16 + 60 + c$$

$$1 = 172 + c$$

C = -171

التطبيقات التجارية للتكامل

1- الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .

2- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

3- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

4- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$$R' = 3x^2 + 6x - 10$$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

$$R = \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x$$

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

2- حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات أي أن x=5 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

الايراد الكلي :

$$(5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = 150$$

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحــل

1- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$$

$$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$$

2- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات أي أن x=10 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$$c = 3\times(10)^4 - 20\times(10)^3 + 4\times(10)^2 - 40\times(10)$$

التكاليف الكلية $c = 30000 - 20000 + 400 - 400 = 10000$

تمرين شامل (١)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

2- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع 25 وحدة .

3- دالة الربح الحدي .

4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

5- حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع 10 وحدات .

الحــل

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كما يلي :-

$$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 20x$$

$$R = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x$$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع 20 وحدة يمكن التعويض عن قيمة $x=20$ كما يلي :-

$$R = 2\times(20)^4 + 8\times(20)^3 - 6\times(20)^2 + 20\times(20)$$

$$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000$$

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$$C = 12x^3 + 20x^2 - 10x$$

وللوصول إلى حجم التكليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة يتم التعويض عن قيمة x=25 كما يلي :-

$$C = 12\times(25)^3 + 20\times(25)^2 - 10\times(25) = 199750$$

٣- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$$P' = R' - C'$$

$$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$$

$$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$

٤- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P' = 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

حـــــل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= (2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x) - (12x^3 + 20x^2 - 10x)$$

$$= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة x=10 في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = 2\times(10)^4 - 4\times(10)^3 - 26\times(10)^2 + 30\times(10)$$

$$= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700$$

المحاضره الرابعه

الاحتمالات

نظرية الاحتمالات :-

الاحتمال هو كسر موجب أي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح .

احتمال تحقيق الحدث A نشير له بالرمز P(A) وحدود هذا الاحتمال هي :-

$0 \le A \le 1$

احتمال تحقق حدث $= \dfrac{A \text{ عدد حالات تحقق الحدث}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$

مثــال :-

صندوق به مجموعة من الكرات مقسمة كما يلي :-

20 كرة بيضاء

30 كرة حمراء

50 كرة سوداء

فإذا سحبنا كرة واحدة عشوائياً من الصندوق احسب احتمال أن تكون هذه الكرة :-

١. حمراء
٢. بيضاء
٣. سوداء
٤. حمراء أو سوداء
٥. حمراء أو سوداء أو بيضاء

الحـــــل

1- أحتمال أن تكون حمراء $= \dfrac{\text{عدد الكرات حمراء}}{\text{العدد الكلي}} = \dfrac{30}{100}$

٢- أحتمال أن تكون بيضاء $= \dfrac{\text{عدد الكرات بيضاء}}{\text{العدد الكلي}} = \dfrac{20}{100}$

٣- أحتمال أن تكون سوداء $= \dfrac{\text{عدد الكرات سوداء}}{\text{العدد الكلي}} = \dfrac{50}{100}$

٤- أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء $= \dfrac{30}{100} + \dfrac{50}{100} = \dfrac{80}{100}$

٥- أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء أو بيضاء $= \dfrac{30}{100} + \dfrac{50}{100} + \dfrac{20}{100} = \dfrac{100}{100} = 1$

مثــال :-

تقدم إلى إختبار مقرري الاحصاء في الادارة و التحليل الاحصائي 10000 طالب نجح منهم 9000 طالب في مقرر الاحصاء في الادارة كما نجح 8000 طالب في مقرر التحليل الاحصائي المطلوب :-

١) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .
٢) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .

٣) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .

٤) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .

٥) حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً .

٦) حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً .

٧) حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط .

الحـــــل

١. حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة $= \frac{9000}{10000} =$ ٩٠ % .

٢. حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة $= \frac{1000}{10000} =$ ١٠ % .

٣. حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي $= \frac{8000}{10000} =$ ٨٠ % .

٤. حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي $= \frac{2000}{10000} =$ ٢٠ % .

5- حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً $= \frac{9000}{10000} \times \frac{8000}{10000} =$ ٠,٧٢ = ٧٢ %

٦- حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً $= \frac{1000}{10000} \times \frac{2000}{10000} =$ ٠,٠٢ = ٢% .

٧- حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط =

$$= \frac{9000}{10000} \times \frac{2000}{10000} + \frac{8000}{10000} \times \frac{2000}{10000}$$

$$= 0.9 \times 0.2 + 0.8 \times 0.1 = 0.26$$

مثـال :-

في دراسة لتخصص مجموعة من الطلاب تبين التالي :-

60 طالب يدرسون محاسبة .

30 طالب يدرسون تسويق .

10 طلاب يدرسون مالية .

إذا تم اختيار طالب بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية :-

١) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة .

٢) إحتمال أن يكون تخصص تسويق .

٣) إحتمال أن يكون تخصص مالية .

٤) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق .

٥) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية .

الحـــل

١) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة = $\frac{60}{100}$

٢) إحتمال أن يكون تخصص تسويق = $\frac{30}{100}$

٣) إحتمال أن يكون تخصص مالية = $\frac{10}{100}$

٤) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق = $\frac{60}{100} + \frac{30}{100} = \frac{90}{100}$

٥) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية = $\frac{60}{100} + \frac{30}{100} + \frac{10}{100} = 1$

نظرية :-

إذا كان احتمال تحقق حادث واحد على الأقل من حادثين A أو B هو أن يتحقق أحدهما أو أن يتحقق الاثنين معاً ويسمى الاتحاد و يرمز له بالرمز :-

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

حيث أن :-

$P(A)$ هو إحتمال تحقق الحدث A .

$P(B)$ هو إحتمال تحقق الحدث B .

$P(A \cap B)$: التقاطع و يشير إلى إحتمال تحقق الحدثين معاً (الحدث الأول و الحدث الثاني).

$P(A \cup B)$: الاتحاد ويشير إلى إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل (الحدث الاول أو الثاني)

مثال :-

إذا تقدم لإختبار المحاسبة و الاقتصاد 50 طالب نجح في المحاسبة 30 طالب و نجح في الاقتصاد 40 طالب فإذا علمت أن هناك 25 طالب قد نجحوا في الاثنين معاً فاحسب احتمال النجاح في أحد المقررين على الاقل ؟

الحـــل :-

١- نرمز إلى إحتمال النجاح في المحاسبة بالرمز $P(A) = \frac{30}{50} = 0.60$

٢- نرمز إلى إحتمال النجاح في الاقتصاد بالرمز $P(B) = \frac{40}{50} = 0.80$

٣- احتمال النجاح في المادتين معاً يشير إلى إحتمال النجاح في المادة الاولى و إحتمال النجاح في المادة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$P(A \cap B) = \frac{25}{50} = 0.50$

٤- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A \cup B)$ =

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.60 + 0.80 - 0.50 = 0.90$

أنواع الاحداث A و B :-

1- أحداث متنافية (متعارضة) : وهي الاحداث التي لا يمكن أن تقع معاً أي أن حدوث أحدهما يمنع حدوث الأخر فعلى سبيل المثال فاحتمال تواجدك في الرياض و في مكة في نفس الوقت هو احتمال مستحيل و في هذه الحالة فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = 0$$

2- أحداث مستقلة : أي أن حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث الاخر فعلى سبيل المثال شراء جريدة الرياض قد لا يتعارض مع شراء جريدة مكة وفي هذه الحالة فإن أحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

3- أحداث غير مستقلة : وهي الاحداث التي يؤثر تحقق أحدهما على تحقق الاخر وكمثال على ذلك زيادة عدد ساعات مذاكرة مادة الاحصاء في الادارة يؤثر على تخفيض عدد ساعات مذاكرة مادة المحاسبة و من ثم فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً :-

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

مثـال :-

إذا كان $[\,P(A)= 0.3 , P(B)= 0.4 , P(A \cap B)=0.12]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة ؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

الشرط : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

1- $P(A) \times P(B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$

2- $P(A \cap B) = 0.12$

3- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

4- إذا هذه الاحداث مستقلة

مثال :-

إذا كان $[\,P(A)= 0.5 , P(B)= 0.3 , P(A \cap B)=0.2]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

الشرط $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

١) $P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.3 = 0.15$

٢) $P(A \cap B) = 0.2$

٣) $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

٤) إذا هذه الاحداث غير مستقلة

مثـــال :-

إذا علمت أن $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.4$ و أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية فأحسب كل من الاحتمالات التالية :-

١) $P(A\cap B)$

٢) $P(A\cup B)$

٣) $P(\bar{A})$

٤) $P(\bar{B})$

الحـــل

1- حيث أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية إذاً فإن إحتمال تحققهما معاً يساوي :-

$$P(A\cap B) = 0$$

2- و من ثم فإن إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل أو ما يعرف بالاتحاد يساوي :-

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.2 + 0.4 - 0 = 0.6$$

3- إحتمال $P(\bar{A})$ هو الاحتمال المكمل لإحتمال تحقق الحدث A و حيث أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن :-

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

الاحتمال الشـرطي :-

هو أحتمال تحقق حدث معين وليكن A و لكن بشرط حدوث الحدث B أولاً و نرمز له بالرمز $P(A|B)$ و كمثال على ذلك إذا تم تقدير إحتمال نجاحك في مقرر الاحصاء في الادارة بفرض إحتمال نجاحك في مقرر سابق وليكن مقرر المحاسبة 1 ، ويمكن تقدير الاحتمال الشرطي كما يلي :-

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

لاحظ الحالات التالية :-

١. في حالة الحوادث المتعارضة أو المتنافية :-

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

١. في حالة الحوادث المستقلة :-

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

١. في حالة الحوادث غير المستقلة :-

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثــال :-

إذا كان :-

$P(A) = 0.6 \quad , \quad P(B) = 0.8 \quad , P(A \cap B) = 0.5$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$P(A \cup B) \; , \; P(A \mid B) \; , \; P(B \mid A) \; , \; P(\bar{A}) \; , P(\bar{B})$

الحــل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

١) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

٢) $P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.8 = 0.48$

٣) $P(A\cap B) = 0.5$

٤) $P(A\cap B) \neq P(A) \times P(B)$

إذا هذه الاحداث غير مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

١) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$

٢) $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.8} = 0.625$

٣) $P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} = 0.833$

٤) $P(\bar{A}) = 1- P(A) = 1- 0.6 = 0.4$

٥) $P(\bar{B}) = 1- P(B) = 1- 0.8 = 0.2$

مثــال :-

إذا كان :-

$P(A) = 0.7 \quad , \quad P(B) = 0.4 \quad , P(A \cap B) = 0.28$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$P(A \cup B) \; , \; P(A \mid B) \; , \; P(B \mid A) \; , \; P(\bar{A}) \; , P(\bar{B})$

الحــل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

١) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

٢) $P(A) \times P(B) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$

٣) $P(A\cap B) = 0.28$

٤) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

إذا هذه الاحداث مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

١) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.28 = 0.82$

٢) $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.28}{0.4} = 0.7$

٣) $P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.7} = 0.4$

٤) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$

٥) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$

المحاضره الخامسه

تابع نظرية الاحتمالات

نظرية الاحتمالات :-

مثال :-

في دراسة لتخصصات 400 طالب وطالبة من خريجي جامعة الملك فيصل كانت النتائج كالتالي :-

التخصص	طالب B	طالبة C	المجموع
علمي S	١٢٠	٤٠	١٦٠
أدبي L	٩٦	١٤٤	٢٤٠
المجموع	٢١٦	١٨٤	٤٠٠

الجدول في الشرائح مكرر واختصرته لكم في جدول واحد

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب إحتمال أن يكون الشخص طالب أو علمي ؟

$$P(B\cup S) = P(B) + P(S) - P(B\cap S)$$

$$= \frac{216}{400} + \frac{160}{400} - \frac{120}{400} = \frac{256}{400} = 0.64$$

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب إحتمال أن يكون الشخص طالبة و تخصص أدبي :-

$$P(C\cap L) = \frac{144}{400} = 0.36$$

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

إذا علمت أن الشخص المختار طالبة أحسب احتمال أن يكون تخصصها أدبي :-

$$P(L \mid C) = \frac{P(L\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{144}{400}}{\frac{184}{400}} = \frac{144}{184} = 0.7826$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و المستوى التعليمي :-

النوع / المستوى التعليمي	ماجستير A	دكتوراهB	المجموع
ذكر C	١٢٠	١٦٠	٢٨٠
أنثى D	٨٠	٢٤٠	٣٢٠
المجموع	٢٠٠	٤٠٠	٦٠٠

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب إحتمال أن يكون الشخص ذكر أو حاصل على ماجستير :-

$$P(C\cup A) = P(C) + P(A) - P(C\cap A)$$

$$= \frac{280}{600} + \frac{200}{600} - \frac{120}{600} = \frac{360}{600} = 0.6$$

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب إحتمال أن يكون الشخص أنثى و حاصلة على ماجستير :-

$$P(D\cap A) = \frac{80}{600} = 0.1333$$

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

إذا علمت أن الشخص المختار حاصل على ماجستير أحسب احتمال أن يكون ذكر :-

$$P(C \mid A) = \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{120}{600}}{\frac{200}{600}} = \frac{120}{200} = 0.6$$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.7

أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-

2- إحتمال الرسوب في المقررين معاً ؟

الحل

$P(A) = 0.6$ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)

$P(\bar{A}) = 1- P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$ (احتمال الرسوب في الرياضيات)

$P(B) = 0.7$ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)

$P(\bar{B}) = 1- P(B) = 1 - 0.7 = 0.3$ (احتمال الرسوب في الاقتصاد)

$P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.7

أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-

3- احتمال نجاح الطالب في مقرر واحد فقط ؟

الحل

$P(A) = 0.6$ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)

$P(\bar{A}) = 1- P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$ (احتمال الرسوب في الرياضيات)

$P(B) = 0.7$ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)

$P(\bar{B}) = 1- P(B) = 1 - 0.7 = 0.3$ (احتمال الرسوب في الاقتصاد)

$P = 0.6 \times 0.3 + 0.7 \times 0.4 = 0.18 + 0.28 = 0.46$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.7

أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-

4- احتمال النجاح في مقرر واحد على الاقل ؟

الحل

$P(A) = 0.6$ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)

$P(B) = 0.7$ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)

$P(A\cap B)= 0.42$

احتمال النجاح في مقرر واحد على الاقل يقصد بذلك الاتحاد :-

$P(A\cup B)= P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.6 + 0.7 - 0.42 = 0.88$

المتغيرات العشوائية :-

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين،

وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

١- المتغيرات العشوائية المنفصلة

Discrete Random Variables

٢- المتغيرات العشوائية المتصلة(المستمرة)

Continuous Random Variables

نظرية الاحتمالات :-

1- المتغير العشوائي المنفصل :-

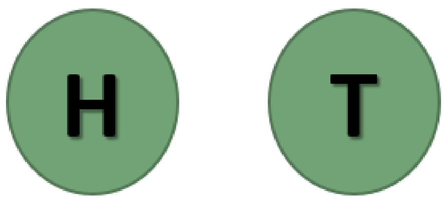
هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيماً حقيقية مختلفة (وبمعنى أخر فهو يشمل جميع القيم الصحيحة دون القيم الكسرية مثل عدد الطلاب في فصل دراسي 1،2،3،4،5.....لا يمكن أن يأخذ صورة كسرية).

2- المتغير العشوائي المتصل :-

ويطلق علية المتغير العشوائي المستمر فذلك المتغير يأخذ عدد لا نهائي من القيم المتصلة (ومن ثم فإنه يأخذ القيم الصحيحة و جميع القيم الكسرية التي تقع بين هذه القيم و كمثال على هذه المتغيرات درجات الحرارة 35.7أو أطوال الطلاب أو المعدلات التراكمية للطلاب)

مثال :-

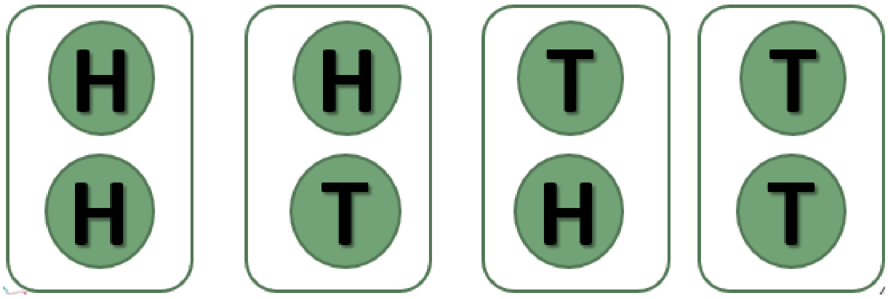
في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة , فأوجد القيم التي يأخذها ذلك المتغير واحتمالاته ؟



الحل

1- فراغ العينة (S):-

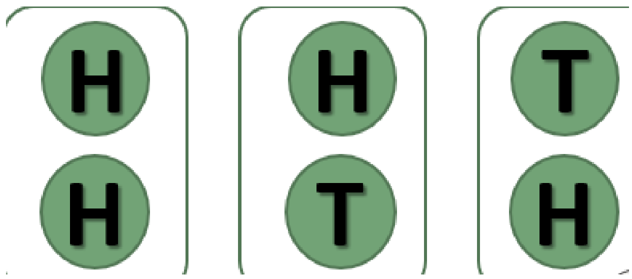
S = { HH ,HT,TH,TT}



٢ - الحدث (A):-

(تمثل وصف لنتائج التي يمكن أن يأخذها المتغير)

A ={HH ,HT,TH}



المتغير العشوائي (X):-

(وصف رقمي لعدد مرات ظهور الصورة)

X = {2 , 1 , 0 }

4- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير p(x):-

$P(x=0) = \frac{1}{4}$ where (TT)

$P(x=1) = 2/4 = \frac{1}{2}$ where (HT , TH)

$P(x=2) = \frac{1}{4}$ where (HH

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

مثال :-

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو مجموع العددين الظاهرين فأوجدي القيم التي يأخذها المتغير X وأوجدي احتمال الحصول على كل من هذه القيم ؟

الحل

١- فراغ العينة (S):-

(1,1), (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) ,(1,6) , S = {

(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) ,
(3,1) , (3, 2) , (3, 3) , (3, 4) , (3, 5) , (3, 6) ,
(4, 1) , (4, 2) , (4, 3) , (4, 4) , (4, 5) , (4, 6) ,
(5, 1) , (5, 2) , (5, 3) , (5, 4) , (5, 5) , (5, 6) ,
(6, 1) , (6, 2) , (6, 3) , (6, 4) , (6, 5) , (6, 6) }

2- المتغير العشوائي (X):-

(وصف رقمي لمجموع العددين الظاهرين)

X = {2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 }

احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير p(x):-

P(x=3) = 2/36 P(x=2) = 1/36
P(x=5) = 4/36 P(x=4) = 3/36
P(x=7) = 6/36 P(x=6) = 5/36
P(x=9) = 4/36 P(x=8) = 5/36
P(x=11) = 2/36 P(x=10) = 3/36
P(x=12) = 1/36

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

$$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) \ \ldots\ldots + P(x = 12) = 1$$

تمارين واجب :-

مثال :-

إذا أعطيت الجدول التالي :-

	A	B	المجموع
X	10	45	55
Y	30	15	45
المجموع	40	60	100

المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

1- P(A) 2- $P(\bar{A})$
3- P(X) 4- $P(\bar{X})$
5- P(A∩X)
6- P(B∩X)
7- P(A∪Y)
8- P(B∪Y)
9- P(A|Y)
10- P(B|Y)

تمرين واجب :-

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و تقديرات التخرج :-

النوع / المستوى التعليمي	جيد A	ممتاز B	المجموع
ذكر X	200	300	500
أنثى Y	400	100	500
المجموع	600	400	1000

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

1- أحسب إحتمال أن يكون ذكر أو حاصل على تقدير جيد ؟

2- أحسب أحتمال أن تكون أنثى و حاصلة على تقدير ممتاز ؟

3- إذا علمت أنها أنثى فما هو أحتمال أن تكون حاصلة على تقدير جيد ؟

المحاضره السادسه

تابع نظرية الاحتمالات

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص :-

النوع / المستوى التعليمي	x	y	المجموع
A	5	10	15
B	12	3	15
المجموع	17	13	30

من خلال الجدول السابق المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

$P(y)$ $P(B \cup y)$

$P(\overline{B})$ $P(x \cap A)$

$P(B \mid X)$ $P(A \mid y)$

تمرين :-

مصنع يستخدم ثلاث آلات في الانتاج فإذا كانت الالة الاولى تنتج 30% من إنتاج المصنع و الالة الثانية تنتج 50% من الانتاج و الباقي للألة الثالثة فإذا كانت نسبة الانتاج المعيب للألأت الثلاثة على التوالي هي 5% و 1% و 2% ،وإذا تم سحب وحدة عشوائياً من إنتاج المصنع إحسب :-

1- احتمال أن تكون معيبة :-

$P = 0.30*0.5 + 0.50*0.01 + 0.20*0.02 = 0.024$

2- اذا علمت ان هذه الوحدة معيبة فما هو احتمال أن تكون من إنتاج الالة الثالثة :-

$$P = \frac{0.004}{0.024} = \frac{4}{24}$$

تمرين :-

تطبع ثلاث سكرتيرات جميع مراسلات مكتب ما, فإذا كانت السكرتيرة A تطبع 40% من المراسلات, و تطبع B 30% و تطبع C 30% الباقية , إذا كان احتمال أن A تخطئ في الطباعة هو 0.02 و احتمال الخطأ في عند B هو 0.03 و احتماله عند C هو 0.04.

سحبت ورقة من المراسلات فوجد فيها خطأ , أوجد احتمال أن تكون السكرتيرة B هي التي طبعتها؟

$$P = \frac{0.30 \times 0.03}{0.40 \times 0.02 + 0.30 \times 0.03 + 0.30 \times 0.04} = \frac{9}{29} = 0.31$$

التوزيع الاحتمالي :-

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.وهو جدول مكون من صفين ، الأول به القيم الممكنة للمتغير ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير.

مثال :-

كون جدول التوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي x المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

P(x=0) = ¼ where (TT)
P(x=1) = 2/4 = ½ where (HT , TH)
P(x=2) = ¼ where (HH)

X	0	1	2	المجموع
P(x)	1/4	1/2	1/4	1

التوقع الرياضي :-

هو الوسط الحسابي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي ويرمز له بالرمز μ أو E(x) ويتم حسابه باستخدام القانون التالي:-

$$\mu = E(x) = \sum(x \times P(x))$$

بمعنى أن التوقع يساوي حاصل جمع كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مضروبة في احتمالها و الجدول التالي يوضح كيفية الوصول إلى قيمة التوقع الرياضي :-

x	الصف ١	المجموع
P(x)	الصف ٢	1
E(x)	1 × 2	القيمة المتوقعة

التوقع الرياضي

إذا كان X متغير عشوائي منفصل .
و كان $p(x)$ هو توزيعه الاحتمالي .
فإن وسطه الحسابي أو توقعه الرياضي يعطى بالعلاقة:

$$\mu = E(X) = \sum_{\text{لجميع اقيم } x} x\,p(x)$$

مثال :-

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي x المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

X	الصف (1)	0	1	2	Σ
P(X =x)	الصف (2)	¼	½	¼	1
μ = E(x)	(1) × (2)	0	½	½	1

إذا كان التوزيع الاحتمالي لعدد الأعطال اليومية لجهاز الحاسب كما يلي , فأوجد معدل العطل اليومي للجهاز؟

x	0	1	2	3	4	Σ
P(X =x)	0.20	0.30	0.25	0.15	0.10	1
μ = E(x)	0	0.30	0.50	0.45	0.40	1.65

$$\mu = E(X) = \sum x \, . \, p(x) = 1.65$$

التباين والانحراف المعياري :-

التباين للمتغير العشوائي x الذي له قيمة متوقعة تساوي E(x) هو :-

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \sum E(x^2) - \left(E(x)\right)^2$$

و الانحراف المعياري يمثل الجذر التربيعي للتباين :-

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

و للوصول إلى قيمة التباين و الانحراف المعياري يتم إتباع الخطوات التالية :-

X	صف(1)	Σ
P(X =x)	صف(2)	1
μ = E(x)	صف٣ = صف ١ *صف ٢	القيمة المتوقعة
$E(x^2)$	صف٤ = صف ١* صف ٣	

التباين = ناتج صف ٤ – (ناتج صف ٣)²

تمرين :-

أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري والتباين للتوزيع الاحتمالي التالي:-

x	0	1	2	3
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1

الحل :

x	0	1	2	3	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1	1	الاحتمال
E(x)=x .P(x)	0	0.2	0.8	0.3	1.3	التوقع
$E(X^2)=x.\ E(x)$	0	0.2	1.6	0.9	2.7	
σ^2	$=E(x^2)-E(x)^2$				1.01	التباين
σ	$\sqrt{\sigma^2}$		$=\sqrt{1.01}$		1.005	الانحراف المعياري

تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	2	4	5	6
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25

المطلوب :-

١) الوسط الحسابي .

٢) التباين .

٣) الانحراف المعياري .

٤) $P(x\geq4)$.

٥) $P(2\leq x\leq5)$

x	2	4	5	6	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25	1	الاحتمال
E(x)=x.P(x)	0.3	1.4	1.25	1.5	4.45	التوقع
$E(X^2)=x.E(x)$	0.6	5.6	6.25	9	21.45	
$v(x)=\sigma^2$	$=E(x^2)-E(x)^2$		$=21.45-(4.45^2)=$		1.647	التباين
σ	$=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{1.647}$				1.2835 5	الانحراف المعياري

= $P(x \geq 4)$

١) الوسط الحسابي = التوقع الرياضي = 4.45

٢) التباين = 1.647

٣) الانحراف المعياري = 1.2835

٤) $P(x\geq4)$ = P(4) + P(5) + P(6)= 0.35 + 0.25+ 0.25 =0.85

= 1 - P(2) = 1 – 0.15 = 0.85

5) $P(2\leq x<5)$ = P(2) + P(4) = 0.15 + 0.35 = 0.5

تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	0	2	4	6
P(x)	0.1	0.2	0.4	?

المطلوب :-

١) p(6)

٢) الوسط الحسابي .

٣) التباين .

٤) الانحراف المعياري .

٥) $P(x\geq4)$.

٦) $P(2\leq x\leq5)$

x	0	2	4	6	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.1	0.2	0.4	0.3	1	الاحتمال
E(x)=x.P(x)	0	0.4	1.6	1.8	3.8	التوقع
$E(X^2)=x.E(x)$	0	0.8	6.4	10.8	18	مربع التوقع
$v(x)=\sigma^2$	$=E(x^2)-E(x)^2$		$=18-3.8^2=3.56$		3.56	التباين
σ					1.89	الانحراف المعياري

$P(6)=0.3$, $P(x\geq 4)=P(4)+P(6)=0.4+0.3=0.7$

إذا كان احتمال أن يكون الفرد مدخن = $\frac{1}{3}$ عند سؤال ١٠ أفراد فكل منهم قد يكون....

مدخن
غير مدخن

إذا كان احتمال وجود مصباح تالف في صندوق = $\frac{2}{7}$، عند سحب مصباح من كل صندوق من ٥٠ صندوق في كل مرة قد يكون....

سليم
تالف

رمي قطعة النقد ١٠ مرات

صورة
كتابة

إذا كان احتمال حضور الطالبة للمحاضرة $\frac{1}{4}$ ، بمتابعة حضور الطالبة في ٥ محاضرات

حاضرة
غائبة

جميع التجارب السابقة تحقق الشروط التالية:

١. نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.
٢. نتيجة كل محاولة مستقلة عن الأخرى .
٣. احتمال النجاح في كل محاولة يكون ثابت و ليكن p و احتمال الخطأ $q=1-p$
٤. إجراء التجربة عدة مرات فتكون هناك n محاولة.

تجربة ذات الحدين

إذا كان X = عدد النجاحات في n محاولة

X يسمى متغير ذات الحدين
و توزيعه الاحتمالي هو توزيع ذات الحدين
حيث x=0,1,2,3,.....n

عند رمي قطعة نقد ٧ مرات إذا اعتبرنا ظهور H هو النجاح فإن P(X=4) تعني.....

ما احتمال أن يظهر الوجه H أربع مرات عند رمي قطعة النقد ٧ مرات.

مراجعة على التوافيق :-

تمرين :-

عند اجراء تجربة ذات الحدين 5 مرات , نفترض أن x متغير ذات الحدين .

احتمال النجاح = p , احتمال الفشل = q=1-p فإن احتمالةتحقق هذه الظاهرة ثلاث مرات

$$p(X=3)=\binom{5}{3}\,p^3q^{5-3}$$

التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين X عند اجراء التجربة n مرة :

$$p(X=x)=\;b(x;n,p)\;=\;\binom{n}{x}\;p^x\;q^{n-x}$$

حيث أن p احتمال النجاح و $q=1-p$

x= 0,1,2,3.......n

تمرين :-

رميت قطعة نقود متزنة 4 مرات , أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد H الظاهر فيها.

التجربة تحقق شروط ذات الحدين ، نفرض أن النجاح هو ظهور H .

$$n=4\,.\;p=\frac{1}{2}\;.\;q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$b\left(x.4.\frac{1}{2}\right)=\binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}\qquad x=0.1.2.3.4$$

$$=\;\binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

تمرين :-

عند رمي حجر النرد 4 مرات, ما احتمال عدم ظهور الوجه6؟ ما احتمال ظهور 6 مرتين ؟

فراغ العينة = $\{1.2.3.4.5.6\}$

إذا فرضنا أن النجاح هو ظهور العدد ٦ .

احتمال النجاح p= $\frac{1}{6}$ ، احتمال الفشل q = $\frac{5}{6}$ ، n=4

$$b\left(x.4.\frac{1}{6}\right) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-x} \quad x = 0.1.2.3.4$$

$$p(\text{6 عدم ظهور}) = b\left(0.4.\frac{1}{6}\right) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-0}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{4}$$

$$p(\text{ظهور 6 مرتين}) = b\left(2.4.\frac{1}{6}\right) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-2}$$

إذا كان X متغير ذات الحدين $n.p$ فإن :

التوقع الرياضي	$E(X) = \mu = np$
التباين	$\sigma^2 = npq$

تمرين :-

في تجربة إلقاء قطعة نقود خمس مرات أوجد أحتمال ظهور الوجه H ثلاث مرات و أحسب التوقع و التباين ؟

الحـــــل

$$1\text{-}\ p(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3} = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$2\text{-}\ E(X) = \mu = np = 5\times\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$3\text{-}\ \sigma^2 = npq = 5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

تمرين واجب :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	0	1	2	3
P(x)	0.2	0.1	0.3	?

المطلوب :-

1) $p(3)$
2) الوسط الحسابي .
3) التباين .
4) الانحراف المعياري .
5) $P(x \geq 2)$.
6) $P(2 \leq x \leq 5)$

المحاضره السابعه

مقدمة الى الإحصـاء

الإحصاء

من الفعل أحصى بمعنى جمع و أحاط

قال تعالى :
« و كل شيء أحصيناه كتاباً»

تعريف علم الإحصاء Statistics

هو العلم الذي يبحث في تصميم أساليب **جمع البيانات** و التقنيات المختلفة **لتنظيم** و **تصنيف** و **عرض** البيانات و تلخيصها في صورة مؤشرات رقمية **لوصف** و **قياس** خصائصها الأساسية و تحليلها بغرض
اتخاذ القرارات المناسبة

الإحصاء قديماً

مجرد جمع المعلومات و ترتيبها في جداول أو ابرازها في رسوم بيانية أو أشكال تصويرية.

الإحصاء الحديث

العلم الذي يبحث في جمع البيانات و تنظيمها و عرضها و تحليلها و استقراء النتائج و اتخاذ القرارات.

الخطوات المنهجية للتحليل الإحصائي في البحث العلمي

جمع البيانات

- عملية الحصول على المعلومات أو قيم المشاهدات أو القياسات للتجارب التي يجريها الإحصائي.

تنظيم و عرض المعلومات

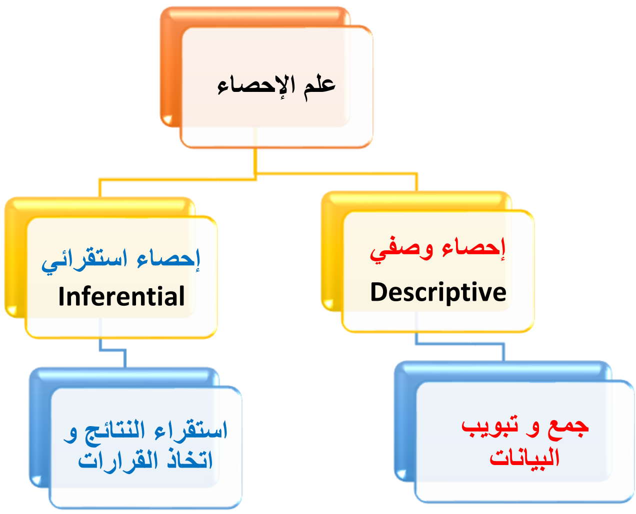
- عملية وضع المعلومات في جداول منسقة و عرضها بطرق مناسبة كالأشكال الهندسية و الرسوم البيانية و غيرها.

تحليل البيانات

- عملية إيجاد قيم لمقاييس و اقترانات معينة تحدد قيمها من البيانات موضع الدراسة.

الاستقراء و اتخاذ القرارات

- الاستنتاجات التي يصل إليها الباحث و تكون على شكل تقديرات أو تنبؤات أو تعميمات أو قرار برفض أو قبول الفرضيات الإحصائية.



البيانات (Data)

مجموعة القيم التي يتم جمعها من مفردات المجتمع أو العينة لخاصية معينة (متغير).

ما هو المتغير ؟

What is variable?

أنواع البيانات

تنقسم البيانات إلى قسمين:

بيانات نوعية (وصفية)

البيانات التي يمكن حصرها في عدة أوجه وصفية و لا يمكن إجراء العمليات الحسابية عليها كالجمع و الطرح

الأرقام الأكاديمية

- ٢١٤٠٩٠٨٧
- ٢١٣٠٠٠٢٣

الجنس

- ذكر
- أنثى

الحالة المادية

- غني
- فقير
- متوسط

البيانات الكمية

البيانات التي يتم الحصول عليها على شكل أعداد و يمكن ترتيبها.

و تنقسم إلى قسمين

البيانات الكمية المنفصلة

- البيانات التي يمكن عدها
- تكون منفصلة عن بعضها.
- مثل عدد المحاضرات المباشرة.

البيانات الكمية المتصلة

- البيانات التي لا يمكن عدها .
- يتم الحصول عليها عن طريق القياس.
- تأخذ أي قيمة داخل مدى معين سواء كانت صحيحة أو كسرية.
- مثل أطوال الطلاب.

أمثلة

الدخل السنوي

درجات الحرارة

المعدل الدراسي

العلاقة بين أنواع البيانات

قياس البيانات

تقاس البيانات من المجتمع أو العينة بأحد المقاييس الأربعة التالية:

المقياس الاسمي (التصنيفي)

المقياس الترتيبي (التفضيلي)

المقياس الفتري (الفئوي- الفترة)

المقياس النسبي (النسبة)

المقياس الاسمي

- مجموعة من الأوجه أو الصفات التي يأخذها المتغير الوصفي (تحتوى على الأسماء ، العناوين أو الأصناف فقط).
- يمكن أن تعطى الصفات أرقام تعكس مدلول الصفة و لكن ليس لها معنى رياضي في مفهوم أكبر أو أصغر (لا يمكن ترتيبها).

أمثلة

تصنيف الأفلام حسب النوع	• كوميدي – أكشن – رومانسي – تاريخي....
التصنيف حسب نوع الجنس	• ذكر - أنثى
التصنيف حسب الجنسية	• سعودي – مصري – كويتي...

المقياس الترتيبي

- مجموعة من الأوجه أو الصفات التي يأخذها المتغير الوصفي مع إمكانية ترتيبها.
- يمكن أن تعطى الصفات أرقام تعكس مدلول الصفة ولها معنى رياضي في مفهوم أكبر أو أصغر.
- لا تعكس معنى حقيقي للفروق (لا يمكن تحديدها أو لا معنى لها)

أمثلة

الحالة الاقتصادية	• فقير – متوسط – غني –
مستوى الذكاء	• منخفض – متوسط –مرتفع..
الرتب الوظيفية	• الرتبة الأولى- الثانية- الثالثة...

المقياس الفتري

- مجموعة من القيم أو الأعداد التي يأخذها المتغير الكمي.
- يمكن أن تعطى الصفات أرقام تعكس مدلول الصفة ولها معنى رياضي في مفهوم أكبر أو أصغر(يمكن ترتيبها).
- تعكس معنى حقيقي للفروق.
- الصفر ليس له معنى حقيقي (لا يعني انعدام الصفة)فلا توجد نقطة بداية حقيقية بل تكون افتراضية أو اختيارية.

أمثلة

درجة الحرارة	• ١٠ – ٢٢ - -١ – ٠ (هل يعنى لا توجد حرارة؟؟) • هل يمكن القول بأن درجة الحرارة ٨٠ هي ضعف ٤٠؟
درجة اختبار الذكاء	• هل الدرجة صفر تعني انعدام الذكاء؟؟

المقياس النسبي

- مجموعة من القيم أو الأعداد التي يأخذها المتغير الكمي.
- يمكن أن تعطى الصفات أرقام تعكس مدلول الصفة ولها معنى رياضي في مفهوم أكبر أو أصغر(يمكن ترتيبها).
- تعكس معنى حقيقي للفروق.
- الصفر له معنى حقيقي (يعني انعدام الصفة).

أمثلة

المسافات التي تقطعها السيارة

أوزان المولودين

- يمكن ترتيبها.
- يمكن حساب الفروق بينها
- توجد نقطة بداية أي أن الصفر له معنى حقيقي

مصادر جمع البيانات

<u>مصادر مباشرة (ميدانية/أولية)</u>: جمع البيانات عند ظاهرة أثناء حدوثها في ميدان العمل مثل (المشاهدة ،الملاحظة ، والتسجيل ،الاتصال الهاتفي، المقابلة الشخصية، الاستبيان).

<u>مصادر غير مباشرة (تاريخية/ثانوية)</u>: جمع البيانات من خلال سجلات سبق نشرها وتكون معده مسبقا عن ظاهرة ما ويستطيع الباحث الرجوع اليها واخذ المعلومات المطلوبه من مصادر رسميه مثل (دائرة الاحصاءات العامة ،الاحوال المدنية ،هيئات دولية).

أساليب جمع البيانات

جمع البيانات

- الأسلوب التجريبي
- أسلوب المسح
- السلاسل الزمنية

١) الأسلوب التجريبي

يتم الحصول على البيانات عن طريق تصميم تجربة يتم فيها قياس تأثير العامل موضع الدراسة مع تثبيت العوامل الأخرى

يتم الحصول على البيانات عن طريق المشاهدة

أمثلة

- تطبيق عدة طرق إعلانية لتسويق منتج جديد
- اختيار طريقة التدريس المناسبة
- تطبيق أسلوبين لزيادة درجة الإيجابية عند الأفراد

٢) أسلوب المسح

نحصل على البيانات عن طريق السجلات، التقارير، قواعد البيانات، الانترنت، الاستبيانات و المقابلات الشخصية.

الاستبيان

أسئلة موجهة لفئة معينة مختارة من الناس حسب عوامل معينة و محاور الدراسة لاستطلاع و استقصاء أراءهم.

عند إجراء أية دراسة إحصائية نبدأ بجمع المعلومات و تسمى البيانات الخام

المجتمع الإحصائي

المجموعة الكلية لمفردات الدراسة سواء كانت أفراد أو أشياء

العينة

مجموعة جزئية من مفردات المجتمع يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيل صحيح

طرق جمع البيانات

- طريقة المسح الشامل
  - تجمع البيانات من جميع أفراد المجتمع الإحصائي
  - لمعرفة المستوى الثقافي لطلاب كلية إدارة الأعمال (جمع البيانات من جميع طلاب الكلية)
- طريقة العينة (المعاينة)
  - تجمع المعلومات من جزء من المجتمع
  - لإجراء دراسة حول الدخل الشهري لسكان المملكة نختار سكان المنطقة الشرقية

متى نحتاج لاستخدام العينة عوضاً عن دراسة المجتمع بالكامل

• فساد عناصر المجتمع نتيجة أخذ المشاهدات	دراسة صلاحية البيض الذي تنتجه مزرعة ما
• تعذر الوصول إلى جميع أفراد المجتمع	دراسة كمية العسل الذي ينتجه النحل
• تقييد الدراسة بمقدار محدد من تكاليف و الزمن و الجهد المخصص لإنجازها.	عندما تكون الميزانية و الوقت محدودين
• تسبب المسح الشامل بحصول أخطاء في البيانات لأنه يحتاج إلى عدد كبير من الأشخاص لجمع البيانات.	إجراء دراسة على جميع طلاب جامعات المملكة
• الحاجة إلى اتخاذ قرار سريع	طرح علاج لإنفلونزا الطيور
• عندما يكون المجتمع الإحصائي متصلاً أو عندما يكون منفصلاً و لكنه كبير الحجم بحيث قد تحصل فيه تغيرات أثناء الدراسة.	دراسة نسبة التلوث في مياه الأمطار.

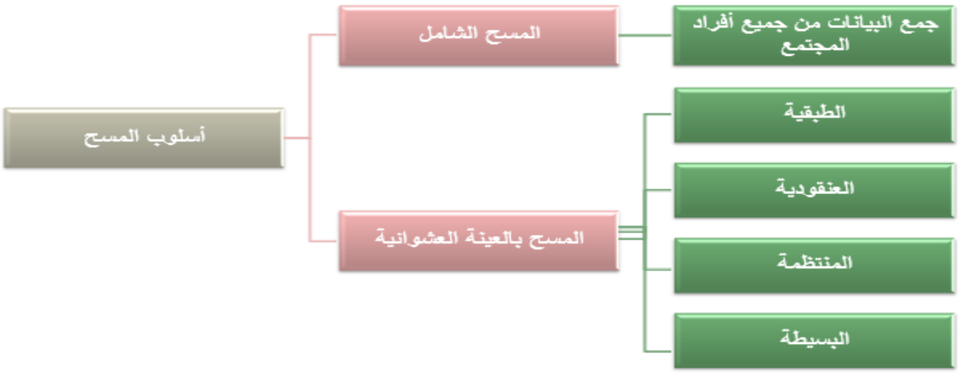
المجتمع الإحصائي

- مجتمع الهدف : المجتمع المقصود بالدراسة.
- مجتمع العينة : المجتمع الذي يتم اختيار العينة منه فعلاً.

عند اجراء دراسة لمعرفة مستوى طلاب جامعات المملكة في مقرر الإحصاء , تم اختيار عينة من جامعة المجمعة

مجتمع الهدف ← طلاب جامعات المملكة

مجتمع العينة ← طلاب الجامعة



العينة العشوائية البسيطة ← تعطي كل مفردة من مفردات المجتمع نفس فرصة الاختيار عن طريق

إعطاء كل مفردة رقم ثم تكوين العينة باختيار مجموعة أرقام عشوائياً يدوياً أو عن طريق الكومبيوتر.

مثـــــال

عند اجراء دراسة لمعرفة المستوى الثقافي لطالبات الجامعة أردنا اختيار عينة طبقية حجمها 500 نجزئ المجتمع (الجامعة) إلى كليات و نختار من كل كلية عينة عشوائية بسيطة تتناسب و عدد طالباتها و يكون مجموع جميع هذه العينات 500

نحدد حجم عينة كل طبقة من القانون السابق

$$\text{حجم العينة} \times \frac{\text{حجم الطبقة}}{\text{حجم المجتمع}}$$

حجم المجتمع = ٢٠٠+١٠٠+٤٠٠+١٥٠+١٥٠=١٠٠٠ طالب

حجم العينة المطلوبة = ٥٠٠

حجم عينة كلية العلوم :

$$n_1 = 500 \times \frac{200}{1000} = 100$$

حجم عينة كلية الطب:

$$n_2 = 500 \times \frac{100}{1000} = 50$$

حجم عينة كلية الآداب:

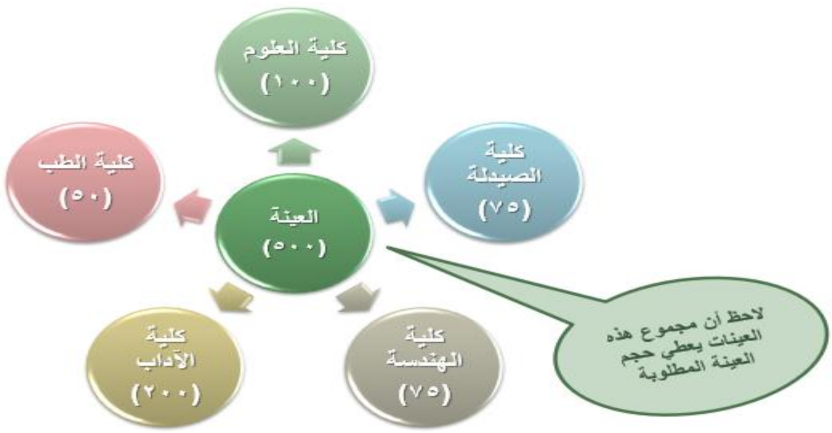
$$n_3 = 500 \times \frac{400}{1000} = 200$$

حجم عينة كلية الهندسة:

$$n_4 = 500 \times \frac{150}{1000} = 75$$

حجم عينة كلية الصيدلة:

$$n_5 = 500 \times \frac{150}{1000} = 75$$



العينة العشوائية المنتظمة

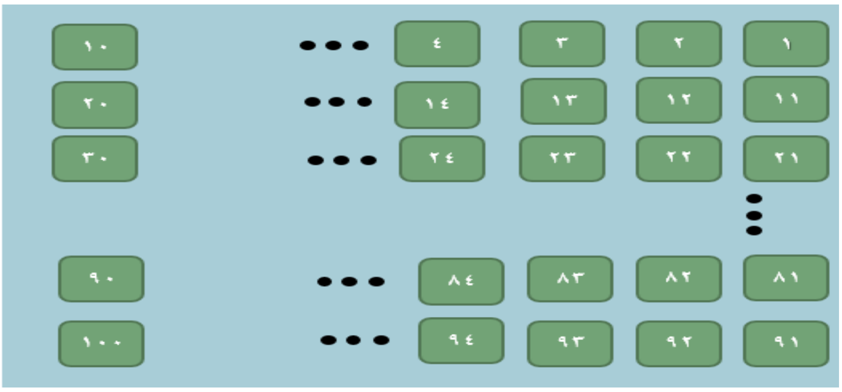
يتم تقسيم المجتمع إلى مجموعات عددها مساوي لعدد مفردات العينة ثم نختار من المجموعة الأولى عشوائياً و نختار من باقي المجموعات المفردة التي لها نفس الترتيب

إذا كانت المفردة المختارة من المجموعة الأولى هي الرابعة فنختار من كل مجموعات الباقية المفردة الرابعة لنكون العينة.

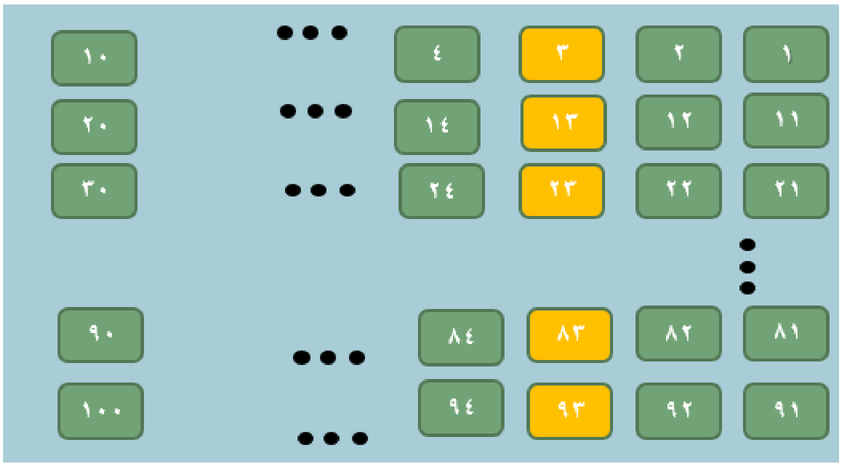
مثـال

ينتج مصنع 100 قطعة أثاث في اليوم, أردنا اختبار جودة المنتج فكيف نختار عينة منتظمة من 10 قطع لاختبارها؟

نجزئ الإنتاج الكلي إلى 10 مجموعات بعد إعطاء كل قطعة رقم.



نفرض أنا اخترنا عشوائياً من المجموعة الأولى فكان العدد هو 3 فنختار من كل مجموعة المفردة الثالثة.



إذن العينة مكونة من القطع التي تحمل الأرقام

٣,١٣,٢٣,٣٣,٤٣,٥٣,٦٣,٧٣,٨٣,٩٣

العينة العشوائية العنقودية

يكون فيها المجتمع مقسماً إلى تجمعات أو عناقيد كل منها تحتوي مجموعة من المفردات فيتم اختيار بعض هذه العناقيد عشوائياً ثم نقوم بدراسة جميع مفردات العناقيد المختارة

تسمى هذه العينة بالعينة العنقودية ذات المرحلة الواحدة.

مثـــال

أجريت دراسة لمعرفة مستوى أداء مستشفيات المملكة نكون عينة عنقودية.

نقسم المملكة على حسب المناطق كل منطقة تمثل عنقود.

نختار عشوائيا منطقتين مثلا و نقوم بدراسة جميع المستشفيات فيهما.

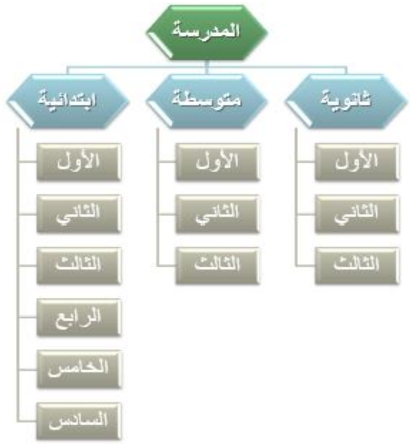
العينة العشوائية العنقودية متعددة المراحل

يكون فيها المجتمع مقسماً إلى تجمعات أو عناقيد كل منها يتكون أيضاً من مجموعة عناقيد .

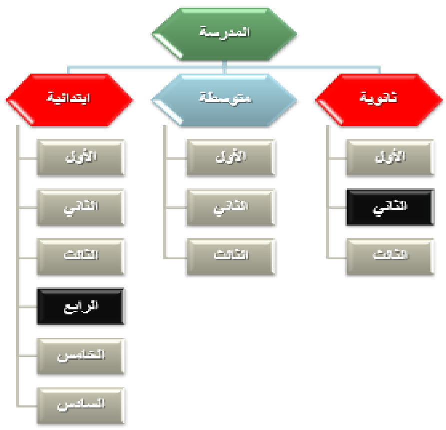
نختار عشوائياً عدد من العناقيد ثم نختار عشوائياً من كل منها عدد من العناقيد و هكذا

مثـال

لإجراء دراسة تحدد قدرة طالبات مجمع مدرسي ما على استخدام برامج الكومبيوتر نختار عينة عنقودية.



نختار عشوائياً مرحلتين مثلاً ثم نختار من كل منهما عشوائياً أيضاً صف و ندرس جميع طالبات ذلك الصف.



هل يعتبر استخدام أسلوب العينة أفضل أم المسح الشامل؟

تكون المفاضلة بينهما خاضعة للضوابط التالية :

- ❖ **حجم الميزانية و الوقت اللازم لإجراء الدراسة.**
- ❖ **مدى تعرض مفردات المجتمع للتلف.**
- ❖ **مدى تشعب و دقة البيانات المطلوبة.**
- ❖ **مدى إمكانية حصر جميع مفردات المجتمع.**

يمكن أن تتعرض البيانات لبعض الأخطاء عند جمعها

- خطأ التحيز

مصدره : الباحث أو المبحوث

إمكانية حدوثه : المسح الشامل أو العينة العشوائية.

- خطأ المعاينة العشوائية

مصدره : يرجع للصدفة فقط و ليس لخطا الباحث أو المبحوث

إمكانية حدوثه: في المعاينة العشوائية

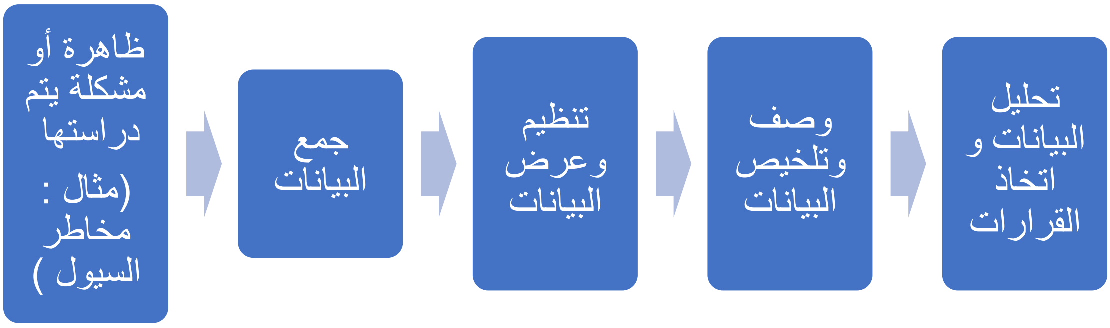
عند تصميم الاستبيان يجب مراعاة الشروط التالية:

- أن تكون الأسئلة محددة وواضحة الصياغة مع مراعاة الترتيب المنطقي للأسئلة.
- تحديد اختيارات للإجابة عن أسئلة الاستبيان من خلالها.
- تجنب الأسئلة التي تعتمد على الذاكرة لفترة زمنية طويلة.
- التقليل من الأسئلة المقالية المفتوحة.

المحاضره الثامنه

جمع البيانات و ترميزها وعرضها

الخطوات المنهجية للتحليل الإحصائي في البحث العلمي :



<u>**أهمية الاحصاء في مجال الاقتصاد والادارة :-**</u>

* يعتبر الاسلوب الاحصائي الوسيلة الاساسية في دراسة الظواهر الاقتصادية وقياس العلاقات بينها .

* تستخدم الاساليب الاحصائية في ادارة جودة الانتاج والمقارنة بين السياسات التسويقية والادارية .

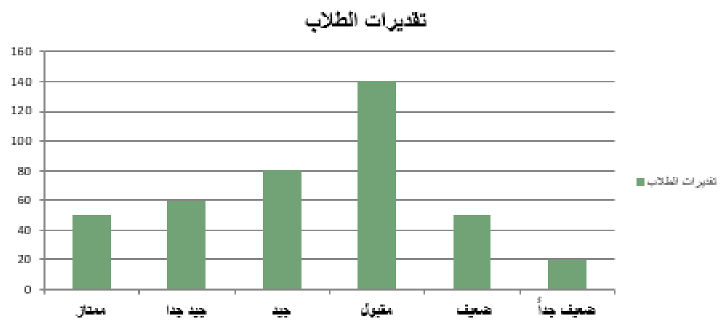
تنظيم وعرض البيانات :-

1. طريقة الجدول :-

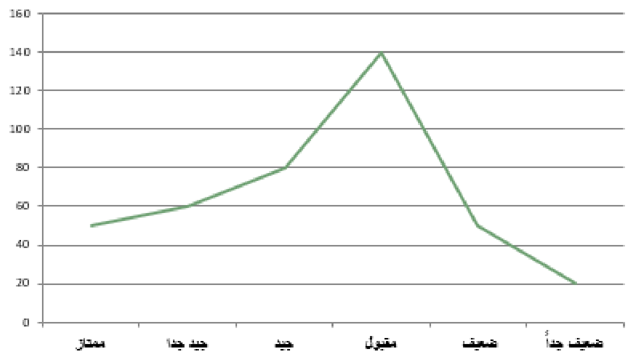
مثال : عدد الطلاب الحاصلين على تقدير معين في مقرر الاحصاء في الادارة :-

التقدير	عدد الطلاب
ممتاز	٥٠
جيد جدا	٦٠
جيد	٨٠
مقبول	١٤٠
ضعيف	٥٠
ضعيف جداً	٢٠
المجموع	٤٠٠

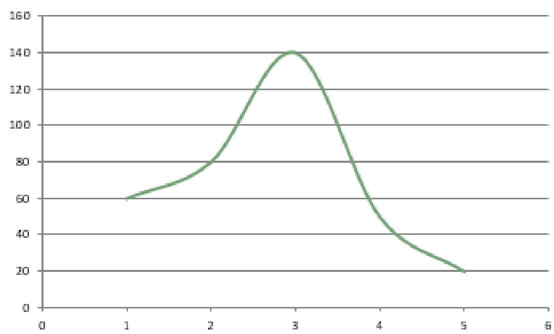
2. طريقة الأعمدة أو المستطيلات



3- طريقة الخطوط المستقيمة :-



4-طريقة الخط المنحني :-



عند إجراء أية دراسة إحصائية نبدأ بجمع المعلومات و تسمى البيانات الخام :-

1- المجتمع الإحصائي :-

المجموعة الكلية لمفردات الدراسة سواء كانت أفراد أو أشياء .

2-العينة :-

مجموعة جزئية من مفردات المجتمع يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيل صحيح

وصف البيانات:-

المقاييس الإحصائية الوصفية

- **مقاييس النزعة المركزية.**
- **مقاييس التشتت.**
- **معاملات الالتواء.**
- **و غيرها.....**

2- مقاييس النزعة المركزية

القيم التي تقترب منها أو تتركز حولها أو تتوزع بالقرب منها معظم البيانات

1- الوسط الحسابي .

2- الوسيط .

3- المنوال .

أولاً : الوسط الحسابي (المتوسط) :-

أ- البيانات غير المبوبة :-

إذا كانت $x_1, x_2, \dots . x_N$ تمثل بيانات عينة من المجتمع

الوسط الحسابي يعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots . x_N}{N}$$

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

مثال :-

البيانات التالية تمثل درجات أحد الطلاب في الفصل الدراسي الاول:-

8 , 5 , 7 , 6 , 10 , 5 , 7 , 11

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لدرجات الطالب ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots . x_N}{N}$$

$$= \frac{8+5+7+6+10+5+7+11}{8} = 6.25$$

ب – البيانات المبوبة :-

تأخذ البيانات المبوبة في العادة الشكل التالي :-

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	fx
0 – 10	8	5	40
10 – 20	10	15	150
المجموع	$\sum f$		$\sum xf$

المتوسط = $\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

	5	15	25	35	45	
فئات الدرجات	0 - 10	10 - 20	20 – 30	30 - 40	40 – 50	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250 *

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب .

- **نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى – الحد الأدنى للفئة الأولى**

طول الفئة

= 10 – 0 = 10

- نوجد مركز الفئة الأولى

$$x_1 = \frac{10+0}{2} = 5$$

مراكز الفئات الاخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة 10 على مركز الفئة الاولى :-

الحل :-

فئات الدرجات	0 - 10	10 - 20	20 – 30	30 - 40	40 – 50	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
المجموع	$\sum f=$		$\sum x_i f_i =$

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
0 – 10	20	5	100
10 - 20	50	15	750
20 – 30	90	25	2250
30 – 40	60	35	2100
40 - 50	30	45	1350
المجموع	$\sum f=250$		$\sum x_i f_i = 6550$

نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6550}{250} = 26.2 \text{ درجة}$$

مثال :-

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالريال في مائتين محل بمنطقة الرياض:-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحالات	30	20	60	50	40	200

المطلوب : حساب متوسط الاجر الأسبوعي للعامل .

- نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى – الحد الأدنى للفئة الأولى

طول الفئة 10 =5 - 15 =

- نوجد مركز الفئة الأولى

$$x_1 = \frac{15+5}{2} = 10$$

مراكز الفئات الاخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة 10 على مركز الفئة الاولى

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
5 -	30	10	300
15 -	20	20	400
25 -	60	30	1800
35 -	50	40	2000
45 - 55	40	50	2000
المجموع	$\sum f=200$		$\sum x_i f_i = 6500$

نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6500}{200} = 32.5 \text{ ريال}$$

مزايا وعيوب الوسط الحسابي

المزايا

- تدخل جميع القيم في حسابه.
- سهولة حسابه والتعامل معه جبرياً.
- يعتبر الأساس في معظم عمليات الإحصاء الاستدلالي.
- لا يحتاج في حسابه إلى ترتيب البيانات

العيوب

- لا يمكن إيجاده للبيانات الوصفية.
- يتأثر بالقيم الشاذة (المتطرفة).
- لا يمكن إيجاده بالرسم.

٢- الوسيط

هو القيمة العددية التي تقل عنها نصف البيانات (50%) ويزيد عنها النصف الآخر. ويعرف كذلك بأنه مقياس الموقع لأن قيمته تعتمد على موقعه في البيانات.

طريقة حسابه (في حالة البيانات غير المبوبة)

أ- الوسيط من البيانات غير المبوبة :-

إذا كانت $x_1 . x_2 . \dots . x_n$ تمثل بيانات عينة من المجتمع

فإن الوسيط يحسب كالتالي:

١. نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً.
٢. نوجد موقع الوسيط $\frac{n+1}{2}$.
٣. إذا كان n عدد فردي فإن الناتج يكون عدد صحيح و بالتالي الوسيط هو $x_{\frac{n+1}{2}}$.

٤. **إذا كان n عدد زوجي فإن الناتج يكون عدد غير صحيح و بالتالي الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين اللتين يقع بينهما العنصر $x_{\frac{n+1}{2}}$.**

مثال :-

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

,20 , 40 , 10 , 60 , 50 ,

الحل

1- ترتيب البيانات تصاعدياً :

10 , 20 , 40 , 50 , 60

2- ترتيب الوسيط = $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

3- الوسيط هو القيمة الثالثة :- الوسيط = 40

مثال :-

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

, ,20, 40 , 10 , 60 , 50 , 80

الحل

1- ترتيب البيانات تصاعدياً :

10 , 20 , 40 , 50 , 60 , 80

2- ترتيب الوسيط = $\frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$

3- ترتيب الوسيط هو رقم كسري إذاً الوسيط هو متوسط القيمتين التي موقعهما 3 و 4

الوسيط = $\frac{40+50}{2} = 45$

ب- الوسيط من البيانات المبوبة :-

1- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

2- ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum f}{2}$

3- الوسيط =

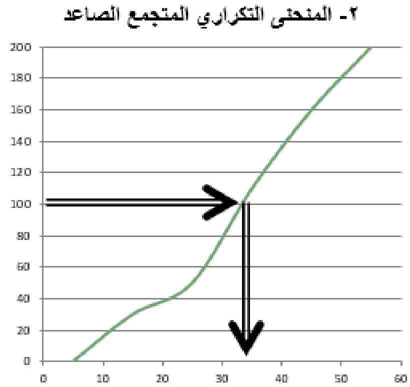
الحد الادنى للفئة الوسيطية + $\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{الترتيب السابق}}{\text{الترتيب اللاحق} - \text{الترتيب السابق}}$ × طول الفئة الوسيطية

الدكتور ذكر ان المثال هذا محذوف

الوسيط من الرسم :-

- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55



٣- الربيع الأدنى و الربيع الأعلى :-

الربيع الأدنى و الربيع الأعلى من البيانات المبوبة :-

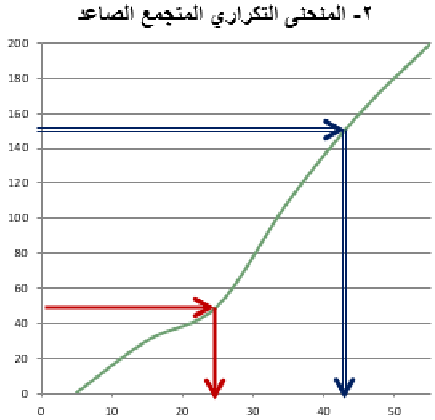
1- الربيع الادنى : هو القيمة العددية التي تقل عنها ربع البيانات (25%) ويزيد عنها (75%).

2- الربيع الاعلى : هو القيمة العددية التي تقل عنها ثلاث أربع البيانات (75%) ويزيد عنها (25%).

الربيع الادنى و الاعلى من الرسم :-

١- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55



٤- المنوال :-

القيمة التي تكررت أكثر من غيرها أي القيمة الأكثر شيوعاً أو تكراراً.

أولاً : البيانات غير المبوبة :-

مثال :-

الدرجات التالية تمثل نتائج مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة أوجد المنوال لهذه الدرجات ؟

10 , 15 , 12 , 10 , 14 , 12 , 10

المنوال هو 10 و هو القيمة الأكثر تكراراً

ثانياً المنوال من البيانات المبوبة :-

1- جدول تكراري بسيط (بدون فئات) :-

المنوال هي القيمة التي تقابل أكبر تكرار

مثال :-

الجدول التالي يوضح أجور مجموعة من الموظفين خلال العام الماضي المطلوب حساب قيمة منوال الاجر ؟

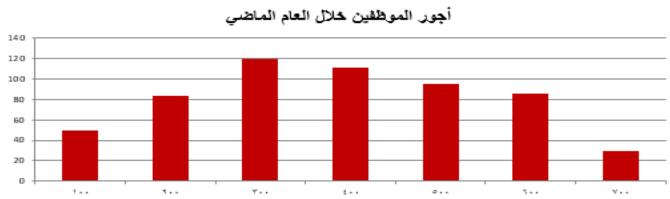
الأجر	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠
عدد العمال	٥٠	٨٤	١٢٠	١١١	٩٥	٨٦	٣٠

الحل

المنوال = 300 ريال و هي القيمة التي تقابل أكبر تكرار و هو 120 موظف

المنوال من الرسم :-

الأجر	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠
عدد العمال	٥٠	٨٤	١٢٠	١١١	٩٥	٨٦	٣٠



المعدل (المتوسط)	تعريفه	مدى استخدامه	إيجاده	تأثره بالقيم المتطرفة	تأثره بجميع القيم	ميزاته وعيوبه
الوسط الحسابي	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$	الأكثر استخداما	دائما	نعم	نعم	يعمل بكفاءة مع جميع الطرق الإحصائية
الوسيط	القيمة التي تتوسط القيم	غالبا	دائما	لا	لا	غالبا ما يستخدم في حالة وجود قيم متطرقة
المنوال	القيم الأكثر تكرارا	أحيانا	أحيانا لا يوجد وأحيانا أكثر من واحد	لا	لا	صالح للبيانات من المستوى الاسمي

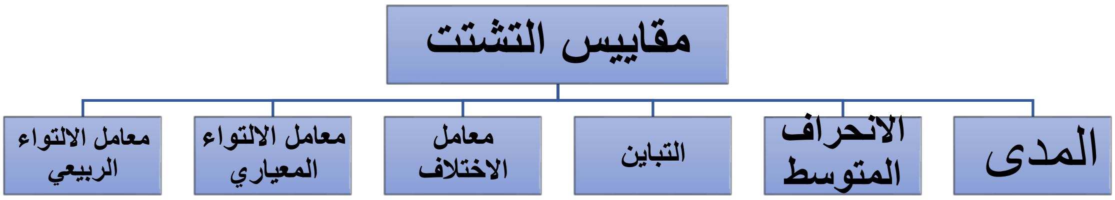
المحاضره التاسعه

تابع جمع البيانات و ترميزها وعرضها

ثالثاً :- مقاييس التشتت :-

إن درجة التباعد أو التقارب بين البيانات تسمى تشتتاً , و تستخدم مقاييس التشتت في المقارنة بين مجموعات البيانات من حيث تشتتها.

كلما قل تشتت البيانات و كلما اقتربت من متوسطها كلما كانت أقرب للتجانس .



1 – المدى :-

أولاً : البيانات غير المبوبة :-

هو الفرق بين أكبر مفردة و أقل مفردة .

مثال :-

البيانات التالية تمثل أسعار مجموعة من تذاكر الطيران من الرياض إلى القاهرة و المطلوب حساب قيمة المدى لأسعار هذه التذاكر :-

1100 , 500 , 675 , 1300 , 968 , 1150

الحل

المدى = 1300 – 500 = 800 ريال

مثال :-

البيانات التالية توضح درجات مقياس الذكاء لمجموعتين من الطلاب و المطلوب المقارنة بين المجموعتين :-

المجموعة الاولى { 100,110,50,90,130,200,160 }

المجموعة الثانية { 150,160,120,100,170,165,155 }

الحل

المدى للمجموعة الاولى = 200 - 50 = 150 درجة

المدى للمجموعة الثانية = 170 – 100 = 70 درجة

إذاً تشتت المجموعة الأولى أكبر من المجموعة الثانية

ثانياً : المدى من البيانات المبوبة :-

المدى = الحد الأعلى للفئة الاخير – الحد الادنى للفئة الاولى

مثال :-

الجداول التالية توضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقررين دراسيين المحاسبة و الاحصاء و المطلوب بيان أي من المقررين أكثر تشتتاً ؟

درجات المحاسبة	10-	20-	30-	40-	50-60
عدد الطلاب	100	120	210	300	150

درجات الاحصاء	50-	55-	60-	65-	70-75
عدد الطلاب	250	310	420	260	100

1- المدى لدرجات المحاسبة = 60 - 10 = 50 درجة .

2- المدى لدرجات الاحصاء =75 - 50 = 25 درجة .

إذا درجات المحاسبة أكثر تشتتاً من درجات الاحصاء

٢- التباين و الانحراف المعياري :-

1 – التباين :-

التباين هو متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي و يرمز له بالرمز σ^2.

2- الانحراف المعياري :-

الجذر التربيعي للتباين و يرمز للانحراف المعياري بالرمز σ.

أولاً التباين و الانحراف المعياري من البيانات غير المبوبة :-

إذا كانت $X_1 . X_2 . \dots \dots \dots . . . X_n$ تمثل n من بيانات المجتمع و لها المتوسط الحسابي μ فإن التباين و الانحراف المعياري يحسبان بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال :-

البيانات التالية توضح أجور اليومية مجموعة من العمال بالريال و المطلوب حساب قيمة التباين و الانحراف المعياري لأجور هؤلاء العمال :-

25 , 30 , 60 , 15 ,50 ,35

الحل :-

x	25	30	60	15	50	35	$\sum x = 215$
x^2	625	900	3600	225	2500	1225	$\sum x^2 = 9075$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{9075}{6} - \left(\frac{215}{6}\right)^2 = 228.47 \text{ ريال}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{228.47} = 15.1153 \text{ ريال}$$

مثال :-

البيانات التالية توضح درجات مجموعة من الطالب في مقرري الاحصاء و بحوث العمليات و المطلوب تقرير أي من درجات المقررين تعتبر أكثر تشتتاً :-

درجات الاحصاء { 13 , 18, 40 , 20 ,45 }

درجات بحوث العمليات { 35 , 40 , 28 ,30 ,48 }

الحل :

درجات الاحصاء x	13	18	40	20	45	136
x^2	169	324	1600	400	2025	4518
درجات بحوث العمليات x	35	40	28	30	48	181
x^2	1225	1600	784	900	2304	6813

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{4518}{5} - \left(\frac{136}{5}\right)^2 = 163.76$ ريال

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{163.76} = 12.797$ درجة

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{6813}{5} - \left(\frac{181}{5}\right)^2 = 52.16$ ريال

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{52.16} = 7.222$ درجة

أي أن درجات الطلاب في مقرر الاحصاء أكثر تشتتاً من درجات بحوث العمليات

ثانياً : التباين و الانحراف المعياري من البيانات المبوبة :-

إذا كانت بيانات الظاهرة ، مبوبة في جدول توزيع تكراري ، فإن الانحراف المعياري يحسب بتطبيق المعادلة التالية :-

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال :-

الجدول التالي يتضمن فئات الانفاق الشهري للأسرة و المطلوب حساب الانحراف المعياري و التباين :-

فئات الانفاق	عدد الاسر
50 -	120
60 -	140
70 -	160
80 -	180
90 - 100	150
المجموع	750

الحل:

فئات الانفاق	عدد الاسر f	مركز الفئة x	f x	f²x
50 -	120	55	6600	363000
60 -	140	65	9100	591500
70 -	160	75	12000	900000
80 -	180	85	15300	1300500
90 - 100	150	95	14250	1353750
المجموع	750		57250	4508750

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{4508750}{750} - \left(\frac{57250}{750}\right)^2 = 184.8889$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 13.5974$$

مثال :-

الجدول التالي يتضمن فئات الاجر الشهري لمجموعة من العاملين و المطلوب حساب الانحراف المعياري والتباين :-

فئات الانفاق	عدد الاسر
100 -	55
200 -	65
300 -	80
400 -	75
500 - 600	35
المجموع	310

الحل

فئات الانفاق	عدد الاسر f	مركز الفئة x	f x	f²x
100 -	55	150	8250	1237500
200 -	65	250	16250	4062500
300 -	80	350	28000	9800000
400 -	75	450	33750	15187500
500 - 600	35	550	19250	10587500
المجموع	310		105500	40875000

$$\text{ريال } \sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{40875000}{310} - \left(\frac{105500}{310}\right)^2 = 16035.38$$

$$\text{ريال} \sigma = \sqrt{\sigma^2} = 126.6309$$

٣- معامل الاختلاف المعياري :-

هو معامل نسبي يستخدم للمقارنة بين تشتت ظاهرتين أو أكثر مختلفتين في وحدة القياس أو في القيمة المتوسطة لهما. والظاهرة التي معامل اختلافها أكبر تكون أكثر تشتتاً من الأخرى. ويرمز له بالرمز c.v.(x) .

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$$

مثال :-

في دراسة لمستوى أداء طلاب التعليم عن بعد في مقررين وهما مقرر المحاسبة و الاحصاء تم تجميع البيانات التالية :-

المقرر	المقاييس الوصفية لاختبار مستوى الطلاب	
	الوسط الحسابي $\bar{X}$	الانحراف المعياري σ
المحاسبة	70	5
الاحصاء	80	8

المطلوب : أي من المقررين أكثر تشتتاً ؟

الحل :

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$$

$$C.V\ 1 = \frac{5}{70} \times 100 = 7.143\%$$

$$C.V\ 2 = \frac{8}{80} \times 100 = 10\%$$

بما أن معامل الاختلاف لدرجات الطلاب في مقرر الاحصاء أكبر من معامل الاختلاف بالنسبة لدرجات الطلاب في مقرر المحاسبة فيمكن القول أن التشتت النسبي لدرجات الاحصاء أكبر من المحاسبة أي أن درجات المحاسبة أكثر تجانساً من درجات الاحصاء .

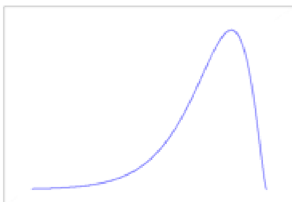
٤- معامل الالتواء :-

هو درجة بُعد المنحنى التكراري عن التماثل. ويقصد بالتماثل أنه إذا أسقطنا عموداً من قمة المنحنى التكراري وقسمه إلى قسمين منطبقين يكون التوزيع متماثلاً. والعكس فيكون التوزيع غير متماثل أي ملتو إما إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار.

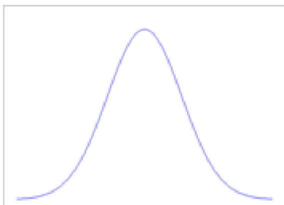
معامل الالتواء = صفر يعني أن المنحنى الاعتدالي متماثل أي إذا قسمنا هذا المنحنى قسمين فإنهما يكونا متماثلان تماما، ويسمى لذلك توزيع اعتدالي. أما إذا انحرف المنحنى نحو القيم الكبيرة (جهة اليمين) فيوصف بأنه موجب الالتواء، وإذا انحرف نحو القيم الصغيرة (جهة اليسار) فيوصف بأنه سالب الالتواء.

يمكن الاستفادة من هذا التعريف في ناحيتين:

- معرفة نوع الالتواء موجب أو سالب على حسب الإشارة.
- المقارنة بين توزيعين تكرارين . المجموعة التي لها معامل التواء أكبر يكون توزيعها ملتوياً أكثر.



التوزيع غير متماثل
وملتو من جهة اليسار
معامل الالتواء = قيمة سالبة



التوزيع متماثل
معامل الالتواء = 0

التوزيع غير متماثل
وملتو من جهة اليمين
معامل الالتواء = قيمة موجبة

١- معامل الالتواء المعياري :-

$$\text{معامل الالتواء المعياري} = \frac{3(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

الناتج :-

1- صفر أو يقترب من الصفر إذا فالتوزيع معتدل أو متماثل أو طبيعي .

2- موجب إذا التوزيع ملتوي جهة اليمين .

3- سالب إذا التوزيع ملتوي جهة اليسار .

مثال :-

إذا كان متوسط درجات الطلاب في مقرر الاحصاء 85 درجة و ذلك بانحراف معياري قدره 10 درجات فإذا علمت أن قيمة وسيط الدرجات لهذا المقرر هو 80 درجة المطلوب حساب معامل الالتواء المعياري لدرجات الطلاب في هذا المقرر ؟

الحل

معامل الالتواء المعياري = $\frac{3(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$

عامل الالتواء المعياري = $\frac{3\times(85-80)}{10} = 1.5$

حيث أن الناتج قيمة موجبة إذا فهذا التوزيع ملتوي جهة اليمين .

مثال :-

البيانات التالية توضح مجموعة من المقاييس الاحصائية للأجور الشهرية لعينتين من العاملين أحدهما في قطاع التعليم و الاخرى في القطاع الصناعي :-

العاملين في قطاع	الربيع الأدنى	الوسيط	الربيع الأعلى
التعليم	110	500	900
الصناعي	250	850	1100

المطلوب :-

باستخدام معامل الالتواء الربيعي قارن بين نوع كل من التوزيعين .

1- معامل الالتواء الربيعي للعاملين في قطاع التعليم =

معامل الالتواء $= \frac{(900-500)-(500-110)}{(900-110)} = 0.01$

محذوفه ..

يتضح من النتائج السابقة أن قيمة معامل الالتواء تقترب من الصفر و لذلك فيمكن اعتبار أن هذا التوزيع متماثل .

2- معامل الالتواء الربيعي للعاملين في القطاع الصناعي =

معامل الالتواء $= \frac{(1100-850)-(850-250)}{(1100-250)} = -0.41176$

يعتبر التوزيع السابق توزيع ملتوي جهة اليسار.

المحاضره العاشره

مقدمة الى الارتباط

مفهوم الارتباط

الارتباط هو علاقة بين متغيرين يمثل كل متغير ظاهرة معينة فإن تغيرت إحدى الظاهرتين في اتجاه معين فالثانية تتغير في اتجاه الأولى أو في اتجاه معاكس للأولى.

الارتباط البسيط

الارتباط بين متغيرين أو ظاهرتين فقط

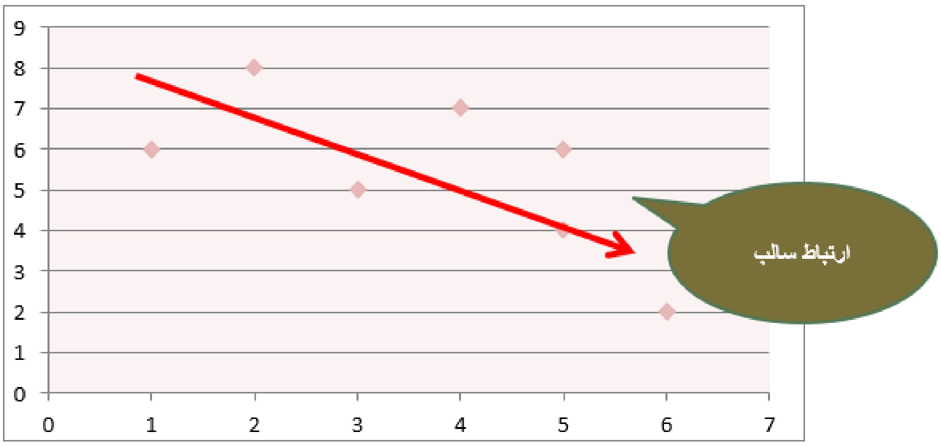
قام باحث بدراسة تأثير الانترنت على التواصل الاجتماعي عند الأطفال فحصل على البيانات التالية

الطفل	استخدام الانترنت x	التواصل الاجتماعي y
A	3	5
B	5	6
C	5	4
D	4	7
E	2	8
F	1	6
G	6	2

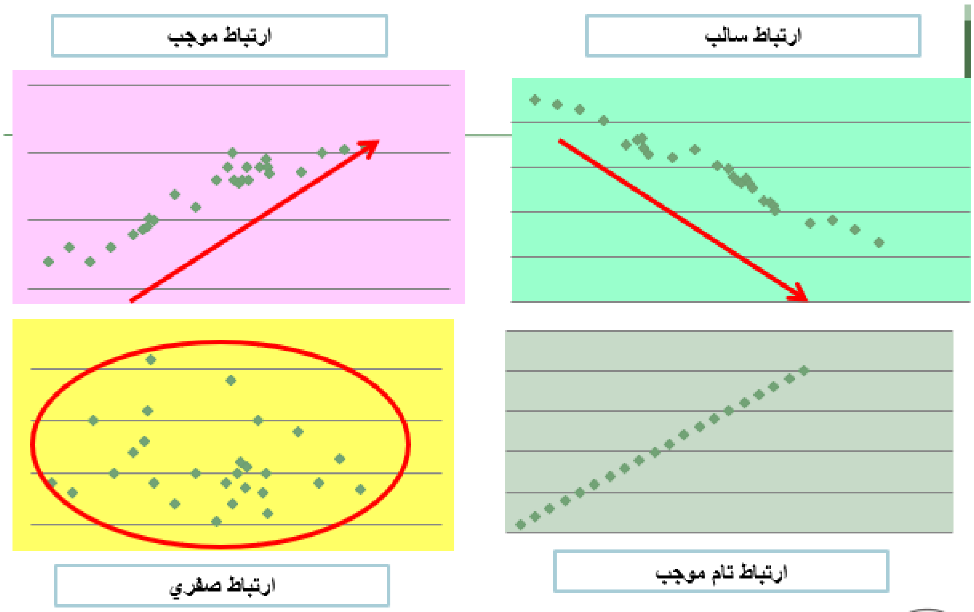
لدراسة العلاقة بين المتغيرين و تحديد طبيعتها نحتاج لحساب نوع خاص من المعاملات يقيس مدى الارتباط بين الظاهرتين

شكل الانتشار

رسم كل زوج من القراءات المناظر لكل مفردة من المفردات



الارتباط الموجب (الطردي)	علاقة بين المتغيرين (x,y) بحيث إذا تغير أحدهما فإن الأخر يتبعه في نفس الاتجاه
الارتباط السالب (العكسي)	علاقة بين المتغيرين (x,y) بحيث إذا تغير أحدهما فإن الأخر يتبعه في اتجاه مضاد
الارتباط الصفري	الارتباط الذي تقترب قيمته من الصفر ، عندما لا يوجد ارتباط بين المتغيرين
الارتباط التام	الارتباط الذي يكون شكل الانتشار له عبارة عن خط مستقيم



قياس الارتباط

تستخدم معاملات الارتباط لقياس درجة الارتباط بين متغيرين

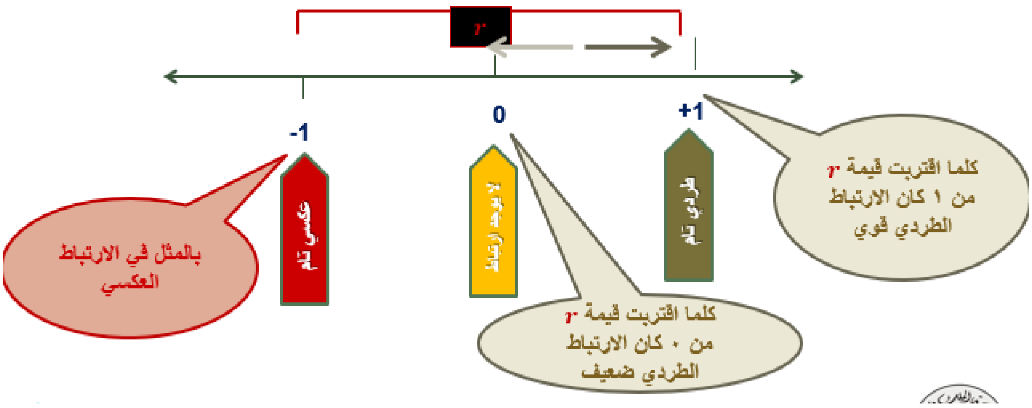
معامل الارتباط

مقياس رقمي يقيس قوة و نوع الارتباط بين متغيرين.

و يرمز له بالرمز r

لاحظ أن ...

- $-1 \le r \le +1$
- الاشارة الموجبة تدل على أن الارتباط طردي.
- الاشارة السالبة تدل على أن الارتباط عكسي.



الجدول التالي قاعدة لتفسير معامل الارتباط

قيمة معامل الارتباط	المعنى
+1	ارتباط طردي تام
من ٠,٧٠ إلى ٠,٩٩	ارتباط طردي قوي
من ٠,٥٠ إلى ٠,٦٩	ارتباط طردي متوسط
من ٠,٠١ إلى ٠,٤٩	ارتباط طردي ضعيف
0	لا يوجد ارتباط

يمكن تفسير الارتباط العكسي بنفس الطريقة مع المعاملات السالبة

معامل بيرسون العزومي للارتباط الخطي

إذا كان لدينا n من البيانات في المتغيرين X . Y

فإن معامل بيرسون للارتباط الخطي يحسب بالعلاقة :

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{(n-1)S_X S_Y}$$

حيث $\bar{Y}$. $\bar{X}$الوسط الحسابي

و $S_X . S_Y$ الانحراف المعياري

إذا كان لدينا n من البيانات في المتغيرين Y , X

فإن معامل بيرسون للارتباط الخطي يحسب بالعلاقة :

$$r_p = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

إذا كان لدينا n من البيانات في المتغيرين Y , X

فإن معامل بيرسون للارتباط الخطي يحسب بالعلاقة :

$$r_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\sum X_i{}^2 - n\bar{X}^2}\sqrt{\sum Y_i{}^2 - n\bar{Y}^2}}$$

مثال

سجلت درجات الطلاب في مقرري الرياضيات و الإحصاء كما في الجدول التالي

15	11	10	12	١٩	٢٠	درجات الرياضيات x
15	6	10	15	22	٢٥	درجات الإحصاء y

ادرس وجود علاقة ارتباط بين درجات الطلاب في المقررين.

x	y	xy	x^2	y^2
20	25	٥٠٠	٤٠٠	٦٢٥
19	22	٤١٨	٣٦١	٤٨٤
12	15	١٨٠	١٤٤	٢٢٥
10	10	١٠٠	١٠٠	١٠٠
11	6	٦٦	١٢١	٣٦
15	15	٢٢٥	٢٢٥	٢٢٥
٨٧	٩٣	١٤٨٩	١٣٥١	١٦٩٥

$$r_p = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

$$= \frac{6(1489) - (87)(93)}{\sqrt{[(6 \times 1351) - (87)^2][(6 \times 1695) - (93)^2]}}$$

$$= \frac{8934 - 8091}{\sqrt{[8106 - 7569][10170 - 8649]}} = \frac{843}{\sqrt{537 \times 1521}} = \frac{843}{903.757} = 0.933$$

يوجد ارتباط طردي قوي بين درجات الطلاب في الرياضيات و الإحصاء

مثـــــال /

لدراسة العلاقة بين الدخل x و الاستهلاك y بمئات الريالات في مدينة ما ، أخذت عينة من الأسر فأعطت النتائج التالية:

x	5	4	6	10	9
y	5	4	5	6	6

احسب معامل بيرسون للارتباط الخطي.

	x	y	xy	x^2	y^2
	5	5	٢٥	٢٥	٢٥
	4	4	١٦	١٦	١٦
	6	5	٣٠	٣٦	٢٥
	10	6	٦٠	١٠٠	٣٦
	9	6	٥٤	٨١	٣٦
∑	34	26	185	258	138

$$r_p = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

$$= \frac{5(185) - (34)(26)}{\sqrt{[(5 \times 258) - (34)^2][(5 \times 138) - (26)^2]}}$$

$$= \frac{925 - 884}{\sqrt{[1290 - 1156][690 - 676]}} = \frac{41}{\sqrt{134 \times 14}} = \frac{41}{\sqrt{1876}} \approx \frac{41}{43.313} \approx 0.947$$

الارتباط الخطي بين دخل الأسر و استهلاكها طردي قوي

لدراسة العلاقة بين تقدير الطالب في الإحصاء و تقديره في الرياضيات ، اخترنا أربع طلاب و كانت تقديراتهم كالتالي:

تقدير الإحصاء X	C	D	F	A
تقدير الرياضيات y	C	B	D	A

هل يمكن حساب معامل بيرسون..؟

لا يمكن لأن المتغيرات ليست كمية

معامل سبيرمان لارتباط الرتب ...؟

يستخدم لقياس الارتباط بين المتغيرين إذا كان كلاهما قابل للترتيب ،حيث يتم فيه استبدال البيانات بإعطائها رتب محددة

إذا كان المتغير x له الرتب R_x و المتغير Y له الرتب R_y .

و كان $d = R_x - R_y$.

فإن معامل سبيرمان لارتباط الرتب يعطى بالعلاقة:

$$r_S = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

مثـــال

أوجد معامل الارتباط بين تقدير الطلاب في الإحصاء و تقديرها في الرياضيات كما هو موضح في الجدول

تقدير الإحصاء X	C	D	F	A
تقدير الرياضيات y	C	B	D	A

نكون الجدول

x	y	رتب x	رتب y	d	d^2
C	C	2	3	-1	1
D	B	3	2	1	1
F	D	4	4	0	0
A	A	١	1	0	0
∑					2

$$r_S = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_S = 1 - \frac{6 \times 2}{4(4^2-1)} = 1 - \frac{12}{4 \times 15} = 1 - \frac{12}{60} = 0.8$$

الارتباط
طردي
قوي

يمكن اعادة حل المثال السابق باستخدام معامل سبيرمان

مثـــال /

سجلت درجات الطلاب في مقرري الرياضيات و الإحصاء كما في الجدول التالي

درجات الرياضيات x	٢٠	١٩	12	10	11	15
درجات الإحصاء y	٢٥	22	15	10	6	15

ادرس وجود علاقة ارتباط بين درجات الطلاب في المقررين.

نعطي كل درجة رتبة بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً

درجات الرياضيات x	٢٠	١٩	15	12	11	10
رتب x	1	2	3	4	5	6
درجات الإحصاء y	٢٥	22	15	15	10	6
نعطي كل منها رتبة و كأنها مختلفة	1	2	3	4	5	6
رتب y	1	2	3.5	3.5	5	6

نأخذ المتوسط لرتب البيانات المكررة

$$\frac{3+4}{2} = 3.5$$

x	y	رتب x	رتب y	d	d^2
20	25	1	1	0	0
19	22	2	2	0	0
12	15	4	3.5	0.5	0.25
10	10	6	5	1	1
11	6	5	6	-1	1
15	15	3	3.5	-0.5	0.25
المجموع					2.5

$$r_S = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_S = 1 - \frac{6 \times 2.5}{6(6^2-1)} = 1 - \frac{15}{6 \times 35} = 1 - \frac{15}{210}$$
$$= 0.928 \approx 0.93$$

الارتباط
طردي
قوي

مثـــــال /

في دراسة لمعرفة العلاقة بين عدد حقول النفط المكتشفة و طول الأنابيب بالكيلومتر الناقلة للنفط خلال عدة سنوات ، سجلت ٦ قراءات . و المطلوب ايجاد معامل الارتباط.

عدد حقول النفط x	55	54	56	61	62	63
طول الأنابيب y	21906	22300	23100	23203	23200	23600

يمكن استخدام معامل بيرسون لأن المتغيرين كميين و لكن لوجود أرقام كبيرة نستخدم معامل سبيرمان

x	y	رتب x	رتب y	d	d^2
٥٥	21906	2	1	1	1
٥٤	22300	1	2	-1	1
٥٦	23100	3	3	0	0
٦١	23203	4	5	-1	1
٦٢	23200	5	4	1	1
٦٣	23600	6	6	0	0
$\sum$					4

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6\times 4}{6(6^2-1)} = 1 - \frac{24}{6\times 35} = 1 - \frac{24}{210} = 1 - 0.114 = 0.886$$

الارتباط طردي قوي

ملاحظات على معامل سبيرمان

- **يمكن استخدامه للبيانات الكمية أو للبيانات الوصفية الترتيبية.**
- **يتميز بسهولة حسابه.**
- **من عيوبه إهماله للفروق بين الأعداد عند حساب الرتب و بالتالي فهو أقل دقة.**
- **يصعب حسابه للبيانات الكمية إذا كانت كبيرة العدد و لذا يفضل استخدامه إذا كانت البيانات الكمية أقل من ٣٠.**

3 - معامل الاقتران (فاي)

- **معامل اقتران "فاى" يستخدم لقياس العلاقة بين متغيرين اسميين كل منهما ثنائي التقسيم، كالنوع (ذكر/أنثى) والإصابة بالمرض (مصاب/غير مصاب) والتدخين (مدخن/غير مدخن)...الخ.**

X / Y	X_1	X_2	المجموع
Y_1	a	b	a+b
Y_2	c	d	c+d
المجموع	a+c	b+d	

معامل فاي للاقتران يعطى في الصورة التالية :

$$r_\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}}$$

مثال :

أوجد قيمة معامل الاقتران بين النوع x (ذكر/ أنثى) والإصابة بمرض الاكتئاب Y

(مصاب/ غير مصاب) حسب البيانات التالية :

الاكتئاب / النوع	مصاب	غير مصاب
ذكر	12	8
أنثى	4	6

الحل :

نوجد أولاً **<u>المجاميع الهامشية</u>** كما في الجدول التالي :

وعليه فإن :

a= 12

b = 8

c = 4

d = 6

الاكتئاب / النوع	مصاب	غير مصاب	المجموع
ذكر	12 a	8 b	20
أنثى	4 c	6 d	10
المجموع	16	14	30

$$r_\phi = \frac{(ad)-(bc)}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} = \frac{(12\times 6)-(8\times 4)}{\sqrt{20\times 10\times 16\times 14}}$$

$$= \frac{72-32}{\sqrt{44800}} = \frac{40}{211.66} \approx 0.19$$

أي أنه توجد علاقة ضعيفة بين النوع والإصابة بمرض الاكتئاب .

المحاضره الحاديه عشر

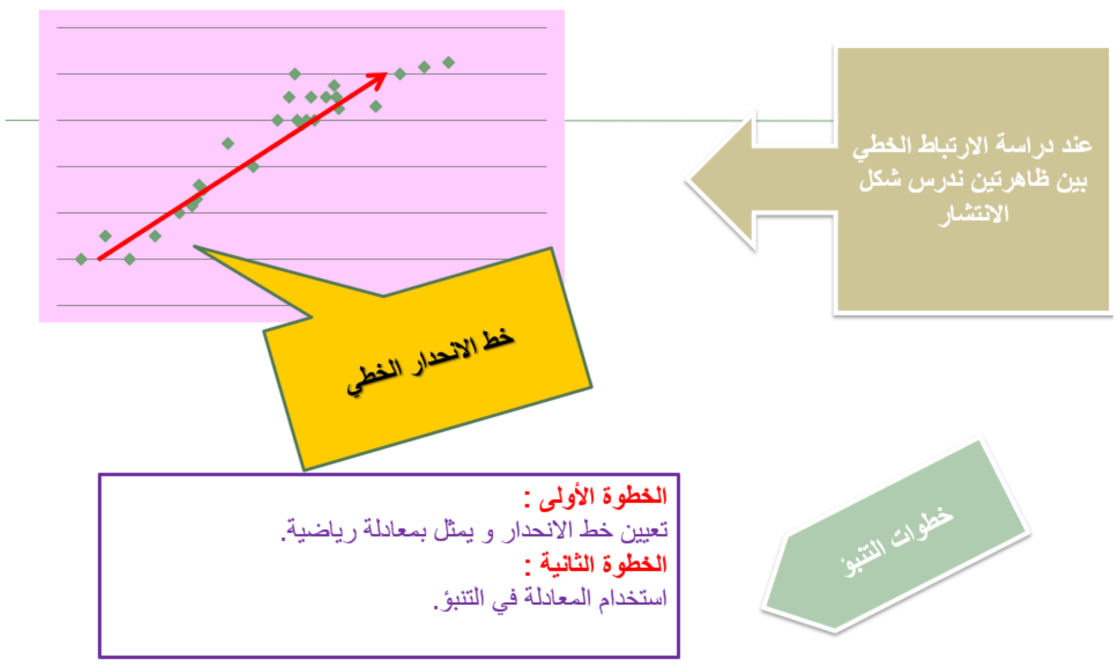
مقدمة الى الانحدار

الانحدار

- *والانحدار* هو أسلوب يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر عن طريق معادلة الانحدار

$$\hat{y} = a + bx$$

- الانحدار الخطي البسيط : فكلمة " بسيط " تعني أن المتغير التابع Y يعتمد على متغير مستقل واحد وهو X وكلمة " خطي" تعني أن العلاقة بين المتغيرين (X , Y) علاقة خطية.



الانحدار الخطي البسيط

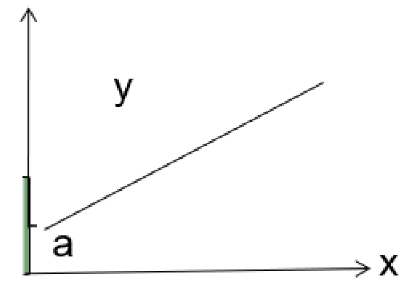
- بعد تمثيل الأزواج المرتبة بالمستوى نحصل على شكل الانتشار فإذا أظهر الشكل الانتشاري للبيانات أن هناك علاقة خطية بين المتغيرين نقوم بتقدير خط الانحدار بواسطة العلاقة:

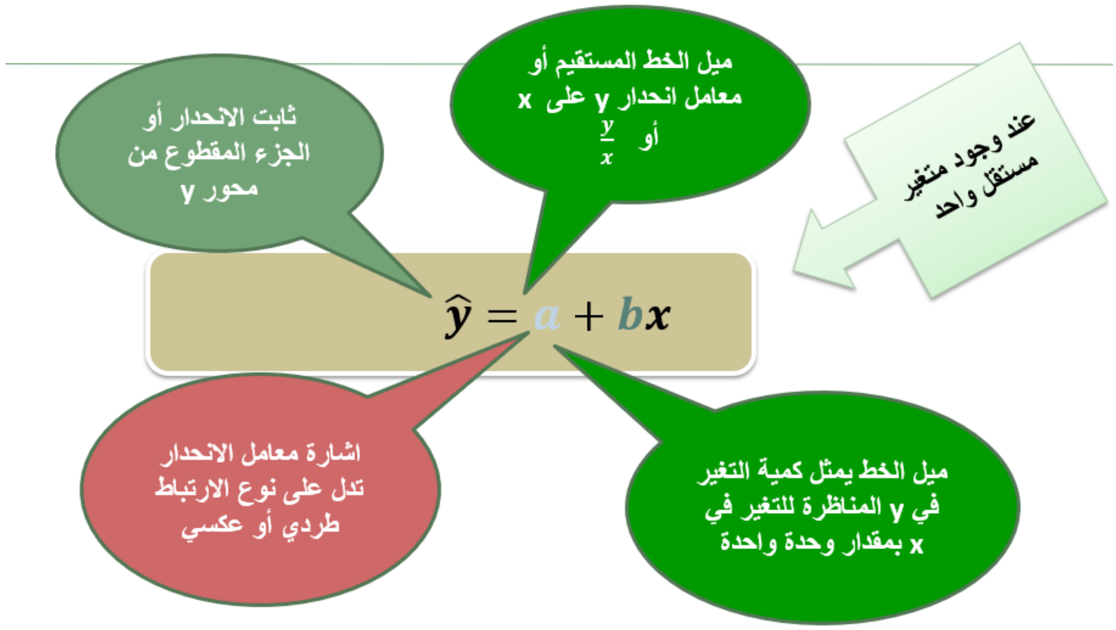
$$\hat{y} = a + bx$$

حيث a : ثابت الانحدار أو الجزء المقطوع من محور y

b : ميل الخط المستقيم أو <u>معامل انحدار</u>

$$\hat{y} = a + bx$$





لإيجاد قيمة a و b

$$b = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n}$$

- **مثال :**

لدراسة علاقة الاستهلاك المحلي (y)بالإنتاج (x)لمادة الإسفلت (بالمليون برميل) خلال عدة سنوات، أخذنا عشر قراءات تقريبية كما يلي :

y	6	8	9	8	7	6	5	6	5	5
x	10	13	15	14	9	7	6	6	5	5

أوجدي معادلة الانحدار الخطي البسيط، وتوقعي قيمة الاستهلاك عندما يصل إنتاج ١٦ مليون برميل .

	x	y	xy	x^2
	10	6	60	100
	13	8	104	169
	15	9	135	225
	14	8	112	196
	9	7	63	81
	7	6	42	49
	6	5	30	36
	6	6	36	36
	5	5	25	25
	5	5	25	25
$\sum$	90	65	632	942
	$=\sum x$	$=\sum y$	$=\sum xy$	$=\sum x^2$

$$b = \frac{n\sum xy-(\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2-(\sum x)^2} = \frac{6320-(90)(65)}{9420-90^2} = \frac{6320-5850}{9420-8100} = \frac{470}{1320} = 0.36$$

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n} = \frac{65-(0.36\times 90)}{10} = 3.26$$

∴معادلة خط الانحدار البسيط في هذه الحالة :

$$\hat{y} = 3.26 + 0.36\,x$$

- **ولتوقع قيمة الاستهلاك المحلي عندما يصل الإنتاج 16 مليون برميل،**
- **وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن:**

$$x = 16$$

$$\hat{y} = a + bx$$

$$= 3.26 + (0.36\times 16) = 9.02$$

أي أن الاستهلاك قد يصل إلى 9.02 مليون برميل خلال السنة.

مثـــــال

سجلت درجات الطلاب في مقرري الرياضيات و الإحصاء كما في الجدول التالي

درجات الرياضيات x	٢٠	١٩	12	10	11	15
درجات الإحصاء y	٢٥	22	15	10	6	15

أوجد تقديراً لدرجة الطالب في الإحصاء إذا كانت درجته في الرياضيات = ١٨

$$b = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b = \frac{6(1489) - (87)(93)}{6(1351) - (87)^2} = \frac{8934 - 8091}{8106 - 7569}$$

$$= \frac{843}{537} = 1.57$$

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n}$$

$$a = \frac{93 - 1.57 \times 87}{6}$$

$$= \frac{93 - 136.59}{6} = -7.27$$

معادلة الانحدار الخطي البسيط

$$\hat{y} = -7.27 + 1.57x$$

عندما تكون درجة الطالب في الرياضيات = ١٨

$$x = 18$$

نعوض في معادلة الانحدار الخطي

$$y = -7.27 + 1.57(18)$$

$$= 20.99 \approx 21$$

يتوقع أن تكون درجة الطالب في الإحصاء حوالي ٢١

مثـــــال

أخذت عينة عشوائية مؤلفة من ١٢ زوج (x,y) فأعطت النتائج التالية:

$\sum X$	$\sum Y$	$\sum XY$	$\sum X^2$	$\sum Y^2$
300	342	9020	8040	11380

- **أوجد خط الانحدار للعلاقة.**
- **أوجد قيمة تقديرية لـ Y إذا كانت X=30**

المحاضره الثانيه عشر

الارقام القياسية

تعريف الأرقام القياسية:

الرقم القياسي هو مؤشر إحصائي (رقم نسبي) يستخدم في قياس التغير النسبي الذي طرأ على ظاهرة من الظواهر الاقتصادية أو الاجتماعية، وذلك وفقا لأساس معين سواء كان هذا الأساس فترة زمنية معينة أو مكانا معينا

فترة الأساس

الأساس هو فترة زمنية معينة أو مكانا معينا، وعادة تكون فترة الأساس فترة سابقة للفترة التي نريد مقارنتها (وفي حالات نادرة جدا قد تكون فترة الأساس فترة لاحقة لفترة المقارنة)

ويجب أن تمتاز فترة الأساس بما يلي :

- الاستقرار الاقتصادي
- الخلو من العوامل المؤثرة على الأسعار (الحروب)
- البعد عن سنوات المقارنة

أما عند اختيار مكان الأساس لابد أن يكون لهذا المكان أهمية خاصة وأن يكون مركزا أساسيا لإنتاج السلعة المراد استخراج الرقم القياسي لها

الأرقام القياسية للأسعار Price Index Numbers

تعتبر الأرقام القياسية للاسعار من أهم أنواع الأرقام القياسية وأكثرها شيوعا.

ومن أشهرها:

- مؤشر أسعار المستهلكين Consumer Price Index ويرمز له (CPI)
- مخفض الناتج القومي الإجمالي Gross National Product Deflator
- مؤشر اسعار المنتجين Producer Price Index ويرمز له (PPI)
- مخفض الناتج المحلي الإجمالي Gross Domestic Product Deflator

أمثلة على بعض الأرقام القياسية للاسعار في النظام الاقتصادي السعودي

يهتم النظام الاقتصادي السعودي بنشر الأرقام القياسية للاسعار وتكالبف المعيشة على شكل تقارير شهرية،

ومن هذه الأرقام مايلي:

- الرقم القياسي لتكاليف المعيشة لمتوسطي الدخل
- الرقم القياسي لتكاليف المعيشة لجميع السكان
- الرقم القياسي لأسعار الجملة

دور الأرقام القياسية في حساب معدلات التضخم

المقصود بالتضخم هو الارتفاع المستمر في المستوى العام للاسعار والذي على ضوئه تنخفض القيمة الشرائية للوحدة النقدية (الريال مثلا)

ويتم حساب معدل التضخم السنوي وذلك من خلال العلاقة التالية:

$$i_{2010} = \frac{CPI_{2010} - CPI_{2009}}{CPI_{2009}}(100)$$

حيث :

i_{2010} = معدل التضخم في سنة ٢٠١٠م

CPI_{2009} = مؤشر أسعار المستهلكين في سنة٢٠٠٩م

CPI_{2010} = مؤشر أسعار المستهلكين في سنة ٢٠١٠م

مثال

إذا افترضنا أن مؤشر اسعار المستهلكين في المملكة لسنة 2006م=120 وسنة 2007م=123 ، ما هو معدل التضخم في سنة 2007م

فوائد الأرقام القياسية واستعمالاتها :

- قياس التغير الذي يطرأ على الحياة بمجملها بشكل عام والجوانب الاقتصادية بشكل خاص.
- تحليل العوامل التي تساهم في تغير الظاهرة فتبين مدى مساهمة كل من هذه العوامل في إحداث التغير الكلي.
- الرقابة على تنفيذ الخطط .

الرقم القياسي المرجح

وهو ذلك الرقم الذي يأخذ الأهمية النسبية للسلعة أو الأجر بعين الاعتبار فيعطي كل سلعة (أجر) وزنا يتلاءم مع أهميته، فعند تركيب رقم قياسي للكميات يجب ترجيحه بالأسعار، وعند تركيب رقم قياسي للأسعار يجب ترجيحه بالكميات وبالتالي يكون الناتج رقما قياسيا مرجحا.

منسوب السعر لسلعة واحدة (ظاهرة بسيطة):

يمكن إيجاد رقم قياسي لسعر سلعة بمفردها، ويسمى الرقم القياسي للسعر بمنسوب السعر ويرمز له بالرمز Pr ويمكن حسابه بالطريقة التالية :

$$P_r = \frac{P_1}{P0}(100)$$

حيث أن:

P_r = منسوب السعر

P_1 = السعر سنة المقارنة

P_0 = السعر سنة الاساس

مثال :

إذا كانت لدينا البيانات التالية والممثلة لسعر سلعة معينة من الفترة 2006م وحتى 2010م .

السنة	سعر السلعة بالريال
2006	25
2007	30
2008	24
2009	32
2010	36

المطلوب:

إيجاد منسوب السعر لهذه السلعة للفترة من سنة 2006م حتى سنة 2010م باعتبار سنة 2006م سنة أساس، مع تفسير النتائج التي يتم الحصول عليها .

منسوب السعر لمجموعة من السلع-التجميعية (ظاهرة معقدة) :

إذا كانت لدينا عدة سلع متغيرة ونرغب حساب منسوب السعر أو الرقم القياسي لها، ففي هذه الحالة لابد أن يدخل في الحساب جميع قيم السلع التي تتألف منها الظاهرة ويتم ذلك من خلال استخدام الطرق التالية:

- الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار
- الرقم القياسي التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير)
- الرقم القياسي التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (رقم باش)
- الرقم القياسي التجميعي المرجح بكميات سنة الأساس وسنة المقارنة (رقم فيشر)

المحاضره الثالثه عشر

مدخل الى SPSS

قياس الارتباط وتحليل الانحدار

مقاييس الإرتباط: تستخدم لقياس مدى العلاقة التي تربط بين متغيرين بحيث أن ازدياد أحدها يؤدي إلى نقصان الاخر

مثال:

الطول	160	170	175	167	164	169
الوزن	56	67	69	64	63	65

نلاحظ من الجدول السابق أن هناك علاقة بين بيانات الطول والوزن بحيث كلما زاد الطول زاد الوزن.

<u>معاملات الارتباط:</u>

Pearson معامل ارتباط بيرسون

Spearman معامل ارتباط سبيرمان

<u>لإيجاد معامل الارتباط بين متغيرين:</u>

- لإيجاد معامل الارتباط بين متغيرين:

١. من قائمة Analyze اختر الأمر Correlate
٢. ثم Bivariate
٣. من الشكل الظاهر حدد المتغيرين المراد قياس العلاقة بينهما في القائمة Variables.
٤. اختر معاملات الارتباط من صناديق الفحص في الأسفل Pearson و Spearman

- <u>ملاحظة: قد تتساوى قيم معاملات الارتباط وقد تختلف لكن من الضروري أن تكون متقاربة.</u>

Correlations

Correlations

		Height	Weigt
Height	Pearson Correlation	1	.970**
	Sig. (2-tailed)		.000
	N	12	12
Weigt	Pearson Correlation	.970**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	N	12	12

**. Correlation is significant at the 0.01 level

Nonparametric Correlations

Correlations

			Height	Weigt
Spearman's rho	Height	Correlation Coefficient	1.000	.989**
		Sig. (2-tailed)	.	.000
		N	12	12
	Weigt	Correlation Coefficient	.989**	1.000
		Sig. (2-tailed)	.000	.
		N	12	12

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Correlations

		Grade	Absent
Grade	Pearson Correlation	1	-.977**
	Sig. (2-tailed)		.000
	N	12	12
Absent	Pearson Correlation	-.977**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	N	12	12

**. Correlation is significant at the 0.01 level

Correlations

			Grade	Absent
Spearman's rho	Grade	Correlation Coefficient	1.000	-.989**
		Sig. (2-tailed)	.	.000
		N	12	12
	Absent	Correlation Coefficient	-.989**	1.000
		Sig. (2-tailed)	.000	.
		N	12	12

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Correlations

		Weigt	Grade
Weigt	Pearson Correlation	1	-.108
	Sig. (2-tailed)		.738
	N	12	12
Grade	Pearson Correlation	-.108	1
	Sig. (2-tailed)	.738	
	N	12	12

Correlations

			Weigt	Grade
Spearman's rho	Weigt	Correlation Coefficient	1.000	-.126
		Sig. (2-tailed)	.	.697
		N	12	12
	Grade	Correlation Coefficient	-.126	1.000
		Sig. (2-tailed)	.697	.
		N	12	12

Correlations

		Height	Absent
Height	Pearson Correlation	1	.226
	Sig. (2-tailed)		.481
	N	12	12
Absent	Pearson Correlation	.226	1
	Sig. (2-tailed)	.481	
	N	12	12

Correlations

			Height	Absent
Spearman's rho	Height	Correlation Coefficient	1.000	.188
		Sig. (2-tailed)	.	.560
		N	12	12
	Absent	Correlation Coefficient	.188	1.000
		Sig. (2-tailed)	.560	.
		N	12	12

معادلة الانحدار (تحليل الانحدار)

- في حال كان الارتباط بين متغيرين قوي جدا، فإن هذا يعني أننا نستطيع معرفة قيمة متغير باستخدام قيمة المتغير الاخر.
- الصيغة العامة لمعادلة الانحدار:

Y = a * X + b

- Y, X هما متغيرين بينهما علاقة قوية طردية أو عكسية.
- a, b هما أرقام ثابتة يتم حسابها باستخدام برنامج SPSS.
- من المعادلة السابقة، يبين لنا أن المتغير Y هو متغير تابع تعتمد قيمته على المتغير المستقل X.
- المتغير التابع Dependent: هو المتغير المطلوب حساب قيمته باستخدام معادلة الانحدار. أي المتغير الذي يظهر على يسار إشارة المساواة.
- المتغير المستقل Independent: هو المتغير الذي تستخدم قيمه لمعرفة قيم متغير اخر. أي المتغير الذي يظهر على يمين إشارة المساواة.
- مثال: Height = 3 * Weight + 10
- المتغير Height هو المتغير التابع Dependent
- المتغير Weight هو المتغير المستقل Independent
- الثابت (a) هو 3
- الثابت (b) هو 10

إذا كانت معادلة الانحدار للمتغير Height هي:

Height = 3 * Weight - 25

فما هو الطول التقريبي لشخص وزنه 70؟

الحل: Height = 3 * 70 - 25

Height = 185

- إذا عدنا للبيانات الأصلية ووجدنا أن الطول الحقيقي لهذا الشخص هو 180، فكم يبلغ الخطأ في التقدير؟

الحل: الخطأ في التقدير هو الفرق بين القيمة الحقيقية و القيمة التقديرية

الخطأ في التقدير = ١٨٥ – ١٨٠ = ٥

إذا كانت معادلة الانحدار للمتغير Grade هي:

Grade = -7 * Absent + 91

وكان أحد الطلاب قد غاب 3 أيام وكانت علامته نهاية الفصل 75. فما هي العلامة التقديرية للطالب وما هو مقدار الخطأ في التقدير؟

الحل: العلامة التقديرية: Grade = -7 * 3 + 91

Grade = 70

الخطأ في التقدير: 75 – 70 = 5

- كل ما ينقص لإنشاء معادلة انحدار هو قيم الثوابت a, b والتي نستطيع معرفتها باستخدام SPSS

١. من قائمة Analyze إختر الأمر Regression

٢. ثم Linear

٣. حدد المتغير التابع Dependent والمتغير المستقل Independent

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.977ª	.955	.951	3.266

a. Predictors: (Constant), Absent

ANOVAᵇ

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2266.250	1	2266.250	212.461	.000ª
	Residual	106.667	10	10.667		
	Total	2372.917	11			

a. Predictors: (Constant), Absent

b. Dependent Variable: Grade

Coefficientsª

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	96.333	1.623		59.367	.000
	Absent	-7.000	.480	-.977	-14.576	.000

a. Dependent Variable: Grade

ملاحظات هامة

- يظهر ثلاث جداول كل منها يحتوي معلومات عن المعادلة.
- من الجدول الأول ومن العمود R نستطيع معرفة قيمة معامل الارتباط Pearson.
- من أسفل الجدول الثاني تظهر ملاحظتين، الأولى تحدد اسم المتغير المستقل والثانية تحدد المتغير التابع.
- العمود B في الجدول الثالث يحدد قيم الثوابت a, b بحيث تظهر قيمة الثابت b بجانب كلمة (Constant) وقيمة الثابت a بجانب إسمه في السطر الثاني.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.970ª	.941	.935	2.549

a. Predictors: (Constant), Weigt

ANOVAᵇ

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	1039.683	1	1039.683	159.992	.000ª
	Residual	64.984	10	6.498		
	Total	1104.667	11			

a. Predictors: (Constant), Weigt

b. Dependent Variable: Height

Coefficientsª

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	99.870	5.306		18.823	.000
	Weigt	.975	.077	.970	12.649	.000

a. Dependent Variable: Height

- من المثال السابق نستطيع معرفة ما يلي:

١. قيمة معامل الارتباط Pearson بين المتغيرين هي 970. وهي قيمة موجبة وقريبة من الارتباط التام 1.
٢. المتغير المستقل هو Weight
٣. المتغير التابع هو Height
٤. قيمة الثابت a = .975 و الثابت b = 99.87
٥. معادلة الانحدار هي: Height = .975 * Weight + 99.87

- من الجدول المجاور، ما هو الطول التقديري للطالب الأول وكم يبلغ الخطأ الناتج عن استخدام المعادلة:

Height = .975 * 75 + 99.87

Height = 173

الخطأ في التقدير هو 180 – 173 = <u>7</u>

الطول	الوزن
١٨٠	٧٥
١٦٠	٦٥
١٥٠	٥٥

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.977a	.955	.951	.456

a. Predictors: (Constant), Grade

ANOVAb

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	44.171	1	44.171	212.461	.000a
	Residual	2.079	10	.208		
	Total	46.250	11			

a. Predictors: (Constant), Grade
b. Dependent Variable: Absent

Coefficientsa

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	13.267	.733		18.089	.000
	Grade	-.136	.009	-.977	-14.576	.000

a. Dependent Variable: Absent

- ما هي معادلة الانحدار للمتغير التابع T والمتغير المستقل S. إذا كانت a = -4 و b = -7؟؟

الحل: T = -4 * S – 7

- إذا وجدنا أن هناك مشاهدتين لـ S أحداهما 5 و الأخشرى -5، احسب قيمة T التقديرية لكل مشاهدة؟

الحل: T = -4 * 5 – 7 = <u>-27</u>

T = -4 * -5 – 7 = <u>13</u>

١. من قائمة Analyze إختر الأمر Descriptive
٢. ثم Explore
٣. حدد المتغير في قائمة Dependent List
٤. إضغط زر Statistics ثم حدد نسبة الثقة.

- من الناتج، نستطيع معرفة ما يلي:

١. Mean: الوسط الحسابي للعينة وهو التقدير النقطي للمجتمع.
٢. نسبة الثقة
٣. حجم العينة N
٤. الحد الأدنى للفترة Lower Bound
٥. الحد الأعلى للفترة Upper Bound
٦. Median
٧. Variance
٨. Standard Deviation
٩. Minimum and Maximum
١٠. Range

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Height	12	100.0%	0	.0%	12	100.0%

Descriptives

			Statistic	Std. Error
Height	Mean		166.33	2.893
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	159.97	
		Upper Bound	172.70	
	5% Trimmed Mean		166.48	
	Median		168.00	
	Variance		100.424	
	Std. Deviation		10.021	
	Minimum		150	
	Maximum		180	
	Range		30	
	Interquartile Range		14	
	Skewness		-.360	.637
	Kurtosis		-.572	1.232

- من الشكل السابق نستنتج ما يلي:

١. التقدير النقطي لـ (μ) لمتغير الطول هو 166.33 وهو الوسط الحسابي للعينة Mean
٢. حجم العينة هو 12
٣. أعلى قيمة في المتغير Height هي 180 وأقل قيمة هي 150
٤. ما هو المدى لبيانات الطول؟؟

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Grade	12	100.0%	0	.0%	12	100.0%

Descriptives

			Statistic	Std. Error
Grade	Mean		77.08	4.240
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	67.75	
		Upper Bound	86.42	
	5% Trimmed Mean		77.59	
	Median		82.50	
	Variance		215.720	
	Std. Deviation		14.687	
	Minimum		50	
	Maximum		95	
	Range		45	
	Interquartile Range		28	
	Skewness		-.596	.637
	Kurtosis		-.959	1.232

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Absent	12	100.0%	0	.0%	12	100.0%

Descriptives

			Statistic	Std. Error
Absent	Mean		2.75	.592
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	1.45	
		Upper Bound	4.05	
	5% Trimmed Mean		2.72	
	Median		2.50	
	Variance		4.205	
	Std. Deviation		2.050	
	Minimum		0	
	Maximum		6	
	Range		6	
	Interquartile Range		4	
	Skewness		.100	.637
	Kurtosis		1.346	1.232

المحاضره الرابعه عشر

مراجعـــــــــــــة

(1) إذا علمت أن $P(A)=0.8$ و $P(B)=0.4$ و أن كلا الحدثين A, B مستقلان فإن $P(A\cap B)=$

(أ)
(ب) 0.32
(ج)
(د)

(2) إذا علمت أن $P(A)=0.8$ و $P(B)=0.4$ و أن كلا الحدثين A, B مستقلان فإن $P(AUB)=$

$0.8+0.4-0.32$

(أ)
(ب) 0.88
(ج)
(د)

(3) إذا علمت أن $P(A)=0.8$ و $P(B)=0.4$ و أن كلا الحدثين A, B مستقلان فإن $P(A|B)=$

$P(A)$

(أ)
(ب)
(ج)
(د) 0.8

(4) ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(-4,4)$ و $B(0,8)$ يساوي:

$= \frac{8-4}{0-(-4)} = \frac{4}{4} = 1$

(أ) 1
(ب)
(ج)
(د)

---

(5) نهاية الدالة $\lim_{x\to 0}(e^x+5x+2)$ تساوي :

$e^0+5(0)+2=3$

(أ)
(ب)
(ج) 3
(د)

أجب عن الفقرات ~~القادمتين~~ بإستخدام المعلومات التالية :-

إذا كانت :

$$f(x)=\begin{cases}8x^2+10, & x<1\\ 10x-5, & x>1\end{cases}$$

(6) نهاية الدالة $\lim_{x\to 2} f(x)$ تساوي :

$10(2)-5$

(أ)
(ب)
(ج) 15
(د)

(7) نهاية الدالة $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$ تساوي:

$8\left(\frac{1}{2}\right)^2+10$

$8(.25)+10$

(أ)
(ب) 12
(ج)
(د)

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي لإحدى الشركات تاخذ الشكل التالي :-

$R' = 18x^2+12x-10$

و دالة التكلفة الحدية تأخذ الشكل :-

$C' = 12x+20$

(9) حجم الايراد الكلي R عند إنتاج و بيع 5 وحدة يساوي :

$R=\int R' dx = 6x^3+6x^2-10x$

$= 6(5)^3+6(5)^2-10(5)$

(أ)
(ب)
(ج)
(د)

(10) حجم التكاليف الكلي C عند إنتاج و بيع 6 وحدات يساوي :

$C=\int C' dx = 6x^2+20x$

$= 6(6)^2+20(6) =$

(أ)
(ب)
(ج)
(د)

(11) أي من الدوال التالية تعبر عن الربح الكلي P:

$= R - C$

(أ)
(ب)
(ج)
(د)

إذا أعطيت البيانات التالية: 2, 4,10, 7, 7

(16) المتوسط الحسابي للبيانات يساوي

$\frac{(2+4+10+7+7)}{5}$

(أ)
(ب)
(ج)
(د)

(17) الوسيط للبيانات

$2, 4, \boxed{7}, 7, 10$

(أ)
(ب)
(ج)
(د) 7

(18) المنوال للبيانات يساوي

(أ) 7
(ب)
(ج)
(د)

(19) التباين للبيانات يساوي

الحاجزه 9

(أ)
(ب)
(ج)
(د)

(20) المدى للبيانات يساوي

$10-2=8$

(أ)
(ب)

أجب عن الفقرتين باستخدام المعلومات من الجدول التالي تبعاً للجنس و المستوى التعليمي:-

النوع / المستوى	ثانوي B	دبلوم D	
ذكر X	10	4	14
أنثى Y	6	6	12
	16	10	26

(34) احتمال أن يكون الشخص ذكر أو حاصل على دبلوم يساوي :

$P(X)+P(D)-P(X\cap D)$
$=\frac{14}{26}+\frac{10}{26}-\frac{4}{26}$

(أ)
(ب)
(ج) $\frac{20}{26}$
(د)

(35) إذا علمت أن الشخص المختار حاصل على ثانوي، فإن احتمال أن يكون أنثى يساوي

$P(B/Y)=$

(أ)
(ب)
(ج)
(د)

إذا كان التوزيع الاحتمالي حسب معدل حالات الفشل في اجتياز المسابقة:

X	0	1	2
P(X)	0.3	0.2	? 0.5

$=1$

(36) $P(X=2)=?$ يساوي (أي القيمة مكان علامة الاستفهام)

(أ)
(ب)
(ج) 0.5
(د)

$M=\sum XP(X)$
$0(.3)+1(.2)+2(0.5)=1.2$

(37) التوقع(المتوسط) للمتغير X يساوي

(أ) 1.2
(ب)
(ج)
(د)

$X^2P(X)=0(.3)+1(1.2)+2^2(.5)=3.6$
$3.6-(1.2)^2=$

(38) التباين لهذا المتغير يساوي

(أ)
(ب)
(ج)
(د)

(39) $P(X\geq1)=$

(أ)
(ب)
(ج) 0.7
(د)

سبيرمان الرتب

الجدول التالي يوضح درجات لعدد (4) من الطلاب في مقرري الرياضيات (X) و الادارة (Y):

X	2	4	3	1
Y	1	3	3	1

(40) معامل الارتباط الخطي لبيرسون يساوي
(أ)
(ب)
(ج)
(د)

(41) من خلال قيمة الارتباط في (40) اعلاه أو من خلال نظرة سريعة على الجدول، نجد أن العلاقة
(أ)
(ب)
(ج)
(د)

(42) عند حساب معادلة الانحدار بين المتغير المستقل X والمتغير التابع Y، فإن قيمة المعامل b تساوي:
(أ)
(ب)
(ج)
(د)

$b = ?$

(43) عند حساب معادلة الانحدار بين المتغير المستقل X والمتغير التابع Y، فإن قيمة المعامل a تساوي:
(أ)
(ب)
(ج)
(د)

(44) إذا كانت X = 6 فإن قيمة Y يمكن تقديرها، لتصبح:
(أ)
(ب)
(ج)

الجدول التالي يوضح مخرجات برنامج SPSS عند تحليل العلاقة بين الطول و الوزن لمجموعة من الاشخاص

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.970[a]	.941	.935	2.549

a. Predictors: (Constant), Weigt

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	1039.683	1	1039.683	159.992	.000[a]
	Residual	64.984	10	6.498		
	Total	1104.667	11			

a. Predictors: (Constant), Weigt
b. Dependent Variable: Height

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	99.870	5.306		18.823	.000
	Weigt	.975	.077	.970	12.649	.000

a. Dependent Variable: Height

مستقل — الوزن — الطول — تابع

(46) من الجدول، معامل بيرسون للارتباط بين المتغيرين يساوي
(أ)
(ب)
(ج) ٠.٩٧
(د)

(47) من الجدول، معامل b الثابت (constant) يساوي:
(أ) ٩٩.٨٧
(ب)
(ج)

يحبذ الرجوع للمحاضره المسجله ١٤ ومتابعتها ...

تم بحمد الله الانتهاء من ملخص / مقرر الإحصاء في الاداره

فإن أصبت فمن الله وان أخطأت فمن نفسي والشيطان وادعوا الله أن يتقبله مني عملاً خالصا لوجهه ،،

أتمنى لكم التوفيق والنجاح ولاتنسوني من دعواتكم يا طيبين

أختكم : لوسيندآ العصاميه ✍

الثلاثاء ١٠-ابريل -٢٠١٨

١٤-٧-١٤٣٩هـ