التحليل الاحصائي..

د. محمد زايد

د. محمد زايد

اعداد.. ام شهد

المحاضرة الاولى

المجموعات

تعريف المجموعة

المجموعة ببساطة هي تجمع من الاشياء أو العناصر المحددة تماما. وقد تكون هذه الاشياء أعدادا أو أشخاصاً أو أحداثا أو أي شئ آخر. ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل:

A,B,C,...

الاشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل:

a,b,c,...

مثال:

A={a, b, c, d}

أي أن المجموعة A تتكون من العناصر a و b و c و d

$a \in A$

أي أن العنصر b ينتمي إلى المجموعة A

$f \notin A$

أي أن العنصر f لا ينتمي إلى المجموعة A

الانتماء

يستخدم الرمز $\in$ " ينتمي إلى" لبيان العناصر التي تقع داخل المجموعة فمثلا

- إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول: أن a ينتمي إلى المجموعة A

ويكتب بالصورة $a \in A$

- أما إذا كان a ليس عنصرا من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a لا ينتمي إلى المجموعة A

ويكتب بالصورة $a \notin A$

ملاحظة : تعد دراسة المجموعات ذات أهمية كبيرة في دراسة العلاقات والدوال.

طرق كتابة المجموعات

1- طريقة العد (سرد العناصر)

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة ","

A={1,3,5,7}

B={a,b,c,d}

C={1,2,3,...}

*بحيث لا يتم تكرار العناصر

2-طريقة القاعدة(الصفة المميزة)
ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها،
أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ، فمثلا :

A={x: عدد طبيعي زوجي x }

B={x:كلية بجامعة الملك فيصل x}

C={x: طالب مسجل بالمقرر الحالي x}

D={x: 0≤x ≤12عدد صحيح، X}

مثال:

عند رمي حجر نرد مرة مرتين، نستطيع أن نعبر عن الحادثة (الحصول على عدد يساوي 7) من خلال التالي:

- طريقة سرد جميع العناصر وبينهما فاصلة كالتالي:

A={ (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1) }

-ويمكن أن نعبر عن الحادثة نفسها بطريقة الصفة المميزة وهي كتابة مميزات العناصر بين القوسين { } عوضا عن كتابة العناصر نفسها كالتالي:

A={x:1≤x≤6, x عدد صحيح }

A = { (x,y) : x+y= 7 }

إذا المجموعة بشكل عام يمكن أن تكتب بميزة عناصرها بأشكال مختلفة طالما كانت الميزة كافيه لتحديد العناصر بشكل دقيق.

أنواع المجموعات:

1- المجموعة الخالية:

وهي مجموعة الاعداد الصحيحة التي بين العددين 0,1 مجموعة خالية،
أيضا مجموعة أسماء الاسماك التي تتحدث اللغة العربية مجموعة خالية بالتأكيد.
ويرمز للمجموعة الخالية بالرمز Ø أو بقوسين { }.

A = {x: عددx طبيعي زوجي وفردي }

B = {x: دولةx عربية تقع في أوروبا }

2- المجموعة المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة.
مثال: المجموعات التالية مجموعات منتهية

A={2, 4, 6, 8}
B=1, 2, 3, ...100}
C={x, y, z, w, u}

3- المجموعة غير المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة. (باختصار هي المجموعة التي لا يمكن حصر عناصرها)
مثال: المجموعات التالية مجموعات غير منتهية

A = {x: عددx طبيعي فردي }

B={10, 20, 30, ...}

4- المجموعة الشاملة:

هي المجموعة التي تشمل كل العناصر محل الدراسة بحيث تعتبر جميع المجموعات الاخرى مجموعات جزئية منها، ويرمز لها عادة بالرمز U .

5-المجموعة الجزئية:

- فنقول عن مجموعة A انها مجموعة جزئية subset من مجموعة B اذا كان كل عنصر ينتمي الى A ينتمي الى B ونعبر عن هذا بكتابة $A \subset B$
- فاذا كانت $A \subset B$ وكانت $A \neq B$ قلنا ان A جزئية فعلية proper subset من B او A محتواه في B او المجموعة B تحتوي A
- اما اذا كانت A=B فان كل عنصر ينتمي إلى احداهما ينتمي للأخرى وبالتالي $A \subset B$ و $B \subset A$

امثلة:

-1

A={2,4,6}

B= {1,2,3,4,5,6,7,8}

فإن $A \subset B$

-2 مجموعة جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

العمليات على المجموعات

تساوي المجموعات:

تكون المجموعتان A , B متساويتان اذا كانت

$$A \subseteq B , B \subseteq A \Longrightarrow A = B$$

مثال:

$$\{-1, +1\} = \{x : x^2 = 1\}$$

{س, ل, م} ≠ { x : x حرف من كلمة سلام }

اما المجموعان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال:

أي المجموعات التالية متكافئة و أيها متساوية؟

1) A= {1, 3, 5, 7} , B={3, 1, 5, 7}

2) A={0, 1, 2} , B={a, b, c}

الحل:

1) A=B

2) $A \equiv B$

الاتحاد

اتحاد المجموعتين A , B $(A \cup B)$ هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A او في B او كليهما.

مثال

A={1 , 2, -6 , -7}
B={-6, -7, -11}

$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{6}, -\mathbf{7}, -\mathbf{11}\}$$

التقاطع

تقاطع المجموعتين A , B $(A \cap B)$ هو مجموعة كلا العناصر الموجودة في A و في B معا.
أي العناصر المشتركة بين A و B

مثال على ذلك:

A={1 , 2, -6 , -7}
B={-6, -7, -11}

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \{-\mathbf{6}, -\mathbf{7}\}$$

المكملة او المتممة

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A. أي أن

مثال:

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

A={1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

B={1, 2, 3, 6, 8, 11, 12, 14, 16}

$\overline{A}$ **={2, 4, 6, 20}**

$\overline{B}$**={4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20}**

الفرق

إذا كانت مجموعتان A، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة A وليست في B.أي أن

إذا كانت $A = \{1,2,3,x,y\}$ و $B = \{3,4,5,x,w\}$

فإن $A - B = \{1,2,y\}$

مثال

إذا كانت $A = \{1,2,3,x,y\}$ و $B = \{3,4,5,x,w\}$
وكانت المجموعة الكلية $U = \{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$
فأوجد:

1) $A \cup B$

الحل:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,x,y,w\}$$

مثال

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

2) $A\cap B$

الحل:

$$A\cap B=\{3,x\}$$

مثال

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

3) $A-B$

الحل:

$$A-B=\{1,2,y\}$$

مثال

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

4) $\overline{A}$

الحل:

$$\overline{A}=\{4,5,w,z\}$$

مثال

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

5) $\overline{B}$

الحل:

$$\overline{B}=\{1,2,y,z\}$$

تدريبات

1. نفترض أن $A=\{3,4,5,x,y\}$ و $B=\{4,x,y,z\}$

ضع الرمز $\in$ أو $\notin$ في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة .

$(i)\ 3$ ______ A	$(v)\ z$ ______ A
$(ii)\ 3$ ______ B	$(vi)\ z$ ______ B
$(iii)\ x$ ______ A	$(vii)\ 1$ ______ A
$(iv)\ x$ ______ B	$(viii)\ 1$ ______ B

2. اسرد عناصر كل مجموعة من المجموعات التالية .

ملحوظة: يمكنك استخدام النقط للتعبير عن استمرار سرد عناصر المجموعة عندما يكون بها عدد لانهائي من العناصر

i. A = {x: x عدد طبيعي اصغر من 7}

ii. B = {x: x عدد طبيعي زوجي يقبل القسمة على2}

iii. C = {y: y حرف من حروف الهجاء المحصور بين c و h}

iv. D = {x: x عدد طبيعي فردي اصغر من 17}

مجموعات الاعداد: Sets of numbers

أ- مجموعة الاعداد الطبيعية (Natural numbers)

وهي اصغر مجموعات الاعداد وتسمى أيضا مجموعة العد وتحتوي على الأعداد الصحيحة الموجبة.

N={1,2,3,4,...}

ب- مجموعة الاعداد الصحيحة (Integer numbers)

هي مجموعة الاعداد الموجبة والسالبة بالإضافة الى الصفر.

I={... ,-3,-2,-1,0,1,2,3,...}

ج- مجموعة الاعداد النسبية (Rational numbers)

العدد النسبي هو العدد الذي يكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ بحيث $a,b\in I$ ، $b\neq 0$

وتحتوي مجموعة الاعداد النسبيه على الاعداد الصحيحة بالإضافة الى الكسور مثل $\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{7}{6},\frac{8}{10},\frac{9}{1},\frac{14}{1},\ldots$

ويرمز لها بالرمز Q .

د- مجموعة الاعداد غير النسبية (Irrational numbers)

العدد النسبي هو العدد الذي لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$

مثل جذور الاعداد التي ليست مربع كامل $\sqrt{2},\sqrt{6},\sqrt{10},\sqrt{20},\ldots$

هـ- مجموعة الاعداد الحقيقية (Real numbers)

وتحتوي مجموعة الاعداد النسبية والغير النسبية ويرمز لها بالرمز R .

وتمثل بخط مستقيم يسمى خط الاعداد حيث يمتد من طرفية من -∞ الى ∞ ومنتصفه تكون نقطة الصفر وعلى يسار الصفر الاعداد السالبة وعلى يمينه الاعداد الموجبة كالأتي

$$-\infty \longleftarrow \quad - \quad 0 \quad + \quad \longrightarrow \infty$$

واي جزء من هذا الخط يكون مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية ويسمى فترة (Interval)

الفترة Interval

تعرف الفترة كما ذكرنا سابقا بانها مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية وهي الاعداد التي تقع بين أي نقطتين a و b على خط الاعداد، وتكتب حسب نوعها كالاتي :

1- الفترة المفتوحة: $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$

2- الفترة نصف المغلقة: $[a, b) = \{x \in R : a \le x < b\}$

3- الفترة المغلقة: $[a, b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$

مثال:

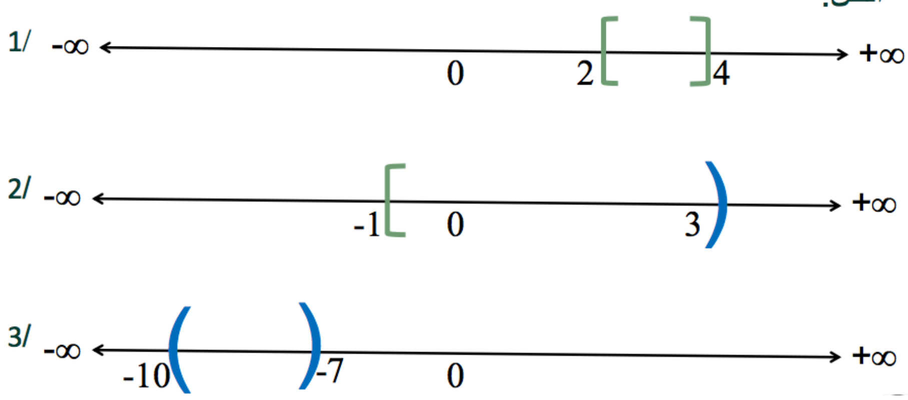
مثل الفترات التالية على خط الأعداد:

1- $[2, 4]$

2- $[-1, 3)$

3- $(-10, -7)$

الحل:



مثال:

إذا كانت الفترات $B = [1, 4]$ و $A = [-2, 3)$ فأحسب ما يلي:

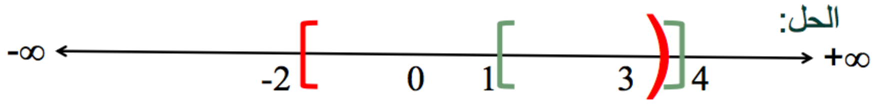
1- $A \cap B$

2- $A \cup B$

3- $A - B$

4- $B - A$

الحل:



1- $A \cap B = [1, 3)$

2- $A \cup B = [-2, 4]$

3- $A - B = [-2, 1)$

4- $B - A = [3, 4]$

المحاضرة الثانية
نظرية الاحتمالات

معنى الاحتمال

يمكن تعريف الاحتمال بطرق عديدة ابسطها أنه «مقياس مكانية وقوع حدث (Event) معين» أو «قيمة تعبر عن فرصة تحقق حدث معين».

والاحتمال هو كسر موجب تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح، ويرمز لاحتمال تحقق الحدث A بالرمز P(A) وحدود هذا الاحتمال هي: $0 \leq P(A) \leq 1$ ، ويحسب كالتالي

$$\text{احتمال تحقق حدث معين} = \frac{\text{عدد حالات تحقق هذا الحدث}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

الحدث و الفراغ العيني التجربة:

- افترض أننا نقوم بإجراء تجربة ما.. كرمي زهرة النرد مثلا ونلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الاوجه الستة 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6.

- نفترض أننا مهتمون بحدث ظهور رقم فردي أي ظهور أحد الارقام 1 أو 3 أو 5 على الوجه العلوي للنرد.

هكذا فإن :

- عملية رمي الزهرة تسمى تجربة (Experiment)

- مجموعة جميع الحالات الممكنة الظهور تسمى بالفراغ العيني (Sample Space)

- ظهور رقم فردي وهو محل اهتمامنا يسمى حدثاً (Event)

ويلاحظ أن الحدث قد يكون حالة أو اكثر من الفراغ العيني.

ووفقا لتعريف الاحتمال

$$\text{احتمال تحقق حدث معين} = \frac{\text{عدد حالات تحقق هذا الحدث}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

وبالتالي يكون احتمال تحقق الحدث محل الاهتمام وهو ظهور رقم فردي هو:

$$\text{احتمال ظهور رقم فردي} = \frac{\text{عدد اوجه النرد التي تحمل رقما فرديا}}{\text{عدد اوجة النرد}}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال

صندوق به مجموعة من الكرات مقسمة كما يلي :

20 كرة بيضاء

30 كرة حمراء

50 كرة سوداء

فاذا سحبنا كره واحدة عشوائيا من الصندوق احسب احتمال ان تكون هذه الكرة:

1- حمراء

2- بيضاء

3- سوداء

4- حمراء او سوداء

5- حمراء او سوداء او بيضاء

الحل

1- أحتمال أن تكون حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات حمراء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{30}{100}$

2- أحتمال أن تكون بيضاء = $\frac{\text{عدد الكرات بيضاء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{20}{100}$

3- أحتمال أن تكون سوداء = $\frac{\text{عدد الكرات سوداء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{50}{100}$

4- أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء = $\frac{50+30}{100} = \frac{80}{100}$

5- أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء أو بيضاء = $\frac{50+20+30}{100} = \frac{100}{100} = 1$

مثال:

في دراسة لتخصص مجموعة من الطلاب تبين التالي :

60 طالب يدرسون محاسبة

30 طالب يدرسون تسويق

10 طلاب يدرسون مالية

اذا تم اختيار طالب بطريقة عشوائية احسب الاحتمالات التالية :

1. احتمال ان يكون تخصص تسويق.
2. احتمال ان يكون تخصص مالية
3. احتمال ان يكون تخصص محاسبة او تسويق

الحل:

1) احتمال أن يكون تخصص تسويق $= \frac{30}{100}$

2) إحتمال أن يكون تخصص مالية $= \frac{10}{100}$

3) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق $= \frac{30+60}{100} + = \frac{90}{100}$

نظرية الاحتمالات

رموز ومفاهيم أساسية

$P(A)$: هو احتمال تحقق الحدث A

$P(\bar{A})$: هو احتمال عدم تحقق الحدث A وهو الاحتمال المكمل لاحتمال تحقق الحدث A وحيث ان مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$P(A \cap B)$: التقاطع ويشير الى احتمال تحقق الحدثين معا (الاول و الثاني)

$P(A \cup B)$: الاتحاد ويشير إلى احتمال تحقق احد الحدثين على الأقل (الاول أو الثاني)

أنواع الاحداث A و B

1- احداث متنافية (متعارضة): وهي الاحداث التي لا يمكن أن تقع معا أي أن حدوث احدهما يمنع حدوث الاخر فعلى سبيل المثال فاحتمال تواجدك في الرياض وفي مكة في نفس الوقت هو احتمال مستحيل وفي هذه الحالة فإن :

- احتمال تحقق الحدثين معاً يساوي صفر $P(A \cap B) = 0$
- احتمال تحقق احدهما على الأقل : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2- احداث مستقلة:

أي ان حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث الاخر فعلى سبيل المثال شراء جريدة الرياض قد لا يتعارض مع شراء جريدة المال وفي هذه الحالة فإن:

- احتمال تحقق الحدثين معاً يساوي: $(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

3- احداث غير مستقلة:

وهي الاحداث التي يؤثر تحقق احدها على تحقق الاخرى، وكمثال على ذلك زيادة عدد ساعات مذاكرة مادة الاحصاء في الادارة يؤثر على تخفيض عدد ساعات مذاكرة مادة المحاسبة ، ومن ثم فإن:

- احتمال تحقق الحدثين معا : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

نظرية (اتحاد الاحداث)

احتمال تحقق حادث واحد على الاقل من حادثين A أو B هو أن يتحقق احدهما أو أن يتحقق الاثنين معا (ويسمي الاتحاد) يساوي:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

حيث أن:

- $P(A)$ هو احتمال تحقق الحدث A
- $P(B)$ هو احتمال تحقق الحدث B
- $P(A \cap B)$ التقاطع ويشير إلى احتمال تحقق الحدثين معا .

مثال:

إذا تقدم لإختبار المحاسبة و الاقتصاد 50 طالب نجح في المحاسبة 30 طالب و نجح في الاقتصاد 40 طالب فإذا علمت أن هناك 25 طالب قد نجحوا في الاثنين معاً فاحسب احتمال النجاح في أحد المقررين على الاقل ؟

الحل :-

1- نرمز إلى إحتمال النجاح في المحاسبة بالرمز $P(A)= \frac{30}{50} = 0.60$

2- نرمز إلى إحتمال النجاح في الاقتصاد بالرمز $P(B)= \frac{40}{50} = 0.80$

3- احتمال النجاح في المادتين معاً يشير إلى إحتمال النجاح في المادة الاولى و إحتمال النجاح في المادة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$$P(A\cap B) = \frac{25}{50} = 0.50$$

4- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A\cup B)$ =

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.60 + 0.80 - 0.50 = 0.90$$

مثال:

إذا علمت أن $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.4$ وأن هذه الاحداث هي أحداث متنافية فاحسب كل من الاحتمالات التالية :-

1) $P(A\cap B)$

2) $P(A\cup B)$

3) $P(\bar{A})$

4) $P(\bar{B})$

الحل:

1- حيث أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية إذاً فإن إحتمال تحققهما معاً يساوي :-

$$P(A\cap B) = 0$$

2- و من ثم فإن إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل أو ما يعرف بالاتحاد يساوي :-

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) = 0.2 + 0.4 = 0.6$$

3- إحتمال $P(\bar{A})$ هو الاحتمال المكمل لإحتمال تحقق الحدث A و حيث أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن :-

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

مثال:

في دراسة لبيان المستوى الثقافي في المملكة العربية السعودية تم إختيار عينة عشوائية مكونة من 100 شخص وجد من بينهم 50 شخص يتصفحوا جريدة الرياض و60 شخص يتصفحون جريدة المال ، احسب احتمال تصفح أحد الجريدتين على الاقل ؟

الحل:

نرمز إلى إحتمال تصفح جريدة الرياض بالرمز $P(A)$، ونرمز إلى إحتمال تصفح جريدة المال بالرمز $P(B)$

احتمال تصفح أحد الجريدتين على الاقل هو ما نطلق عليه الاتحاد: $P(A\cup B)$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{50}{100} + \frac{60}{100} - \underbrace{\frac{50}{100} \times \frac{60}{100}}_{P(A\cap B) \text{ احتمال التقاطع}} = 0.80$$

مثال:

تقدم إلى إختبار مقرر الاحصاء في الادارة والتحليل الاحصائي 10000 طالب نجح منهم 9000 طالب في مقرر الاحصاء في الادارة كما نجح 8000 طالب في مقرر التحليل الاحصائي المطلوب :-

1) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .
2) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .
3) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .
4) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .
5) حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً .
6) حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً .
7) حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط .
8) حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين على الأقل.

الحل:

1. احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة = $\frac{9000}{10000}$ = 90 % .

2. احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة = $\frac{1000}{10000}$ = 10 % .

3. احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = $\frac{8000}{10000}$ = 80 % .

4. احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = $\frac{2000}{10000}$ = 20 % .

5- بما أن النجاح في أي مقرر هو حدث مستقل عن النجاح في الآخر ، يتم تطبيق القاعدة $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ، وبالتالي فإن:

احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً = $\frac{9000}{10000} \times \frac{8000}{10000} = 0.72 = 72\ \%$

6- احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً = $\frac{1000}{10000} \times \frac{2000}{10000} = 0.02 = 2\%$

7- احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط =

$$= \frac{9000}{10000} \times \frac{2000}{10000} + \frac{8000}{10000} \times \frac{2000}{10000}$$

$$= 0.9 \times 0.2 + 0.8 \times 0.1 = 0.26$$

8- احتمال نجاح الطالب في احد المقررين على الأقل =

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8000}{10000} + \frac{9000}{10000} - 0.72 = 0.98$$

الاحتمال الشرطي Conditional Probability

إذا كان لدينا الحادثين A1 , A2 وكان P(A2) يساوي الصفر فإن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يعطي بالمعادلة التالية:

$$P(A1 \mid A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ A1 , A2 على احتمال الحادث A2

مثال

إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات 0.64 واحتمال نجاحه في مقرر الإحصاء ومقرر الرياضيات معا 0.32 فما هو احتمال نجاحه في مقرر الإحصاء؟ علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات.

الحل

نفرض أن A1={نجاح الطالب في مقرر الإحصاء}

A2={نجاح الطالب في مقرر الرياضيات}

وبذلك يكون:

$P(A_2)=0.64$

$P(A_1 \cap A_2)=0.32$

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو حساب $P(A1 \mid A2)$ **وبتطبيق العلاقة :**

$$P(A1 \mid A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.32}{0.64} = 0.5$$

إذا احتمال نجاح الطالب في مقرر الإحصاء علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات هو 0.5

مثال

الجدول التالي يمثل توزيع عمال احد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الدي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية :

- **احسب احتمال أن يكون العامل من القسم الاول بشرط أنه متزوج؟**
- **احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث؟**

الحل

نفرض أن A1={أن يكون العامل من القسم الأول}

A2={أن يكون العامل متزوج}

B3={أن يكون العامل من القسم الثالث}

B4={أن يكون العامل أعزب}

فيكون بالتالي:

1- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو: احتمال أن يكون من القسم الأول ومتزوج / احتمال أن يكون متزوج

$$P(A1 \mid A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{7}{27}$$

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو 0.259

2- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو:

$$\frac{\text{احتمال أن يكون العامل أعزب ومن القسم الثالث}}{\text{احتمال أن يكون من القسم الثالث}}$$

$$P(B_1 | B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{16}{50}} = \frac{10}{16}$$

إذا احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو 0.625

تمارين

تمرين 1

اذا أعطيت الجدول التالي

	A	B	المجموع
X	10	45	55
Y	30	15	45
المجموع	40	60	100

المطلوب حساب الاحتمالات التالية:

1- P(A)	2- $P(\bar{A})$	3- P(X)	4- $P(\bar{X})$
5- P(A∩X)	6- P(B∩X)	7- P(A∪Y)	8- P(B∪Y)
9- P(A|Y)	10- P(B|Y)	11- P(X|B)	

تمرين 2

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعه من الأشخاص تبعا للنوع وتقديرات التخرج:

النوع / المستوى التعليمي	جيد A	ممتاز B	المجموع
ذكرX	200	300	500
أنثى Y	400	100	500
المجموع	600	400	1000

من خلال الجدول السابق المطلوب:

1. أحسب إحتمال أن يكون ذكر أو حاصل على تقدير جيد ؟
2. أحسب أحتمال أن تكون أنثى و حاصلة على تقدير ممتاز ؟
3. اذا علمت أنها أنثى فما هو أحتمال أن تكون حاصلة على تقدير جيد ؟

تمرين 3

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص

النوع / المستوى التعليمي	x	y	المجموع
A	5	10	15
B	12	3	15
المجموع	17	13	30

من خلال الجدول السابق المطلوب حساب الاحتمالات التالية

$P(y)$ $P(B \cup y)$

$P(\bar{B})$ $P(x \cap A)$

$P(B \mid x)$ $P(A \mid y)$

تمارين

1- عرف المصطلحات التالية

(التجربة العشوائية – فراغ العينة – الحادث – الحوادث المتنافية – الحوادث المستقلة – الحوادث الشاملة)

2- الجدول التالي يمثل توزيع موظفي احد الشركات حسب الحالة الاجتماعية للموظف والمستوى الإداري الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
مستوى الادارة الدنيا	10	14	24
مستوى الادارة المتوسطة	16	28	44
مستوى الادارة العليا	20	12	32
المجموع	46	54	100

أولا اختر موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- ان يكون اعزبا .
- ان يكون متزوجا.
- ان يكون من مستوى الإدارة الدنيا .
- ان يكون من مستوى الإدارة الدنيا او المتوسطة.
- ان يكون من مستوى الإدارة الدنيا و اعزب.

ثانيا اختير موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احسب احتمال ان يكون موظفي الإدارة الدنيا بشرط انه متزوج؟
- احتمال ان يكون الموظف اعزب بشرط انه من موظفي الإدارة العليا؟

ثالثا تم اختيار 2 موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن يكون الموظفين من الادارة الدنيا؟
- احتمال أن يكون الموظفين متزوجان؟
- احتمال أن يكون للموظفين نفس الحالة الاجتماعية؟
- احتمال أن يكون الموظفين من القسم نفسه؟

المحاضرة الثالثة

المتغيرات العشوائية

المتغير العشوائي

هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما

1. المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطع)

Discrete Random Variables

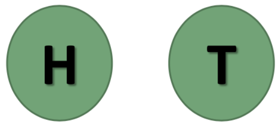
2. المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

المتغير العشوائي المنفصل	المتغير العشوائي المتصل
هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة (وبمعنى أخر فهو يشمل جميع القيم الصحيحة دون القيم الكسرية مثل عدد الطلاب في فصل دراسي – عدد الوحدات التالفة من منتج معين – عدد أفراد الاسرة كلها أرقام 1،2،3،4،5، ....لا يمكن أن تأخذ صورة كسرية).	ويطلق علية المتغير العشوائي المستمر فذلك المتغير يأخذ عدد لا نهائي من القيم المتصلة (ومن ثم فإنه يأخذ القيم الصحيحة و جميع القيم الكسرية التي تقع بين هذه القيم و كمثال على هذه المتغيرات درجات الحرارة أو أطوال الطلاب أو المعدلات التراكمية للطلاب)

مثال:

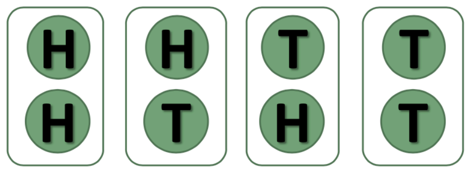
في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة، فأوجد القيم التي يأخذها ذلك المتغير واحتمالاته؟



الحل:

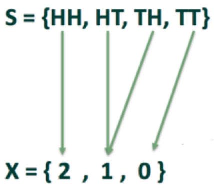
1- فراغ العينة (S) :

S={HH,HT,TH,TT}



2- المتغير العشوائي (X)

هو صف رقمي لعدد ظهور الصورة



3-احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير p(x) :

عند ظهور الناتج TT : $P(X=0) = ¼$

عند ظهور الناتج HT أو TH : $P(X=1) = 2/4 = ½$

عند ظهور الناتج HH : $P(X=2) = ¼$

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

$$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = ¼ + ½ + ¼ = 1$$

مثال

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو مجموع العددين الظاهرين. ما القيم التي يأخذها المتغير X وما احتمال الحصول على كل من هذه القيم ؟

الحل

1- فراغ العينة (S)

S = { (1,1), (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) ,(1,6) ,
(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6) ,
(3,1) , (3, 2) , (3, 3) , (3, 4) , (3, 5) , (3, 6) ,
(4, 1) , (4, 2) , (4, 3) , (4, 4) , (4, 5) , (4, 6) ,
(5, 1) , (5, 2) , (5, 3) , (5, 4) , (5, 5) , (5, 6) ,
(6, 1) , (6, 2) , (6, 3) , (6, 4) , (6, 5) , (6, 6) }

2-المتغير العشوائي (X):

(وصف رقمي لمجموع العددين الظاهرين)

X = {2, 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 }

3-احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير p(x) :

P(x=2) = 1/36   P(x=3) = 2/36
P(x=4) = 3/36   P(x=5) = 4/36
P(x=6) = 5/36   P(x=7) = 6/36
P(x=8) = 5/36   P(x=9) = 4/36
P(x=10) = 3/36   P(x=11) = 2/36
P(x=12) = 1/36

نلاحظ أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد :-

P(x=2) + P(x=3) +P(x=4) …… +P(x = 12) = 1

التوزيع الاحتمالي

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن ان يأخذها المتغير العشوائي ، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير .
وهو جدول مكون من صفين، الاول به القيم الممكنة للمتغير ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير .

مثال

كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X (مجموع العددين الظاهرين على النرد)في المثال السابق ؟

الحل:

نضع قيم X واحتمالاتها P(X) في جدول ليمثل التوزيع الاحتمالي :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	المجموع
P(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

مثال

كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

(الناتج TT)   P(x=0) = 1⁄4
(النواتج HT,TH)   P(x=1) = 2⁄4 = 1⁄2
(الناتج HH)   P(x=2) = 1⁄4

X	0	1	2	المجموع
P(x)	1/4	1/2	1/4	1

شروط التوزيع الاحتمالي

يجب أن يتوافر في أي توزيع احتمالي الشرطين التاليين: **(شروط تتعلق فقط بـ P(X))**

1. جميع الاحتمالات يجب أن تقع بالفترة [0,1].
2. مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح .

مثال هل يمثل الجدول التالي توزيعا احتماليا؟ (الإجابة : لا)

X	0	1	2	3	4
P(x)	0.2	0.3	0.1	0.4	0.1

الشرط الاول متحقق (جميع الاحتمالات موجبة وتقع بين الصفر والواحد)

الشرط الثاني غير متحقق (مجموع الاحتمالات لا يساوي الواحد)

مثال هل يمثل الجدول التالي توزيعا احتماليا؟ (الإجابة : نعم)

X	-2	0	1	3	4
P(x)	0.1	0.3	0.2	0.3	0.1

الشرط الاول متحقق (جميع الاحتمالات موجبة وتقع بين الصفر والواحد)

الشرط الثاني غير متحقق (مجموع الاحتمالات يساوي الواحد)

مثال احسب الاحتمال غير المعلوم (A) في التوزيع الاحتمالي التالي.

X	0	1	2	3
P(x)	0.15	A	0.30	0.20

حيث أن مجموع الاحتمالات في أي توزيع احتمالي يساوي الواحد :

A = p(1) = 1 – [0.15 + 0.3 + 0.2] = 1 – 0.65 = 0.35

التوقع الرياضي

هو القيمة المتوقعة (أو الوسط الحسابي) للمتغير العشوائي ويرمز له بالرمز μ أو E(x)

وفي حالة المتغير المتقطع يتم حسابه باستخدام القانون التالي

$$\mu = E(x) = \sum (x\, P(x))$$

بمعنى أن التوقع يساوي حاصل جمع كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مضروبة في احتمالها.

ويوضح الجدول التالي كيفية الوصول إلى قيمة التوقع الرياضي:

x	الصف (1)	المجموع
P(x)	الصف (2)	1
E(x)	الصف (1) × الصف (2)	القيمة المتوقعة

التوقع الرياضي

اذا كان X متغير عشوائي منفصل

وكان P(X) هو توزيعه الاحتمالي

فان وسطة الحسابي او توقعه الرياضي يعي بالعلاقة :

$$\mu = E(X) = \sum_{\text{لجميع قيم } x} x p(x)$$

مثال

اوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

X	الصف (1)	0	1	2	Σ
P(X =x)	الصف (2)	¼	½	¼	1
μ = E(x)	(1) × (2)	0	½	½	1

مثال

إذا كان التوزيع الاحتمالي لعدد الاعطال اليومية لجهاز الحاسب كما يلي ، فأوجد معدل العطل اليومي للجهاز؟

x	0	1	2	3	4	Σ
P(X =x)	0.20	0.30	0.25	0.15	0.10	1
μ = E(x)	0	0.30	0.50	0.45	0.40	1.65

$$\mu = E(X) = \sum x \, . p(x) = 1.65$$

التباين والانحراف المعياري:

التباين للمتغير العشوائي X الذي قيمته متوقعة E(x) هو

$$\text{Var(X)} = \sigma^2 = E(x^2) - (\text{E}(x))^2$$

$$= [\sum x^2 p(x)] - \mu^2$$

والانحراف المعياري يمثل الجذر التربيعي للتباين

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

وللوصول الى قيمة التباين والانحراف المعياري يتم اتباع الخطوات التالية:

صف (1)	X	قيم المتغير X	Σ
صف (2)	P(X =x)	الاحتمالات الخاصة بقيم X	1
صف (3)	μ = E(x)	صف3 = صف 1 × صف 2	القيمة المتوقعة
صف (4)	$E(x^2)$	صف4 = صف 1 × صف 3	

التباين = ناتج صف 4 – (ناتج صف 3)^2

تمرين

أوجد القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي التالي :

x	0	1	2	3
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1

الحل

x	0	1	2	3	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1	1	الاحتمال
$E(X) = x.P(x)$	0	0.2	0.8	0.3	1.3	التوقع
$E(X^2) = x^2.P(x)$	0	0.2	1.6	0.9	2.7	
σ^2	$=E(x^2)-(E(x))^2$				1.01	التباين
σ	$=\sqrt{\sigma^2}$		$=\sqrt{1.01}$		1.005	الانحراف المعياري

تمرين

اذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :

x	2	4	5	6
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25

المطلوب

1) الوسط الحسابي
2) التباين
3) الانحراف المعياري
4) $P(x \geq 4)$
5) $P(2 \leq x \leq 5)$

الحل

x	2	4	5	6	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25	1	الاحتمال
$E(x)=x.P(x)$	0.3	1.4	1.25	1.5	4.45	التوقع
$E(X^2) = x^2.P(x)$	0.6	5.6	6.25	9	21.45	
$v(x) = \sigma^2$	$=E(x^2)-E(x)^2$		$=21.45-(4.45^2)=$		1.647	التباين
σ	$=\sqrt{\sigma^2}$		$=\sqrt{1.647}$		1.284	الانحراف المعياري

1) الوسط الحسابي = التوقع الرياضي = 4.45

2) التباين = 1.647

3) الانحراف المعياري = 1.2835

4) $P(x \geq 4) = P(4) + P(5) + P(6) = 0.35 + 0.25 + 0.25 = 0.85$

$=1-P(2)=1-0.15=0.85$ (طريقة أخرى للحل)

5) $P(2 \leq x < 5) = P(2) + P(4) = 0.15 + 0.35 = 0.5$

تمرين

اذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :

x	0	2	4	6
P(x)	0.1	0.2	0.4	?

المطلوب

1) p(6)
2) الوسط الحسابي
3) التباين
4) الانحراف المعياري
5) $P(x \geq 4)$

الحل

x	0	2	4	6	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.1	0.2	0.4	0.3	1	الاحتمال
E(x)=x.P(x)	0	0.4	1.6	1.8	3.8	التوقع
$E(X^2) = x^2. P(x)$	0	0.8	6.4	10.8	18	مربع التوقع
$v(x) = \sigma^2$	$=E(x^2)-E(x)^2$		$=18-3.8^2=3.56$		3.56	التباين
σ	$= \sqrt{\sigma^2}$		$= \sqrt{3.56}$		1.89	الانحراف المعياري

$P(6) = 0.3$, $P(x \geq 4) = P(4) + P(6) = 0.4 + 0.3 = 0.7$

تمرين الواجب

اذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي:

x	0	1	2	3
P(x)	0.2	0.1	0.3	?

المطلوب:

1) p(3)
2) الوسط الحسابي
3) التباين
4) الانحراف المعياري
5) $P(x \geq 2)$
6) $P(2 \leq x \leq 5)$

المحاضرة الرابعة

تابع.. المتغيرات العشوائية

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

ذكرنا في ما سبق أن المتغير العشوائي المستمر أو المتصل هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عددا لانهائيا من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا، ويقع في المدى (a,b) ، أي أن :

$$\{X= x : a< x <b\}$$

فإن للمتغير X عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الادنى والاعلى (a,b).

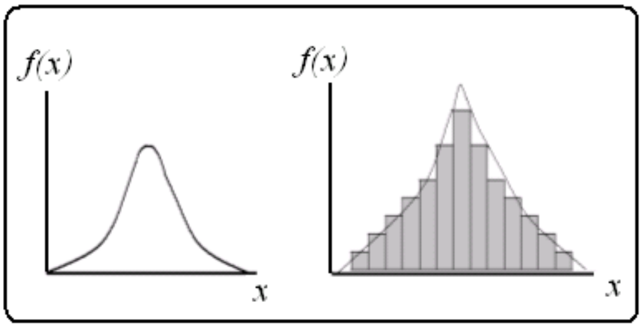
- يرمز لدالة الاحتمال الخاصة بالمتغير العشوائي المتصل بالرمز f(x) ويطلق عليها .. دالة كثافة الاحتمال Probability Density Function (p.d.f)
- ويقال أن الدالة f(x) هي دالة كثافة احتمال لمتغير متصل إذا تحقق الشرطان التاليان:

1. $f(x) \geq 0$ **موجبه f(x)**

2. $\int f(x) = 1$ **(كامل المساحة تحت المنحنى = 1)**

$$\int_a^b f(x) = 1$$

وعند تمثيل بيانات المتغير الكمي المتصل في شكل مدرج تكراري نسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو اقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المتصل، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المتصل، كما هو مبين بالشكل التالي :



وبفرض أن المتغير العشوائي المتصل يقع في المدى $[a,b]$ ، فإن المساحة اسفل منحنى الدالة f(x) بين النقطتين a و b تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح .

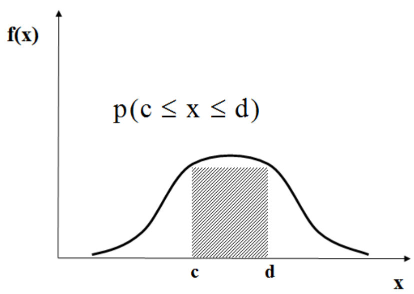
- ويكون احتمال أن تقع قيمة المتغير العشوائي المتصل بين أي نقطتين $[c,d]$ هو :

$$P(c \leq X \leq d)$$

ويعبر عن الاحتمال السابق بالمساحة أسفل منحنى الداله f(x) والواقعة بين النقطتين c و d وتحسب المساحات تحت المنحنى باستخدام التكامل .

- و لاي متغير عشوائي متصل (X) فإن احتمال أن تكون قيمة هذا المتغير هي نقطة محددة x يساوي الصفر، أي أن :

$$P(X= x)=0 \ , \ x \in X$$



قواعد التكامل المحدود:

$$1.\ \int a\,dx = a\ x$$

$$2.\ \int dx = x$$

$$3.\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$$

$$4.\ \int a\ f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

مثال (1)

إذا كان X متغير عشوائي دالة كثافة احتماله هي :

$$f(x) = \frac{1}{2}, \qquad 0 \le x \le 2$$

احسب الاحتمالات التالية:

1. P (0.5 < x < 1.5)
2. P (x > 0.25)
3. P (x < 0.75)
4. P (x = 1.5)
5. P (x > 2)

الحل

1) P(0.5 < x < 1.5) = $\int_{0.5}^{1.5} f(x)\,dx$

$= \int_{0.5}^{1.5} (\frac{1}{2})\,dx$

$= \frac{1}{2}x \,|_{0.5}^{1.5}$

$= \frac{1}{2}(1.5 - 0.5) = 0.5$

2) P(x > 0.25) = $\int_{0.25}^{2} f(x)\,dx$

$= \int_{0.25}^{2} (\frac{1}{2})\,dx$

$= \frac{1}{2}x \,|_{0.25}^{2}$

$= \frac{1}{2}(2 - 0.25) = 0.875$

3) P(x < 0.75) = $\int_{0}^{0.75} f(x)\,dx$

$= \int_{0}^{0.75} (\frac{1}{2})\,dx$

$= \frac{1}{2}x \,|_{0}^{0.75}$

$= \frac{1}{2}(0.75 - 0) = 0.375$

4) P(x = 1.5) = 0 (الاحتمال عند أي نقطة يساوي صفر)

5) P(x > 2) = 0 (القيم أكبر من 2 تقع خارج مجال الدالة)

مثال (2)

هل الدوال التالية هي دوال كثافة احتمال لمتغير متصل؟

$$1)\ f(x) = \frac{1}{3}, \quad 0 \le x \le 3$$

$$2)\ f(x) = \frac{2}{5}, \quad 1 \le x \le 2$$

الحل

نتحقق من شروط دالة كثافة الاحتمال.

$$1)\ f(x) = \frac{1}{3},\ 0 \le x \le 3$$

- **الشرط الأول محقق (قيم الدالة موجبة)**
- **الشرط الثاني (مجموع الاحتمالات):**

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{3}\right) dx = = \frac{1}{3}x\ \Big|_0^3 = \frac{1}{3}(3-0) = 1$$

∴ الدالة هي دالة كثافة احتمال.

نتحقق من شروط دالة كثافة الاحتمال.

$$2)\ f(x) = \frac{2}{5},\ 1 \le x \le 2$$

- **الشرط الأول محقق (قيم الدالة موجبة)**
- **الشرط الثاني (مجموع الاحتمالات):**

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{5}\right) dx = = \frac{2}{5}x\ \Big|_1^2 = \frac{2}{5}(2-1) = 0.4 \neq 1$$

∴ الدالة ليست دالة كثافة احتمال.

التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتصل :

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X ، حيث $a<x<b$
فإن معادلة القيمة المتوقعة والتباين يمكن كتابتها كما يلي :

$$\mu = E(X) = \int_a^b x\ f(x)dx \qquad \text{(القيمة المتوقعة)}$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \qquad \text{(التباين)}$$

حيث $E(X^2) = \int_a^b x^2\ f(x)dx$

مثال (3)

احسب التوقع والتباين للمتغير العشوائي X الذي له دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f(x) = \frac{1}{3}, \qquad 0 \le x \le 3$$

الحل

$$E(X) = \int x\, f(x)\, dx \qquad \text{(القيمة المتوقعة)}$$

$$= \int_0^3 x \left(\frac{1}{3}\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \int_0^3 x\ dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right|_0^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \qquad \text{(التباين)}$$

$$E(X^2) = \int x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_0^3 x^2 \left(\frac{1}{3}\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \int_0^3 x^2\ dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 3$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 3 - (1.5)^2 = 0.75$$

مثال (4)

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لاوزان الرسائل (بالجرام) التي تنقلها إحدى شركات البريد معطاه على النحو التالي :

$$f(x) = 0.003\, x^2, \qquad 0 < x < 10$$

أوجد:

1) احتمال أن يزيد وزن الرسالة عن 7 جرامات.
2) القيمة المتوقعة لوزن الرسالة.
3) الانحراف المعياري لوزن الرسالة .

الحل

$$1)\ P(x > 7) = \int_7^{10} f(x)\, dx$$

$$= \int_7^{10} (0.003\, x^2)\, dx$$

$$= 0.003\ \frac{x^3}{3}\ \Big|_7^{10}$$

$$= 0.003\ \left(\frac{10^3}{3} - \frac{7^3}{3}\right) = 0.657$$

$$E(X) = \int\ x\, f(x)\, dx \qquad \text{(القيمة المتوقعة)}$$

$$= \int_0^{10} x\, (0.003\, x^2)\, dx$$

$$= 0.003\ \int_0^{10} x^3\, dx$$

$$= 0.003\ \left(\frac{x^4}{4}\ \Big|_0^{10} = 0.003\ \left(\frac{10^4}{4}\right) = 7.5\right.$$

$$E(X^2) = \int\ x^2 f(x)\, dx \qquad \text{(الجزء الأول في صيغة حساب التباين)}$$

$$= \int_0^{10} x^2 (0.003\, x^2)\, dx$$

$$= 0.003\ \int_0^{10} x^4\, dx$$

$$= 0.003\ \left(\frac{x^5}{5}\ \Big|_0^{10} = 0.003\ \left(\frac{10^5}{5}\right) = 60\right.$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \qquad \text{(التباين)}$$

$$= 60 - (7.5)^2 = 3.75$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3.75} \approx 1.94 \qquad \text{(الانحراف المعياري)}$$

المحاضرة الخامسة

توزيعات إحصائية منفصلة خاصة

التوزيع الاحصائي:

التوزيع الإحصائي هو ببساطة الشكل الذي تأخذه مجموعة البيانات. وشكل البيانات مهم جدا في تحليلها ووصفها وكخطوة تسبق قرار استخدام أي اسلوب إحصائي .

ويرتبط التوزيع الإحصائي عادة بنوع البيانات سواء كانت متصلة أم منفصلة، ويناسب النوع المنفصل غالبا المقاييس الاسمية والترتيبية أما التوزيعات الإحصائية المتصلة فهي الانسب للبيانات الكمية المتصلة ولها أهمية كبيرة في العلوم الإحصائية وذلك لان اغلب الاختبارات الإحصائية تتعامل مع هذا النوع من البيانات.

أ- التوزيع ذو الحدين (التوزيع الثنائي)

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان النتيجة محل الاهتمام وتسمى بحالة النجاح، والأخرى تسمى بحالة الفشل، ومن امثلة ذلك:

إذا كان احتمال أن يكون الفرد مدخن = $\frac{1}{3}$ عند سؤال 10 أفراد فكل منهم قد يكون....	غير مدخن / مدخن
إذا كان احتمال وجود مصباح تالف في صندوق = $\frac{2}{7}$، عند سحب مصباح من كل صندوق من 50 صندوق في كل مرة قد يكون..	سليم / تالف
عند رمي قطعة النقد ، الناتج قد يكون ...	صورة / كتابة
إذا كان احتمال حضور الطالبة للمحاضرة $\frac{1}{4}$، بمتابعة حضور الطالبة في 5 محاضرات قد تكون ...	حاضرة / غائبة

جميع التجارب السابقة تحقق الشروط التالية:

1. نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.
2. نتيجة كل محاولة مستقلة عن الاخرى .
3. احتمال النجاح في كل محاولة يكون ثابت و ليكن p واحتمال الخطأ او الفشل $q=1-p$
4. إجراء التجربة عدة مرات فتكون هناك n محاولة.

تجربة ذات حدين

إذا كان X متغيرا عشوائيا لتجربة ذات الحدين، عند اجراء التجربة n من المرات وكان احتمال الحصول على حالة نجاح في أي مرة يساوي p واحتمال الفشل q=1-p، فإن احتمال تحقق عدد x من حالات النجاح هو:

التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين X عند اجراء التجربة n مرة:

$$p(X=x)=p(x)=\binom{n}{x}\,p^{x}\,q^{n-x}$$

حيث أن p احتمال النجاح و $q=1-p$ و x= 0,1,2,3.......n

مراجعة على التوافيق

القانون الأساسي:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

- $\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x}$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

إذا كان X متغير ذات الحدين n,p فإن: $X \sim Bin(n,p)$

التوقع الرياضي ← $E(X) = \mu = np$

التباين ← $V(X) = \sigma^2 = npq$

شكل التوزيع:

يتحدد شكل التوزيع ذي الحدين وفقا لقيمة احتمال النجاح كما يلي:

- إذا كان $p = 0.5$ فإن التوزيع يكون متماثل.
- إذا كان $p < 0.5$ فإن التوزيع يكون موجب الالتواء.
- إذا كان $p > 0.5$ فإن التوزيع يكون سالب الالتواء.

تمرين..

في تجربة إلقاء قطعة نقود خمس مرات أوجد احتمال ظهور الوجه H ثلاث مرات واحسب التوقع والتباين ؟

الحل..

1- $p(X=3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3} = \binom{5}{3} (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^2$

2- $E(X) = \mu = np = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

3- $\sigma^2 = npq = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

مثال..

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الإحصائي يساوي 80% وتم اختيار 4 طلاب عشوائيا ، المطلوب

1. كون جدول توزيع ذي الحدين .
2. أوجد احتمال نجاح 3 طلاب .
3. أوجد احتمال رسوب 3 طلاب .
4. أوجد احتمال نجاح طالبين على الاقل .
5. القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) .
6. الانحراف المعياري .

الحل.. **P=0.80 ,q=1-P=0.20, n=4**

1- جدول التوزيع ذي الحدين:

عدد الطلاب الناجحين	عدد الطلاب الراسبين	الاحتمال	الناتج
0	**4**	$= 4C0 \times (0.80)^0 \times (0.20)^4$	**0.0016**
1	**3**	$= 4C1 \times (0.80)^1 \times (0.20)^3$	**0.0256**
2	**2**	$= 4C2 \times (0.80)^2 \times (0.20)^2$	**0.1536**
3	**1**	$= 4C3 \times (0.80)^3 \times (0.20)^1$	**0.4096**
4	**0**	$= 4C4 \times (0.80)^4 \times (0.20)^0$	**0.4096**

2- احتمال نجاح 3 طلاب: P(3) = 0.4096

3- احتمال رسوب 3 طلاب: P(1) = 0.0256

4- احتمال نجاح طالبين على الاقل P(2)+P(3)+P(4)=0.9728

5- القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) = $\mu = n \times p = 4 \times 0.80 = 3.2$

6- الانحراف المعياري = $\sigma = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{4 \times 0.8 \times 0.2} = 0.8$

مثال..

إذا كان احتمال انسحاب موظف من العمل قبل بلوغ سن التقاعد هو 60% ، وتم اختيار 5 موظفين عشوائيا ، المطلوب

1. كون جدول توزيع ذي الحدين .
2. أوجد احتمال انسحاب 4 موظفين .
3. أوجد احتمال استمرار 3 موظفين في العمل حتى التقاعد.
4. أوجد احتمال انسحاب 3 موظفين على الاقل.
5. القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) .
6. الانحراف المعياري .

الحل.. **P=0.60 , 1-P=0.40, n=5**

1- جدول التوزيع ذي الحدين:

عدد الموظفين المنسحبين	عدد الموظفين غير المنسحبين	الاحتمال	الناتج
0	**5**	$= 5C0 \times (0.60)^0 \times (0.40)^5$	**0.01024**
1	**4**	$= 5C1 \times (0.60)^1 \times (0.40)^4$	**0.0768**
2	**3**	$= 5C2 \times (0.60)^2 \times (0.40)^3$	**0.2304**
3	**2**	$= 5C3 \times (0.60)^3 \times (0.40)^2$	**0.3456**
4	**1**	$= 5C4 \times (0.60)^4 \times (0.40)^1$	**0.2592**
5	**0**	$= 5C4 \times (0.60)^5 \times (0.40)^0$	**0.07776**

2- احتمال انسحاب 4 موظفين: P(3) = 0.2592

3- احتمال استمرار 3 موظفين: P(1) = 0.2304

4- احتمال انسحاب 3 موظفين على الاقل P= (p(3) + p(4) + p(5)) = 0.07776+0.2592+0.3456 = 0.68256

5- القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) = $\mu = n \times p = 5 \times 0.60 = 3$

6- الانحراف المعياري = $\sigma = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{5 \times 0.6 \times 0.4} = 1.095445$

مثال..

وجد في إنتاج احد المصانع انه من بين 1000 وحدة إنتاج يوجد 150 وحدة معيبة. أخذت عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات، أوجد الاحتمالات التالية:

1- الوحدات المختارة كلها سليمة
2- على الاكثر توجد واحدة معيبة
3- على الاقل توجد وحدتان معيبتان
4- القيمة المتوقعة والتباين للوحدات المعيبة

الحل..

احتمال النجاح (الحصول على وحدة معيبة) p = 150/1000 = 0.15

احتمال الفشل (عدم الحصول على وحدة معيبة) q = 1-p= 1-0.15 =0.85

عدد المحاولات (عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات) n = 5

X متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات المعيبة يأخذ القيم 0, 1, 2, 3, 4, 5 ويكون له توزيع ذي الحدين:

$$p(X=x)=\binom{5}{x}(0.15)^{x}(0.85)^{5-x} \quad , \quad x=0,1,2,3,4,5$$

1- الوحدات كلها سليمة يعني أن X = 0

$$p(X=0)=\binom{5}{0}(0.15)^{0}(0.85)^{5-0}=\frac{5!}{0!(5-0)!}(1)(0.85)^{5}=0.4437$$

2- على الأكثر توجد وحدة معيبة يعني أن $X \le 1$

$$P(X\le 1) = p(X=0) + p(X=1)$$

$$p(X\le 1)=\binom{5}{0}(0.15)^{0}(0.85)^{5}+\binom{5}{1}(0.15)^{1}(0.85)^{4}$$

$$=0.4437+\frac{5!}{1!5!}(0.15)(0.522)$$

$$=0.4437+5\times 0.0783=0.4437+0.3915=0.8352$$

3- على الأقل توجد وحدتان معيبتان ، أي أن $X \ge 2$

$$P(X \ge 2) = 1 - p(X < 2)$$

$$= 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)]$$

$$= 1 - 0.8325 = 0.1648$$

4- القيمة المتوقعة و التباين للوحدات المعيبة .

القيمة المتوقعة $= n . P = 5 \times 0.15 = 0.75$

التباين $= n \times p \times (1-p)$

$= 5 \times 0.15 \times 0.85 = 0.6375$

ب- توزيع بواسون Poisson Distribution

توزيع بواسون هو توزيع احتمالي منفصل آخر يستخدم لتحديد احتمال وقوع عدد معين من النجاحات في وحدة الزمن، وذلك عندما تكون الاحداث أو "النجاحات" مستقلة عن بعضها البعض وعندما يبقى متوسط عدد النجاحات ثابتا لوحدة الزمن. عندئذ:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0,1,2,...$$

حيث : $P(x)$ = احتمال حدوث عدد x من النجاحات.

λ = متوسط أو معدل تكرار الحدث في وحدة الزمن. حيث $\lambda = np$

e = أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعي ، وقيمتها تساوي 2.718 تقريبا، ويمكن حسابها باستخدام الآلة الحاسبة.

$x!$ = مضروب العدد x " ويساوي: $x(x-1)(x-2)\dots(2)(1)$

- يعتبر بديلا لتوزيع ذي الحدين ولكن عندما تكون n كبيرة و p صغيرة جدا .
- يصف متغيرات عشوائية متقطعة تعبر عن عدد كبير من الظواهر مثل:
  - عدد الكرات الحمراء في عينة الدم
  - عدد الاخطاء المطبعية في الصفحات المختلفة للكتاب
  - عدد القطع التالفة في الانتاج الكلى لسلعة معينة
- إذا كان للمتغير العشوائي X توزيع بواسون فان: التوقع: $E(X) = \lambda$

  التباين: $Var(X) = \lambda$

مثال.. في كمية من القطع المصنعة، كان من المعلوم أن نسبة القطع المعيبة بها هي 0.3%.

أخذت عينة عشوائية حجمها 350 قطعة. احسب الاحتمالات الاتية:

1. عدم وجود أية قطع معيبة.
2. وجود قطعة معيبة.
3. وجود قطعتان معيبتان.
4. وجود على الاكثر قطعتان معيبتان.

الحل..

عملية سحب العينة تمثل سلسلة عددها n=350

واحتمال أن تكون القطعة معيبة (النجاح) p=0.003

واضح أن n كبيرة و p صغيرة، ولذلك يرجح استخدام توزيع بواسون $\lambda = np = 350(0.003) = 1.05$

بفرض أن X يمثل عدد القطع المعيبة في العينة له توزيع بواسون

$$p(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-1.05}\frac{1.05^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, ...$$

1- عدم وجود أي قطع معيبة في العينة

$$p(X = 0) = e^{-1.05}\frac{1.05^0}{0!} = 0.350$$

2- وجود قطعة واحدة معيبة في العينة

$$p(X = 1) = e^{-1.05}\frac{1.05^1}{1!} = (0.3499)(1.05) = 0.367$$

3- وجود قطعتان معيبتان في العينة

$$p(X = 2) = e^{-1.05}\frac{1.05^2}{2!} = (0.3499)(0.55125) = 0.193$$

4- وجود على الأكثر وحدتان معيبتان

$P(X \le 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$

$= 0.350 + 0.367 + 0.193$

$= 0.91$

مثال..

اذا كان عدد الاخطاء المطبعية في كتاب يتكون من 600 صفحة هو 50 خطأ

فإذا كانت الاخطاء تتوزع توزيعا عشوائيا.. فما احتمال إذا اختيرت 10 صفحات عشوائيا أن لا تحتوي على أخطاء.

الحل..

بفرض أن X يمثل عدد الاخطاء في كل صفحة وأن عدد المحاولات (الصفحات) تمثل سلسلة من محاولات برنولي عددها n = 10

ونسبة الخطأ (النجاح) هي $p = \frac{50}{600} = 0.083$

وعليه فإن: $\lambda = np = 10(0.083) = 0.83$

وبالتالي فإن لـ X توزيع بواسون:

$$p(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-0.83}\frac{0.83^x}{x!}$$ **x = 0, 1, 2, 3, …**

احتمال أن لا يوجد أخطاء يساوى

$$P(X=0) = e^{-0.83}\frac{0.83^0}{0!}$$

= 0.436

مثال..

إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الاسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا, إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الاسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

- ما نوع المتغير العشوائي؟
- اكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير.
- احسب الاحتمالات التالية:
  - احتمال أن الاسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
  - احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الاكثر خلال الشهر؟
- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.
- حدد شكل التوزيع.

الحل..

عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة متغير كمي منفصل، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو:

$$X : \{x = 0,1,2,3,\ldots\}$$

شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $\lambda = 3$ ، إذا دالة الاحتمال هي:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-3}3^x}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots$$

حساب الاحتمالات:

حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر، P(2)

$$P(2) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = \frac{0.0498(9)}{2\times 1} = 0.22404$$

احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الاكثر خلال الشهر هو:

$$P(X \le 3) = p(3) + p(2) + p(1) + p(0)$$

$$= \left[\frac{3^3}{3!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^0}{0!}\right]\left[\frac{0.0498}{1}\right]$$

$$= [0.0498]\left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1}\right) = 0.0498(13) = 0.6474$$

حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- **الوسط الحسابي (μ) في حالة توزيع بواسون هو معلمة معطاة هي:** $\mu = 3$
- **التباين يساوي الوسط الحسابي: أي أن:** $\sigma^2 = \mu = 3$
- **ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو:** $\sigma = \sqrt{3} = 1.732$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التي سبق استخدامها ، وهو:

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu}\times 100 = \frac{1.732}{3}\times 100 = 57.7\%$$

تحديد شكل التوزيع: دائما توزيع بواسون موجب الالتواء

المحاضرة السادسة

توزيعات إحصائية متصلة خاصة

التوزيع الطبيعي

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي لها دوال كثافة احتمال محددة ومنها:

- التوزيع الطبيعي
- التوزيع الطبيعي (القياسي) المعياري
- توزيع t

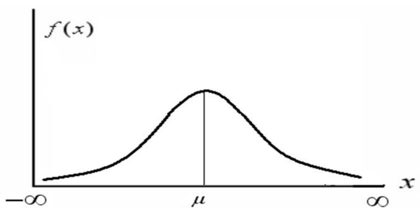
ويعتبر التوزيع الطبيعي Normal Distribution من أكثر التوزيعات الاحتمالية المتصلة استخداما في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها الى هذا التوزيع.

والتوزيع الطبيعي هو توزيع احتمالي متصل، وهو جرسي الشكل ومتماثل حول الوسط الحسابي، ويمتد الى مالا نهاية في الاتجاهين، ولكن معظم المساحة (الاحتمال) تتركز حول الوسط الحسابي.

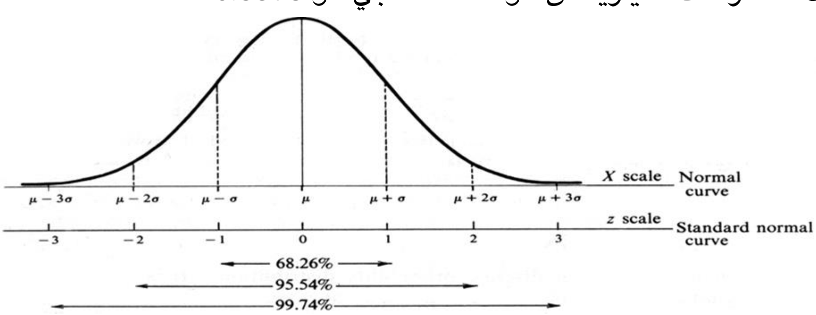
خصائص التوزيع الطبيعي :

- منحنى التوزيع له شكل ناقوسي أو جرسي (أي يشبه الجرس).
- متماثل حول المتوسط، بمعنى أن الجزء الذي على يمين المتوسط مطابق للجزء الايسر
- التوزيع الطبيعي له وسط ووسيط ومنوال واحد وكلها متساوية القيمة .
- التوزيع معتدل، بمعنى أن الالتواء (الاطراف) والتفلطح (القمة) يساوي صفر .
- الذيلين الايمن والايسر يقتربان من الخط الافقي ولكن لا يلامسانه.
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد صحيح.
- يتحدد شكل منحنى التوزيع الطبيعي تماما بمعلومية قيمتين هما الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ لهذا التوزيع .
- تدل قيمة μ على مكان مركز المنحنى، كما تدل σ على كيفية الانتشار.
- القيمـــة الصغـــيرة لـ σ تعني أن لدينا منحنى طويل مدبب، والقيمة الكبيرة لها تعني ان المنحى قصير ومفرطح.

والشكل التالي يوضح ذلك..



- احتمال وقوع أية مشاهدة على بعد انحراف معياري واحد من الوسط الحسابي هو 0.6827
- احتمال وقوع أي مفردة على بعد انحرافين معياريين من الوسط الحسابي هو 0.9545
- احتمال وقوع أية مفردة على بعد ثلاثة انحرافات معيارية من الوسط الحسابي هو 0.9973



معالم التوزيع الطبيعي :

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما :

الوسط الحسابي : $E(X)=\mu$ والتباين $Var(X)=\sigma^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير بالرموز: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

ويعني ذلك أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2

شكل دالة كثافة الاحتمال:

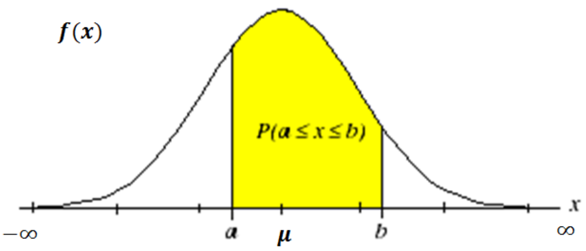
اذا كان لدينا توزيع طبيعي ذو وسط حسابي μ وانحراف معياري σ فإن معادلة منحنى دالة كثافة الاحتمال تكون على الصورة التالية:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty<x<\infty,\qquad \pi=22/7$$

كيفية حساب الاحتمالات:

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو p(a<x<b) هذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل التالي :

$$p(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الاحصائيون إلى عمل تحويلة رياضية يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات.

حساب الاحتمالات: (التوزيع الطبيعي القياسي)

نلاحظ من الخصائص السابقة للتوزيع الطبيعي أن شكل التوزيع يختلف مع اختلاف المتوسط والتباين ، ولتسهيل حساب الاحتمالات فقد اعد الإحصائيون جدولا خاصا لحساب الاحتمالات المتعلقة بالتوزيع الطبيعي وذلك في حالة واحدة فقط هي عندما تكون

قيمة μ تساوي الصفر وقيمة σ تساوي واحد ، ويطلق على التوزيع في هذه الحالة «التوزيع الطبيعي القياسي»

التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري)

العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي القياسي (Z)

اذا كان $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ فان $z\sim N(0,1)$

حيث: $$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

ويطلق على القيمة (z) قيمة قياسية أو معيارية .

ولحساب أي احتمالات تخص التوزيع الطبيعي يجب أولا تحويل القيم إلى قيم قياسية أو معيارية ثم الاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي القياسي لحساب الاحتمالات .

مثال 1

إذا كانت لدينا مجموعة من درجات الحرارة خلال شهر مارس هى 42 ,40 ,35 ,33 ,30 وإذا علم أن درجات الحرارة خلال هذا الشهر لها توزيع طبيعي بتوقع رياضي مقداره 35 وانحراف معياري 2 ، أوجد القيم المعيارية (القياسية) لدرجات الحرارة المعطاة

الحل

بفرض ان X يمثل درجات الحرارة خلال شهر مارس

$\mu=35$, $\sigma=2$, $Z=(X-35)/2$

1. $X=30\Rightarrow Z=(30-35)/2=(-5)/2=-2.5$
2. $X=33\Rightarrow Z=(33-35)/2=(-2)/2=-1$
3. $X=35\Rightarrow Z=(35-35)/2=(0)/2=0$
4. $X=40\Rightarrow Z=(40-35)/2=(5)/2=2.5$
5. $X=42\Rightarrow Z=(42-35)/2=(7)/2=3.5$

مثال 2

إذا كان Z متغيرا عشوائيا توزيعه هو التوزيع الطبيعي المعياري. احسب الاحتمالات الاتية :

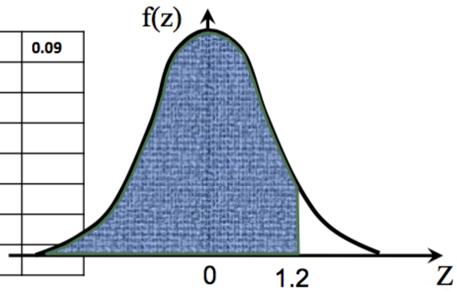
1. $P(Z<1.2)$ 2. $P(Z<-0.11)$ 3. $P(0.32<Z<1.24)$

الحل

1- يمثل هذا الاحتمال المساحة المظللة تحت المنحنى ويتم إيجاد هذه المساحة (الاحتمال) من جدول التوزيع الطبيعي المعياري

1. $P(Z<1.2)=0.8849$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05			0.09
0.0		.5040							
0.1									
0.2									
1.2	.8849					.8944			

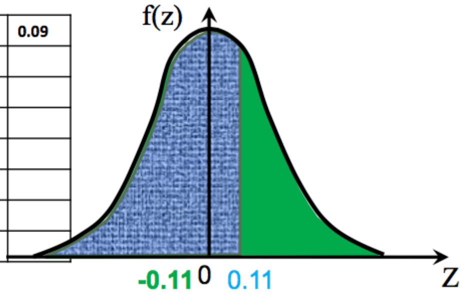


2. P(Z < -0.11) = 1 - P(Z < 0.11)

يمثل هذا الاحتمال المساحة المظللة الخضراء يسار المنحنى وهى تساوى المساحة الخضراء يمين المنحنى وبالتالي فهي تساوى المساحة الكلية تحت المنحنى (تساوى الواحد) مطروحا منها المساحة الزرقاء (من الجدول)

2. P(Z < -0.11) = 1 - P(Z < 0.11) = 1 – 0.5438 = 0.4562

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05			0.09
0.0		.5040							
0.1		.5438							
0.2									
1.2	.8849					.8944			

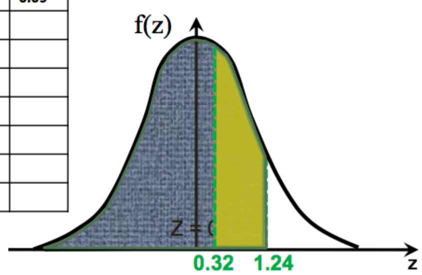


3. P(0.32 <Z < 1.24) = P(Z < 1.24) - P(Z < 0.32)

يمثل هذا الاحتمال المساحة المظللة الصفراء وهى تساوى المساحة البنى (تستخرج من الجدول) مطروحا منها المساحة الزرقاء (تستخرج من الجدول)

3. P(0.32 <Z < 1.24) = P(Z < 1.24) - P(Z < 0.32) = 0.8925 – 0.6293 = 0.6270

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05			0.09
0.0		.5040							
0.1		.5438							
0.2									
0.3			.6293						
1.2	.8849				.8925	.8944			



Tables of the Normal Distribution

Probability Content from -oo to Z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

مثال 3

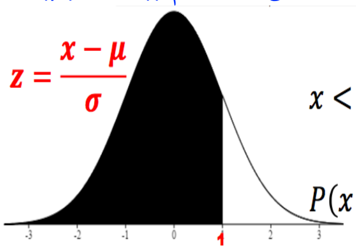
إذا كان متوسط طول الطالب يتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط 170 سم وانحراف معياري 10 سم. تم اختيار احد الطلاب عشوائيا، فأوجد:

1. احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 180 سم.
2. احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 150 سم.
3. احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 175 سم .
4. احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 160 سم.
5. احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 175 سم و 185 سم.
6. احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 150 سم و 165 سم.
7. احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 162 سم و 178 سم .

الحل

1- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 180 سم ((p(x<180))

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$



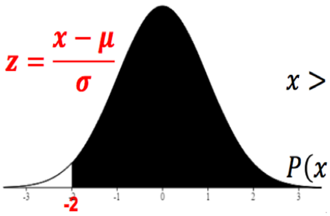
$$x < 180 \Rightarrow z < \frac{180-170}{10}$$

$$P(x < 180) = P(z < 1)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي: p(z<1)= 0.8413

2- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 150 سم ((p(x>150))

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$



$$x > 150 \Rightarrow z > \frac{150-170}{10}$$

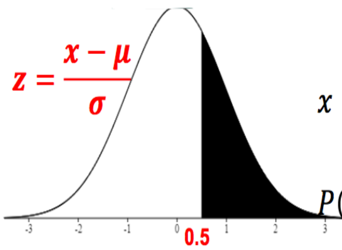
$$P(x > 150) = P(z > -2)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي

P(z>-2)=P(z<2)= 0.9772

3- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من 175 سم ((p(x>175))

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$



$$x > 175 \Rightarrow z > \frac{175-170}{10}$$

$$P(x > 175) = P(z > 0.5)$$

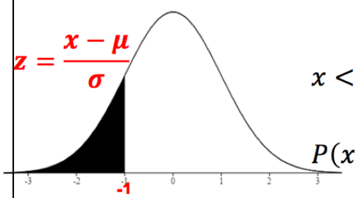
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

P(z > 0.5)=1-P(z < 0.5)

=1 - 0.6915 = 0.3085

4- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من 160 سم ((P(x<160))

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$



$$x < 160 \Rightarrow z < \frac{160-170}{10}$$

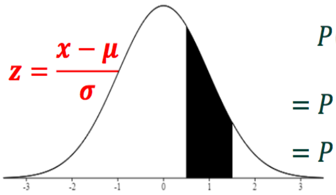
$$P(x < 160) = P(z < -1)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي

P(z < - 1)=P (z > 1)

= 1 – 0.8413 = 0.1587

5-احتمال ان ينحصر طول الطالب بين 175سم و185سم
(p(175 < x < 185))

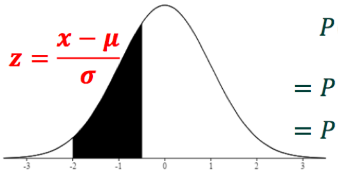


$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$P(175 < x < 185)$$
$$= P(\frac{175-170}{10} < z < \frac{185-170}{10})$$
$$= P(0.5 < z < 1.5)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:
P(z < 1.5)- P(z < 0.5)
= 0.9332 – 0.6915 = 0.2417

6 - احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 150 سم و 165 سم
(p(150 < x < 165))

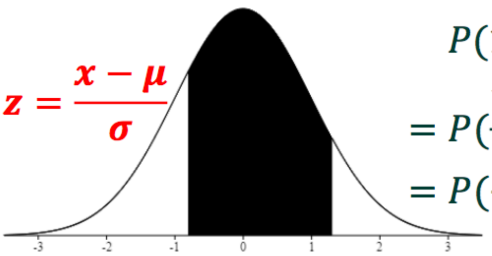


$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$P(150 < x < 165)$$
$$= P(\frac{150-170}{10} < z < \frac{165-170}{10})$$
$$= P(-2 < z < -0.5)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي
P(z < 2) - P (z < 0.5)
= 0.9772 – 0.6915 = 0.2857

7- احتمال أن ينحصر طول الطالب بين 162 سم و 183 سم (p(162 < x < 183))



$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$P(162 < x < 178)$$
$$= P(\frac{162-170}{10} < z < \frac{183-170}{10})$$
$$= P(-0.8 < z < 1.3)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي:
p (z < 1.3) – P (z < - 0.8)
P (z < 1.3) + P (z < 0.8) – 1
= 0.9032 + 0.7881 – 1 = 0.6913

تعليق على المثال السابق : حالات حساب الاحتمالات بالاستعانة بالجدول :

1- أقل من قيمة موجبة.
2- أكبر من قيمة سالبة.
نفس القاعدة : احتمال من الجدول مباشرة

3- أكبر من قيمة موجبة.
4- أقل من قيمة سالبة.
نفس القاعدة : 1 – الاحتمال من الجدول

5- بين قيمتين موجبتين.
6- بين قيمتين سالبتين.
نفس القاعدة : احتمال القيمة الأكبر – احتمال القيمة الأصغر

7- بين قيمتين إحداهما موجبة والأخرى سالبة.
احتمال القيمة الأولى + احتمال القيمة الثانية - 1

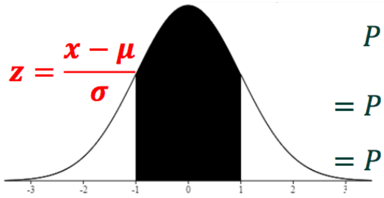
مثال 4

افترض أن إدارة المرور بالأحساء وضعت جهازا للرادار على طريق الدمام عند مدخل المبرز وذلك لضبط السيارات المسرعة في فترة معينة من اليوم، افترض أن X تمثل السرعة في الساعة للسيارات التي تمر بمدخل المبرز في فترة عمل الرادار، إذا كانت X تتوزع توزيعا معتدلا وسطه الحسابي 60 ميلا وتباينه 25 ميلا، أوجد التالي:

- نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا في الساعة.
- نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 50 ميلا و 70 ميلا في الساعة.
- نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 45 ميلا و 75 ميلا في الساعة.
- عدد السيارات التي تكون سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا من بين 5000 سيارة

-1 نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا في الساعة:

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$



$$P(55 < x < 65)$$
$$= P(\frac{55-60}{\sqrt{25}} < z < \frac{65-60}{\sqrt{25}})$$
$$= P(-1 < z < 1)$$

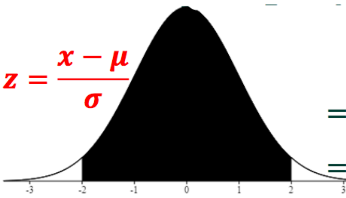
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي: =2*P(z < 1) -1

=2(0.8413) – 1 = 0.6826

النسبة = 68.26٪

-2 نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 50 ميلا و 70 ميلا في الساعة :

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$



$$P(50 < x < 70)$$
$$= P(\frac{50-60}{\sqrt{25}} < z < \frac{70-60}{\sqrt{25}})$$
$$= P(-2 < z < 2)$$

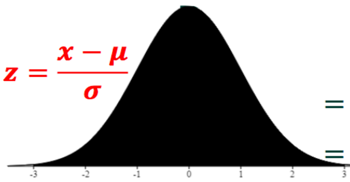
بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي: =2*P(z < 2) -1

=2(0.9772) – 1 = 0.9544

النسبة = 95.44٪

-3 نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 45 ميلا و 75 ميلا في الساعة:

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$



$$P(45 < x < 75)$$
$$= P(\frac{45-60}{\sqrt{25}} < z < \frac{75-60}{\sqrt{25}})$$
$$= P(-3 < z < 3)$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي القياسي: =2*P(z < 3) -1

=2(0.9987) – 1 =0.9974

النسبة = 99.74٪

الحل السابق يؤكد خصائص التوزيع الطبيعي السابق ذكرها ، حيث :

- احتمال وقوع أية مشاهدة على بعد انحراف معياري واحد من الوسط الحسابي هو 0.6826
- احتمال وقوع أي مفردة على بعد انحرافين معياريين من الوسط الحسابي هو 0.9544
- احتمال وقوع أية مفردة على بعد ثلاثة انحرافات معيارية من الوسط الحسابي هو 0.9974

-4 عدد السيارات المتوقع سرعتها بين 55 ميلا و 65 ميلا من بين 5000 سيارة:

العدد = إجمالي عدد السيارات × نسبة السيارات التي تتراوح سرعتها بين 55 و 65 ميلا

العدد = 5000 × 0.6826 = 3413 سيارة

توزيع t

توجد عائلة أخرى من المتغيرات العشوائية المتصلة المستخدمة في الاحصاء الاستدلالي وهي مجموعة المتغيرات العشوائية t

ويعتبر وليم جوست W. S. Gosset هو أول من درس تلك المتغيرات حيث سجل نتائجه عام 1908 تحت اسم مستعار هو student ولذلك يسمى توزيع t في بعض الاحيان بتوزيع ستيودنت .

ويرمز لهذه العائلة من التوزيعات بالرموز $(t_1,t_2,t_3 \ldots\ldots t_{df})$ ، كما يرمز لمعلمة التوزيع الوحيدة ويطلق عليها درجات الحرية بالرمز $\boldsymbol{\nu}$ (حرف إغريقي ينطق نيو) وهي تأخذ القيم (1,2,… ,df)

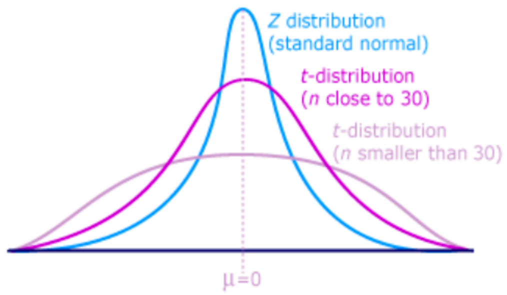
العلاقة بين توزيع t والتوزيع الطبيعي :

لاشتقاق المتغير العشوائي t من المتغير العشوائي (الطبيعي) الاعتدالي، فإن ذلك يتطلب معرفة قيمة المتوسط μ للمتغير العشوائي الاعتدالي ، بينما لا نحتاج إلي معرفة انحرافه المعياري .

وبفرض أن قيمة المتغير العشوائي الاعتدالي قد تم ملاحظتها n من المرات ($x_1, x2 \ldots , x_n$) وأن هذه الملاحظات البالغ عددها n تكون عينة متوسطها $\bar{x}$ وانحرافها المعياري s ، فان قيم المتغير العشوائي t تحسب باستخدام الصيغة التالية :

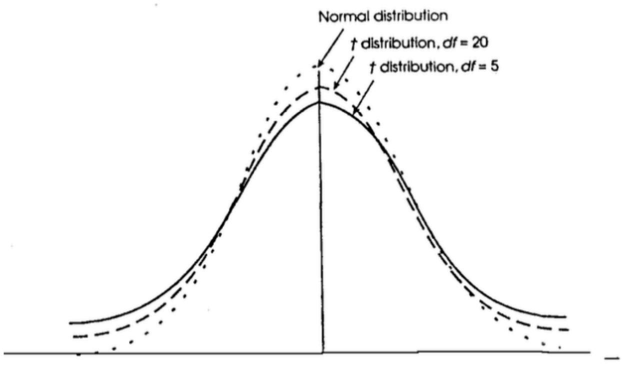
$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

وتتحدد درجة حرية المتغير العشوائي t بأنها تساوي (n-1) كذلك فإنه لكل قيم n نجد أن توزيع t له قيمة واحدة عند النقطة صفر، وهو توزيع متماثل يقل تدريجيا كلما اتجهنا ناحيتي الذيلين الايمن والايسر، وهذا ما يوضحه الشكل التالي :



ونلاحظ من الشكل السابق ان توزيع t يشبه توزيع z فيما عدا أنه أكثر انتشارا diffuse لانه أكثر كثافة عند الذيلين وخاصة عندما تكون n صغيرة.

أما إذا كانت n كبيرة فإن توزيع t يكون أقل انتشارا وأكثر قربا من شكل توزيع z ، وبزيادة درجات الحرية يقترب توزيع t من التوزيع الاعتدالي ، وهذا ما يوضحه الشكل التالي :



دالة الاحتمال لتوزيع t :

لاي متغير عشوائي يتبع توزيع t بدرجات حرية ν ، فإن معادلة منحنى دالة كثافة الاحتمال تكون على الصورة التالية :

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

حيث: Γ **هي دالة جاما ،** $\Gamma(n) = (n-1)!$

ويوجد جدول خاص بتوزيع t عند درجات حرية مختلفة يعطي القيم المناظرة لبعض الاحتمالات الخاصة بالتوزيع.

خصائص توزيع : t

- متوسط المتغير العشوائي t يساوي صفر لجميع درجات الحرية. وهذا يعني أن E(t)= 0
- التباين للمتغير العشوائي t بدرجات حرية أكبر من اثنين يساوي:

$$\sigma^2 = V(t) = \frac{\nu}{\nu-2}$$

حيث ν هي درجة حرية المتغير العشوائي t .

ويتبين من المعادلة السابقة أنه كلما زادت درجات حرية المتغير العشوائي t بحيث تصل إلي 30 فأكثر، فإن الانحراف المعياري يقترب من الواحد الصحيح، وبصفة عامة فإن الانحراف المعياري لتوزيع t يتراوح بين 1.035 (ν=30) و 1.732 (ν=3)

ولذلك فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير t يكون قريبا جدا من التوزيع الطبيعي المعياري (المتغير العشوائي z) وبصفة خاصة عندما تكون $\nu > 30$ وفي هذه الحالة نستخدم جدول z للإجابة على الأسئلة الاحتمالية حول المتغير العشوائي t .

مثال 1

أوجد قيمة كل من (أ) t(0.05 , 10) (ب) t(0.025 , 20)

الحل:

(أ) بالبحث في جدول t عند تقاطع الصف 10 والعمود 0.05 نجد القيمة 1.812

(ب) بالبحث في جدول t عند تقاطع الصف 20 والعمود 0.025 نجد القيمة 2.086

مثال 2

أوجد المتوسط والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X~t (80)

الحل:

من خصائص التوزيع نعلم أن المتوسط يساوي الصفر.

حيث أن درجات الحرية = 8 ، فإن الانحراف المعياري يساوي

$$\sigma = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} = \sqrt{\frac{8}{8-2}} = 1.155$$

مثال 3

احسب القيمة الحرجة (نقطة القطع) من الجانبين لتوزيع t بدرجات حرية 15 عند مستوى الدلالة 0.1 .

الحل:

نقطة القطع من الجانبين هي التي تقسم مستوى الدلالة إلى قسمين متساويين أحدهما بالذيل الايمن والاخر بالذيل الايسر للتوزيع ، وبالتالي يخص كل جانب 0.05

بالبحث في الجدول توزيع t عند صف درجات الحرية 15 والعمود الخاص بمستوى الدلالة 0.05.

نجد أن القيمة عند تقاطع الصف والعمود تساوي 1.753 ، ويكون :

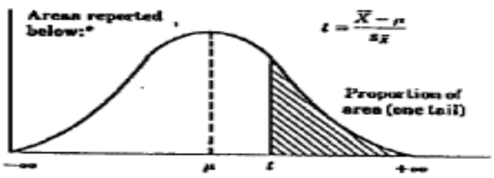
$$P(t_{15} \geq 1.753) = P(t_{15} \leq -1.753) = 0.05$$

$$P(-1.753 \leq t_{15} \leq 1.753) = 0.90$$

الجدول أدناه يعطي قيمة t

المقابلة للمساحة المظللة وقيمتها ∞

Proportions of Area for the t Distributions



df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898

df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

المحاضرة السابعة

مقدمة في المعاينة

- تهتم **نظرية المعاينة** بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه فيما يسمى بالاستدلال الإحصائي statistical inference
- يعتبر **الاستدلال الإحصائي** من أهم الادوات المساعدة على اتخاذ القرارات في الاقتصاد والاعمال وباقي العلوم، ويعني الاستدلال الإحصائي تقدير قيمة أو قيم غير معلومة تخص مجتمع الدراسة اعتمادا على بيانات عينة مأخوذة من هذا المجتمع ، وبمعنى آخر هو تعميم نتائج العينة على مجتمع الدراسة بكامله.
- تتمثل أدوات الاستدلال أو الاستنتاج الإحصائي بشكل أساسي في كل من التقدير واختبار الفرضيات.
- لكى يكون التقدير واختبار الفرضيات سليما، ينبغي أن يبنى على عينة ممثلة للمجتمع يتم اختيارها وفقا لطبيعة الهدف من الدراسة.

المجتمع والعينة:

المجتمع Population

لاي مجموعة من المفردات تشترك في صفة أو صفات محددة وتكون موضوع دراسة أو بحث ، فإن هذه المجموعة يطلق عليها إحصائيا مجتمع الدراسة أو اختصارا **المجتمع Population** .

والمجتمع قد يكون مجموعة ما من البشر أو أشجار أنواع معينة من الفاكهة أو الحيوانات الزراعية أو إنتاج دولة ما لسلع معينه خلال فترة زمنية محدده...الخ .

والمجتمع قد يكون محدودا إذا كان يمكن حصر عدد أفراده مثل سكان مدينة ما أو طلاب مرحلة تعليمية معينة ، وقد يكون المجتمع غير محدود (لانهائي) إذا كان لا يمكن حصر عدد أفراده مثل النجوم والكواكب أو الكائنات الحية بمياه المحيطات والانهار .

وعند دراسة صفة ما أو صفات معينه لمجتمع ما فإن البيانات الإحصائية عن تلك الصفة أو الصفات تجمع بأحد أسلوبين:

أولا : أسلوب الحصر الشامل (census) : وفيه تجمع البيانات عن كل مفرده من مفردات المجتمع، وهذا الاسلوب لا يتبع عادة إلا في حالة التعدادات التي تجريها الدول وتدعمها بإمكانيات ضخمه مثل تعدادات السكان والتعدادات الصناعية والتعدادات الزراعية .

ثانيا: أسلوب المعاينة (Sampling) : وفيه يتم جمع البيانات عن جزء من مفردات المجتمع يختار بطريقة أو بأخرى ويطلق عليه **عينة** (Sample) ثم بعد ذلك يتم تعميم نتائج الدراسة على المجتمع بأكمله .

المعالم Parameters والإحصاءات Statistics :

اعتاد البعض على معاملة القيم التي يحصل عليها من العينة وكأنها قيم مجتمعها، وهذا خطأ فادح .

فالمقاييس الإحصائية التي تحسب من بيانات مجتمع الدراسة بأكمله يطلق عليها..

معالم أو مؤشرات المجتمع (Parameters of population)، أما المقاييس الإحصائية التي تحسب من بيانات عينة مسحوبة من مجتمع الدراسة فيطلق عليها إحصاءات (Statistics)

وللتفرقة بين المعالم والاحصاءات يجب أن نرمز لكل منها برموز تختلف عن رموز الاخرى، على سبيل المثال يرمز للمتوسط الحسابي للمجتمع بالرمز μ بينما يرمز للمتوسط الحسابي للعينة بالرمز $\bar{x}$ ، أيضا يرمز للانحراف المعياري للمجتمع بالرمز σ بينما يرمز للانحراف المعياري للعينة بالرمز s ... وهكذا

بعض مزايا أسلوب المعاينة:

يتميز أسلوب المعاينة عن أسلوب الحصر الشامل بمزايا عديدة منها :

1. يؤدي استخدام العينات العشوائية إلى خفض تكاليف الدراسات الميدانية بسبب صغر حجم العينة بالنسبة إلى حجم المجتمع وهو ما يؤدي إلى تخفيض الاعباء الادارية والفنية التي تتطلبها أي دراسة ميدانية .
2. يتحقق وفر واضح في الوقت الذي ينفق في دراسة ميدانية على أساس عينة بدلا من الحصر الشامل وتتضح أهمية الوقت عندما نقوم بدراسة ظاهرة تتغير بمرور الوقت، فتكون البيانات المجموعة والنتائج وقت ظهورها غير مطابقة لواقع المجتمع وتصبح النتائج ذات قيمه محدودة بعد أن فقدت عنصر المطابقة مع واقع الظاهرة وتوزيعها الحالي في المجتمع .
3. في المجتمعات غير المحدودة (اللانهائية) مثل مجتمع الكائنات الحية في البحار والمحيطات لا يمكن أن تتم الدراسة على أساس الحصر الشامل ولكن لابد وأن تتم الدراسة بأسلوب المعاينة.
4. أيضا هناك بعض الاختبارات لابد وأن تتم بأسلوب المعاينة لان إجراء مثل هذه الاختبارات على أساس الحصر الشامل يؤدي إلى تلف المادة المختبرة أو هلاكها.. فاختبار صلاحية شحنة من المفرقعات مثلا لابد وأن يتم على أساس العينة وبالمثل تحليل دم المرضى يتم على أساس عينة.

اقسام العينات:

هناك عدة طرق لاخذ العينات من المجتمع لاستخدامها في الاستدلال الإحصائي.

وبشكل عام تنقسم العينات عادة إلى قسمين رئيسين وهما عينات عشوائية وعينات غير عشوائية.

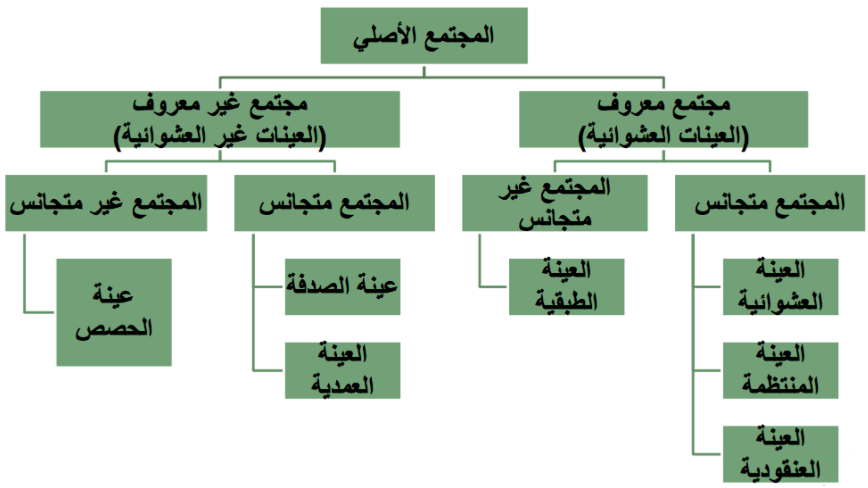
1- العينات العشوائية :

وهي تلك العينات التي يتم اختيار مفرداتها حسب خطه إحصائية لا يكون فيها للباحث أو لمفردات العينة دخل في اختيار أي مفردة فيها ، حيث يتم الاختيار باستخدام أساليب معينة تلعب الصدفة خلالها الدور الاول في اختيار المفردة ولكن بشرط أن يتحقق لجميع المفردات احتمال ثابت ومحدد للاختيار. والعينات العشوائية إذا ما تم اختيارها بالطريقة العلمية السليمة والمناسبة يمكن أن تكفل درجه عالية من دقة التمثيل للمجتمعات المسحوبة منها لذلك فهي الوسيلة الاساسية في حالة البحوث العلمية الدقيقة .

2- العينات غير العشوائية :

وهي تلك العينات التي لا تكفل لجميع مفردات المجتمع احتمال ثابت ومحدد للاختيار، وغالبا يتدخل الباحث في عملية الاختيار بصورة أو بأخرى.

وفيما يلي استعراض لاهم أنواع العينات العشوائية والعينات غير العشوائية



أ- العينات الاحتمالية:

العينة العشوائية البسيطة	جميع عناصر المجتمع لها نفس الفرصة في الظهور في العينة
العينة الطبقية	يقسم المجتمع إلى طبقتين على الأقل ثم نختار عينة عشوائية من كل طبقة تتناسب وحجمها.
العينة المنتظمة	ترتب مفردات المجتمع ثم نختار نقطة بداية للمعاينة ونحدد بعد ثابت من هذه النقطة لاختيار باقي النقاط تباعا.
العينة العنقودية	يقسم المجتمع إلى مساحات أو أجزاء ثم نختار عشوائيا بعض هذه المساحات، ثم نختار جميع أو بعض عناصرها بالعينة.

ب- العينات غير الاحتمالية:

عينة الصدفة	يتم اختيارها عن طريق الصدفة
العينة العمدية (القصدية)	يتم اختيار أفراد العينة تحت شروط معينة لتحقيق الهدف من التجربة
عينة الحصص	يقسم المجتمع إلى أجزاء ثم نختار العينة من كل جزء من أجزاء المجتمع وفقا للنسب المحددة

اختيار العينة:

- يطلق على المصدر الذي تؤخذ منه العينة إطار المعاينة وهو حصر شامل لجميع مفردات مجتمع الدراسة .
- يمكن أن يقسم إطار المعاينة إلي أقسام تسهل عملية الاختيار يطلق على كل قسم منها وحدة معاينة .
- يؤثر حجم مجتمع الدراسة في اختيار مفردات العينة. إذا كان حجم المجتمع صغيرا جدا من الممكن عدم الحصول على عدد كاف من المفردات أما إذا كان حجم المجتمع كبيرا ـ وهذا هو المتوقع دائما ـ تكون المشكلة في كيفية اختيار العينة .
- كلما كثرت الشروط التي يجب توفرها في مفردات العينة كلما صعب الحصول على العدد المطلوب.

خطوات اختيار العينة:

أ- تحديد أهداف البحث .
ب- تحديد كل من المجتمع الاصل الذي تختار منه العينة ووحدة المعاينة (إطار المعاينة)
ج- إعداد قائمة بالمجتمع الاصل بحيث يكون لكل مفردة فيه رقم أو تمييز محدد .
د- اختيار الطريقة المتبعة في المعاينة وتحديد حجم العينة.
ه- الحصول على عينة مناسبة .

تحديد حجم العينة:

يعتبر تحديد حجم العينة المناسب من اهم قرارات الباحث للحصول على بيانات تزوده بمعلومات يمكن الاعتماد عليها لتعميم النتائج.

ويتوقف حجم العينة الواجب دراسته على تفاعل بعض العوامل من اهمها :

1. حجم المجتمع.
   (كلما زاد حجم مجتمع الدراسة، يزيد حجم العينة المطلوب)
2. مدى التباين في خصائص المجتمع المراد دراسته.
   (كلما زاد التباين، يزيد حجم العينة المطلوب)
3. مدى الخطأ الذي يُسمح به في نتائج العينة كتقديرات لخصائص المجتمع.
   (كلما قل مدى الخطأ الذي يمكن السماح به، زاد حجم العينة)
4. درجة الثقة التي نود أن نتمتع بها في تحقق السمات السابقة.
   (كلما زادت درجة الثقة المطلوبة، زاد حجم العينة اللازم)

توجد عدة طرق لتحديد حجم العينة المناسب بما يلائم منهج البحث، وحجم وطبيعة المجتمع، وكذلك الغرض من العينة .
وتعتمد طرق حساب حجم العينة على معادلات أو صيغ رياضية مختلفة، كما توجد مجموعة من الجداول التي صممت وفقا لبعض هذه الصيغ تحدد الحجم المناسب للعينة من المجتمع الاصلي، ويستفيد منها الباحثون الذين يميلون إلى الأسلوب الرياضي .
وسنهتم هنا فقط بصيغتين مبسطتين لحساب حجم العينة تستخدم إحداهما إذا كان الغرض من العينة هو تقدير متوسط المجتمع وتستخدم الاخرى إذا كان الغرض من العينة هو تقدير نسبة وجود صفة أو خاصية معينة بين مفردات المجتمع .

(1) حجم العينة المناسب لتقدير متوسط المجتمع

$$n = \left(\frac{z\ \sigma}{d}\right)^2$$

n : حجم العينة المطلوب

z : قيمة مستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري تتحدد بناء على درجة الثقة المطلوبة.

(درجة ثقة 95%   z=1.96 ، درجة ثقة 99% : z=2.58)

σ : الانحراف المعياري لقيم المجتمع. (إذا لم يكن معلوما من دراسات سابقة ، يمكن تقديره بربع المدى المتوقع لقيم المجتمع)

d : خطأ التقدير الذي يحدده الباحث وفقا لطبيعة دراسته .

مثال 1

حدد حجم العينة المناسب لتقدير متوسط أعمار طلاب كلية إدارة الاعمال إذا كنا نرغب في ألا يزيد خطأ التقدير عن 2 سنة وبدرجة ثقة 95% علما بأن الانحراف المعياري عمار الطلاب من واقع الخبرة السابقة هو 4 سنوات .

الحل

حيث أن درجة الثقة المطلوبة هي 95 % ، فإن z=1.96

$$n = \left(\frac{z\ \sigma}{d}\right)^2 = \left(\frac{(1.96)\ \ (4)}{2}\right)^2 = 15.37 = 16$$

أي أن حجم العينة المطلوب يساوي 16 طالبا .

مثال 2

حدد حجم العينة المناسب لتقدير متوسط دخل العامل في صناعة معينة بالمملكة العربية السعودية إذا كنا نرغب في ألا يزيد خطأ التقدير عن 50 ريال وبدرجة ثقة 95% علما بأن الانحراف المعياري لدخول العمال في هذا المجال من واقع الخبرة السابقة هو 200 ريال.

الحل

حيث أن درجة الثقة المطلوبة هي 95 % ، فإن z=1.96

$$n = \left(\frac{z\ \sigma}{d}\right)^2 = \left(\frac{(1.96)\ (200)}{50}\right)^2 = 61.47 = 62$$

أي أن حجم العينة المطلوب يساوي 62 عاملا.

مثال 3

حدد حجم العينة المناسب لتقدير متوسط أطوال طلاب جامعة الملك فيصل إذا كنا نرغب في ألا يزيد خطأ التقدير عن 10 سم وبدرجة ثقة 99 %.

الحل

حيث أن درجة الثقة المطلوبة هي 99% ، فإن z=2.58

حيث أن الانحراف المعياري لاطوال الطلاب غير معلوم ، نقوم بتقدير المدى الممكن للطول ، فمثلا نتوقع أن تكون الاطوال بين 120 سم و 200 سم ، ثم يقدر الانحراف المعياري بربع المدى ، ويكون : $\sigma = \frac{200-120}{4} = 20$

$$n = \left(\frac{z\ \sigma}{d}\right)^2 = \left(\frac{(2.58)\ (20)}{10}\right)^2 = 26.63 = 27$$

أي أن حجم العينة المطلوب يساوي 27 طالبا .

(2) حجم العينة المناسب لتقدير النسبة في المجتمع

$$n = \left(\frac{z}{d}\right)^2 p(1-p)$$

حيث:

n : حجم العينة المطلوب

z : القيمة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري (z=1.96 or z=2.58)

p : نسبة الصفة المطلوب تقديرها في المجتمع من واقع الخبرة السابقة أو الدراسات المشابهة. (إذا كانت هذه النسبة غير معلومة ، نضع p=0.5)

d : خطأ التقدير الذي يحدده الباحث وفقا لطبيعة دراسته .

مثال 4

حدد حجم العينة المناسب لتقدير نسبة البطالة في احدى المدن إذا كنا نرغب في ألا يزيد خطأ التقدير عن 3% وبدرجة ثقة 99% علما بأن هذه النسبة من واقع الخبرة السابقة كانت 30%

الحل

حيث أن درجة الثقة المطلوبة هي 99% ، فإن z=2.58

$$n = \left(\frac{z}{d}\right)^2 p(1-p) = \left(\frac{2.58}{0.03}\right)^2 (0.3)(0.7) = 1553.16 = 1554$$

أي أن حجم العينة المطلوب يساوي 1554 فردا .

مثال 5

حدد حجم العينة المناسب لتقدير نسبة المدخنين من بين طلاب جامعة الملك فيصل إذا كنا نرغب في ألا يزيد خطأ التقدير عن 5% وبدرجة ثقة 95%

الحل

حيث أن درجة الثقة المطلوبة هي 95% ، فإن z=1.96

حيث أن النسبة p غير معلومة من مصادر سابقة، p=0.5

$$n = \left(\frac{z}{d}\right)^2 p(1-p) = \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 (0.5)(0.5) = 384.16$$

أي أن حجم العينة المطلوب يساوي 385 طالبا.

أخطاء البيانات الإحصائية:

تتعرض البيانات الإحصائية التي يتم جمعها إلى نوعين من الاخطاء :

1. خطأ التمييز أو التحيز: وهو ذلك الخطأ الناتج عن مصادر متعددة، منها أخطاء في تصميم البحث أو التجربة أو أخطاء فنيه أثناء جمع البيانات أو خلال العمليات الحسابية التي تتم على البيانات المتجمعة .

2. خطأ المعاينة العشوائية أو خطأ الصدفة: وهو الخطأ الناتج عن فروق الصدفة بين مفردات المجتمع التي دخلت العينة وبين تلك المفردات التي لم تشأ الصدفة أن تدخل العينة .

خطأ التمييز أو التحيز:

الأسباب

- الاختيار غير العشوائي للعينة: تعتمد بعض طرق الاختيار للعينة على خاصية معينة كالاعتماد على دليل الهاتف (عند دراسة الدخل والانفاق).
- التحيز المقصود (تعمد إدخال بعض الوحدات)
- استبدال وحدة بوحدة أخرى غير مدرجة ضمن الاطار العام للدراسة.

تفادي خطأ التحيز:

- اختيار جميع وحدات العينة عشوائيا باستخدام إحدى طرق الاختيار العشوائي
- عدم استبدال أية وحدة تم اختيارها بوحدة أخرى
- تدريب الباحثين بشكل جيد على جمع البيانات والتقيد بالتعليمات

خطأ المعاينة العشوائية Random Sampling Error

عند اختيار العينة العشوائية هناك خطأ ينتج عن الاختلاف أو التشتت بين قيم الوحدات التي تتكون منها العينة وتلك الوحدات التي كان لها فرصة أن تدخل في العينة، وهذا الخطأ يسمى بخطأ المعاينة العشوائي أو خطأ الصدفة.

ويمكن تفادي أو تقليل خطأ المعاينة العشوائي عن طريق:

- زيادة حجم العينة (في حدود التكلفة والوقت المتاح للمعاينة)
- تحري الدقة في اختيار أسلوب المعاينة المناسب (كالأسلوب الطبقي أو العينة المنتظمة...الخ) ، مما يسهم في تقليل الاختلاف بين الوحدات المختارة في العينة والوحدات التي كان يمكن أن يشملها الاختيار.

المحاضرة الثامنة

توزيعات المعاينة

إن الهدف من اخذ العينة هو معرفة خصائص مجتمعها، فاخذ العينات ليس القصد منه العينة لذاتها بل المجتمع الذي أخذت منه فالعينة وسيلة وليست الهدف.

وتقدم العينات تقديرات لخصائص مجتمعها، وهذه التقديرات تدور حول القيم الحقيقية لمجتمع الدراسة.

فمثلا متوسط العينة ليس هو متوسط مجتمعها، بل قيمة تمثل العينة ذاتها، ويمكن الاعتماد على هذه القيمة في تقدير القيمة المحتملة لمتوسط المجتمع وفق حدود معينة للثقة.

توزيع المعاينة

هو التوزيع التكراري لاحد المقاييس الإحصائية المحسوب من بيانات جميع العينات العشوائية ذات حجم محدد والتي يمكن سحبها من مجتمع إحصائي واحد.

نفرض أننا أخذنا عينه حجمها n من مجتمع ما، ثم حسبنا بعض المقاييس الإحصائية مثل المتوسط الحسابي، التباين، ... فإن كل مقياس من هذه المقاييس يعتبر متغيرا عشوائيا في حد ذاته يختلف من عينة إلى أخرى، هذا المتغير العشوائي يخضع لتوزيع معين يسمى بتوزيع المعاينة.

ولدراسة خصائص توزيعات المعاينة، سنفترض عند سحب العينات أن السحب يتم مع الاعادة (مع الارجاع) بمعنى أنه يمكن تكرار نفس المفردة أكثر من مرة في العينة الواحدة.

فمثلا نقول إن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي هو عبارة عن توزيع جميع المتوسطات الحسابية للعينات المأخوذة من نفس هذا المجتمع ذو الحجم n ، وكذلك فإن توزيع المعاينة للتباين هو توزيع جميع التباينات المحسوبة من عينات لها نفس الحجم n ومأخوذة من نفس المجتمع، وهكذا ...

إذا أخذنا عينات متكررة من مجتمع ما وقمنا بحساب متوسط كل عينة، فإننا نجد أن معظم هذه المتوسطات تختلف عن بعضها البعض، ويسمى التوزيع الاحتمالي لمتوسطات العينات " توزيع المعاينة للوسط الحسابي "

خصائص توزيع المعاينة للوسط الحسابي

اذا كان **X** متغيرا عشوائيا له توزيع متوسطه μ وتباينه σ^2 ، وكان $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي لعينة حجمها **n** مسحوبة من مجتمع قيم **X** فان:

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

اي انه اذا سحبت ـ مع الارجاع ـ كل العينات الممكنة من الحجم n من أي مجتمع فإن:

- متوسط متوسطات العينات يساوي متوسط المجتمع.
- تباين متوسطات العينات يساوي تباين المجتمع مقسوما على حجم العينة.

إذا كان لدينا مجتمع إحصائي مكون من أربع مفردات (N = 4)، هي القيم {0, 2, 4, 6 }، فإن:

$$\mu = \frac{0+2+4+6}{4} = 3 \quad \text{(متوسط المجتمع)}$$

$$\sigma^2 = \frac{(0-3)^2+(2-3)^2+(4-3)^2+(6-3)^2}{4} = 5 \quad \text{(تباين المجتمع)}$$

نفرض أننا سحبنا جميع العينات الممكنة مع الاعادة ذات الحجم n=2 ثم حسبنا متوسطاتها، فإن:

- عدد العينات الممكن سحبها مع الاعادة يعطى بالعلاقة:

$$N^n = 4^2 = 16$$

حيث N هو عدد مفردات المجتمع و n هو عدد مفردات العينة.

- متوسطات العينات العشوائية المسحوبة تتأرجح بين (0 ، 6) انظر الجدول التالي:

رقم العينة	العينة		المتوسط	رقم العينة	العينة		المتوسط
1	0	0	0	9	4	0	2
2	0	2	1	10	4	2	3
3	0	4	2	11	4	4	4
4	0	6	3	12	4	6	5
5	2	0	1	13	6	0	3
6	2	2	2	14	6	2	4
7	2	4	3	15	6	4	5
8	2	6	4	16	6	6	6

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي لتوزيع معاينة الاوساط الحسابية $\overline{x}_i$ كالتالي:

المتوسط	0	1	2	3	4	5	6
$P(\overline{x}_i)$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

ولو رسمنا المدرج التكراري، نلاحظ أن توزيع المعاينة للأوساط الحسابية للعينات يمكن أن يقترب وبشكل جيد من منحنى التوزيع الطبيعي.

ويمكننا التحقق من الخاصيتين السابق ذكرهما عن متوسطات العينات ، حيث:

$$\mu_{\bar{x}} = \sum \overline{X}_i P = 0.\left(1/16\right)+1.\left(2/16\right)+2.\left(3/16\right)+3.\left(4/16\right)$$
$$+4.\left(3/16\right)+5.\left(2/16\right)+6.\left(1/16\right)=3$$

وهي نفس قيمة متوسط المجتمع اذا $\boldsymbol{E(\overline{X}) = \mu_{\overline{X}} = \mu}$

وبالمثل يمكن حساب تباين متوسطات العينات حيث نجد أن $\sigma^2_{\bar{x}} = 2.5$ وهي قيمة تباين المجتمع (5) مقسوما على حجم العينة (2) ، وبالتالي فإن:

$$\boldsymbol{Var(\overline{X}) = \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}}$$

نظرية (1)

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط μ وتباين σ^2 ، وسحبت جميع العينات الممكنة ذات الحجم n من مجتمع قيم X وكان $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ، فإن المتغير العشوائي $\bar{X}$ (متوسطات العينات) يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ أي ان $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

أي أنه إذا كان المجتمع الاصلي يتبع التوزيع الطبيعي وتباينه معلوم فإن متوسطات العينات ذات حجم محدد المسحوبة من هذا المجتمع يكون لها أيضا توزيع طبيعي.

وبالتالي فإن المتغير العشوائي $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ له توزيع طبيعي معياري.

مثال

اخذت عينة عشوائية حجمها 9 من الأطفال حديثي الولادة في احد المستشفيات فاذا علم ان وزن الطفل حديث الولادة يخضع لتوزيع طبيعي 2900 غرام وانحرافه المعياي 600 غرام.

(أ) اوجد معدل وتباين والانحراف المعياري للوسط الحسابي لأوزان الأطفال في العينة.

$$X \sim N(2900, (600)^2)$$

$$\bar{X} \sim N\left(2900, \frac{(600)^2}{n}\right)$$

$$\mu_{\bar{X}} = \mu, \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(ب) اوجد احتمال ان الوسط الحسابي لأوزان الأطفال في العينة يزيد عن 3100 غرام.

$$P(\bar{X} > 3100) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{3100-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{3100-2900}{600/\sqrt{9}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{200}{200}\right)$$

الجدول ص 56

$$= P(Z > 1)$$

$$= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

(ج) اوجد احتمال ان الوسط الحسابي لأوزان الأطفال في العينة يقع بين 2700 و 3200 غرام.

$$P(2700 < \bar{X} < 3200) = P\left(\frac{2700-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{3200-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(\frac{2700-2900}{600/\sqrt{9}} < Z < \frac{3200-2900}{600/\sqrt{9}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-200}{200} < Z < \frac{300}{200}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 1.5)$$

$$= P(Z < 1.5) + P(Z < 1) - 1$$

$$= 0.9332 + 0.8413 - 1 = 0.7745$$

نظرية (2) النهاية المركزية (تقارب التوزيعات)

إذا كان المتغير العشوائي X متوسطة μ وتباينه σ^2 وسحبت جميع العينات الممكنة ذات الحجم n من مجتمع قيم X وكان $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ، فإن المتغير العشوائي $\bar{X}$ (متوسطات العينات) يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ كلما زاد حجم العينة ويكون التوزيع طبيعيا إذا كان حجم العينة كبيرا $(n \geq 30)$

أي أنه إذا كان المجتمع الاصلي لا يتبع بالضرورة التوزيع الطبيعي وتباينه معلوم وكانت العينة كبيرة فإن متوسطات العينات ذات الحجم n المسحوبة من هذا المجتمع يكون لها توزيع طبيعي، وبالتالي فإن المتغير العشوائي $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ له توزيع طبيعي معياري.

مثال

تخضع اوزان علب سائل غسل الصحون من نوع معين لتوزيع معدله 1000 غرام وانحرافه المعياري 80 غرام. اذا اخذت عينة عشوائية حجمها 48 علبة.

(أ) فما المعدل والتباين والانحراف المعياري للوسط الحسابي $\bar{X}$ لاوزان العلب في العينة؟

حجم العينة كبير $(n = 48 \geq 30)$ المعدل والانحراف المعياري للمجتمع معلومة ولذلك فشروط نظرية (3) متحققة أي ان

$$\bar{X} \sim N\left(1000, \frac{(80)^2}{48}\right)$$

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 1000 \text{ , } \sigma^2{}_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{(80)^2}{48} = \frac{6400}{48} \approx 133.33$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\sigma^2{}_{\bar{X}}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{80}{\sqrt{48}} \approx \sqrt{133.33} = 11.55$$

(ب) ما احتمال ان يزيد الوسط الحسابي لأوزان العلب في العينة عن 1072 غرام؟

$$P(\bar{X} > 1072) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{1072-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{1072-1000}{80/\sqrt{48}}\right)$$

$$\approx P\left(Z > \frac{72}{11.55}\right)$$

$$\approx P(Z > 6.23) = 1 - P(Z < 6.23) \approx 1 - 1 = 0$$

(ج) ما احتمال ان يقل الوسط الحسابي عن 980 غرام ؟

$$P(\bar{X} < 980) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{980-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{980-1000}{80/\sqrt{48}}\right)$$

$$\approx P(Z < -1.73) = 1 - P(Z < 1.73) = 1 - 0.9582$$

$$= 0.0418$$

نظرية (3)

إذا كان المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين غير معلوم، وسحبت جميع العينات الممكنة ذات الحجم n وكان $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة، و S يمثل الانحراف المعياري للعينة، فإن المتغير العشوائي $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ يتبع توزيع t بدرجة حرية (n-1) . $T \sim t_{n-1}$

ملحوظة: اذا كان حجم العينة كبيرا $(n \geq 30)$ يمكن استخدام التوزيع الطبيعي او توزيع t لانهما في هذه الحالة (التوزيع الأصلي طبيعي وتباينه غير معلوم) يعطيان نتائج متقاربة.

مثال:

اذا كانت درجات طلاب التحليل الاحصائي تأخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره 70 درجة.

اخذت عينة حجمها 9 طلاب ووجد ان الانحراف المعياري لعلاماتهم 11 درجات.

احسب احتمال ان يزيد وسط درجاتهم عن 75 درجة.

الحل:

المتغير العشوائي X يتبع توزيع طبيعي بوسط 70 وتباين مجهول ونكتب ذلك $X \sim N\ (\ 70\ , \sigma^2\ )$

تم سحب عينة حجمها 9 وانحراف هذه العينة معلوم وهو 11 ولذلك فإن: $T \sim t_8$

حيث: $T = \frac{\bar{X}-70}{11/\sqrt{9}}$

$$P(\bar{X} > 75) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > \frac{75-\mu}{S/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(T > \frac{75-70}{11/\sqrt{9}}\right) \qquad , T \sim t_8$$

$$= P\left(T > \frac{5}{11/3}\right)$$

$$= P\left(T > \frac{15}{11}\right)$$

$$\approx P(T > 1.363) \approx P(T > 1.397) \approx 10\%$$

تمرين

إذا كانت ساعات المذاكرة الاسبوعية للطلاب في إحدى الجامعات تأخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره 20 ساعة.

أخذت عينة حجمها 36 طالبا، ووجد أن الانحراف المعياري من العينة يساوي 6 ساعات.

المطلوب: ما احتمال أن يقل متوسط عدد ساعات المذاكرة لعينة الطلاب عن 18 ساعة؟

ملحوظة ختامية

هناك توزيعات معاينة أخرى مثل توزيع المعاينة للنسبة في العينة ، وتوزيع المعاينة لتباين العينة ، وتوزيع المعاينة للفرق بين متوسطين ، وتوزيع المعاينة للفرق بين نسبتين. ولكل من هذه التوزيعات ـ مثلها مثل المتوسط ـ خصائص محددة. (يمكن الرجوع للكتاب المقرر)

Tables of the Normal Distribution

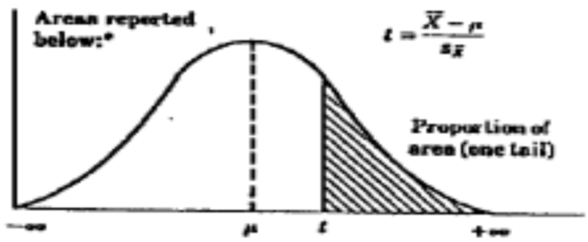
Probability Content from -oo to Z

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

الجدول أدناه يعطي قيمة ∝ t

المقابلة للمساحة المظللة وقيمتها ∝

Proportions of Area for the t Distributions



df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

(1) العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية هي

أ- يسمى المقياس المحسوب من بيانات المجتمع احصاءة ويسمى المحسوب من بيانات العينة معلمة.

ب- يسمى المقياس المحسوب من بيانات المجتمع احصاءة ويسمى المحسوب من بيانات العينة أيضا احصاءة

ج- يسمى المقياس المحسوب من بيانات المجتمع معلمة ويسمى المحسوب من بيانات العينة أيضا معلمة.

د- يسمى المقياس المحسوب من بيانات المجتمع معلمة ويسمى المحسوب من بيانات العينة احصاءة.

(2) العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية هي:

أ- في توزيع المعاينة الوسط الحسابي (الاحصائي) يتطابق مع قيمة المعلمة.

ب- في توزيع المعاينة الوسط الحسابي (الاحصائي) لا يتطابق مع قيمة المعلمة.

ج- في توزيع المعاينة الانحراف المعياري (الاحصائي) يتطابق مع قيمة المعلمة.

د- في توزيع المعاينة التباين (الاحصائي) يتطابق مع قيمة المعلمة.

(3) لو كان لدينا مجتمع إحصائي وتم قياس إحدى خصائصه ووجد أن قيمها هي: 1، 2، 3، 4
فإذا تم اختيار عينة – بدون إرجاع – حجمها 2 من هذا المجتمع فإن القيمة المتوقعة لكل من الوسط الحسابي للمجتمع (μ)، ومتوسط متوسطات العينات ($\overline{x}$) هما:

(أ) $\mu = 1.5 , E(\bar{x}) = 1.5$

(ب) $\mu = 1.5 , E(\bar{x}) = 2.5$

(ج) $\mu = 2.5 , E(\bar{x}) = 1.5$

(د) $\mu = 2.5 , E(\bar{x}) = 2.5$

(4) اذا كانت $X_1, X_2, X_3, \dots \dots X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2، وكان $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن $\bar{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي بوسط μ وانحراف معياري $\sigma/\sqrt{n}$ أي ان:

(أ) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

(ب) $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/n)$

(ج) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2/\sqrt{n}\right)$

(د) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$

(5) إذا كانت $X_1, X_2, X_3, \dots \dots X_n$ عينة عشوائية من مجتمع وسطه μ وتباينه σ^2 وعناصره N، وكان $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن $\bar{X}$ يقترب من التوزيع الطبيعي بوسط μ وانحراف معياري $\sigma/\sqrt{n}$ كلما:

(أ) كبرت N

(ب) صغرت N

(ج) كبرت n

(د) صغرت n

(6) إذا كانت $X_1, X_2, X_3, \dots \dots X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه μ معلوم وتباينه σ^2، وكان $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن $\bar{X}$ يتبع توزيع طبيعي إذا كان:

(أ) σ^2 معلوما

(ب) σ^2 مجهولا

(7) إذا كانت $X_1,X_2,X_3,\dots\dots X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه μ معلوم وتباينه σ^2، وكان $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن $\bar{X}$ يتبع توزيع t إذا كان:

(أ) σ^2 معلوما

(ب) σ^2 مجهولا

(8) تخضع علامات الطلاب في أحد المقررات لتوزيع طبيعي وسطه 65 وانحرافه المعياري 18، أخذت عينة عشوائية حجمها 36، احتمال أن يزيد وسط علامات العينة على 74 هو تقريبا:

(أ) 0%

(ب) 25%

(ج) 50%

(د) 100%

(9) تخضع أوزان عبوات أحد مبيدات الحشرات المنزلية لتوزيع وسطه 135 غرام وانحرافه المعياري 14 غرام. إذا قررت وزارة التموين رفض كل صندوق من هذه العبوات إذا نقص وزنه عن 6.24، فما نسبة الصناديق المرفوضة، علما بأن عدد العبوات في كل صندوق 48 عبوة؟

(أ) 0.007

(ب) 0.07

(ج) 0.93

(د) 0.993

(10) إذا كانت ساعات المذاكرة الأسبوعية للطلاب الجامعيين في إحدى الدول تأخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره 20 ساعة. أخذت عينة حجمها 25 طالبا، ووجد أن الانحراف المعياري لعدد ساعات مذاكرتهم الأسبوعية 8 ساعات. احتمال أن يقل وسط عدد ساعات مذاكرتهم الأسبوعية عن 18 ساعة هو تقريبا:

(أ) 10%

(ب) 40%

(ج) 60%

(د) 90%

المحاضرة التاسعة

مقدمة في التقدير الاحصائي

التقدير:

التقدير هو عملية استنتاج أو تقدير أحد معالم المجتمع (مثل الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري أو نسبة صفة معينة في المجتمع) بناء على بيانات عينة مسحوبة من المجتمع. وهناك نوعان (أو أسلوبان) للتقدير:

- **الاول:** تقدير النقطة (أو القيمة الواحدة) Point Estimation
- **الثاني:** تقدير الفترة (أو فترة التقدير أو الثقة) Interval Estimation

التقدير بنقطة يعني أن نحصل على قيمة واحدة من العينة، وتستخدم هذه القيمة الواحدة كتقريب أو كتقدير لمعلمة المجتمع المجهولة.

فمثلا لو أخذنا الوسط الحسابي للدخل في عينة من الافراد كتقدير لمتوسط دخل الفرد في الدولة نكون قد حصلنا على تقدير نقطة لمتوسط دخل الدولة.

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

وكمثال آخر لو أخذنا نسبة الناخبين في العينة الذين يؤيدون مرشحا معينا كتقدير لهذه النسبة في المجتمع نكون حصلنا على تقدير نقطة للنسبة في مجتمع الناخبين.

$$\hat{P} = \hat{p}$$

أما التقدير بفترة (فترة الثقة) فنحصل من خلاله على تقدير لمعلمة المجتمع المجهولة في شكل مدى أو فترة من القيم تتحدد بحدين (حد أدنى وحد أعلى). ونلاحظ هنا أن فترة التقدير (أو تقدير الفترة) تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائيا في كثير من الحالات.

وبصفة عامة فإن فترة التقدير (أو فترة الثقة) تكون على الصورة:

معلمة المجتمع المجهولة = الاحصاءة المناظرة من العينة ± خطأ التقدير

مثلاً: إذا قدرنا الوسط الحسابي لإعمار الناخبين بالاعتماد عينة كان فيها متوسط أعمار الناخبين يساوي 40 بأنه يتراوح بين (6-40)و (6+40) سنة أي يتراوح بين 34 سنة كحد أدنى و 46 سنة كحد أعلى نكون قد حصلنا على تقدير فترة للوسط الحسابي لأعمار الناخبين في المجتمع.

ونلاحظ أن هذه الفترة (34, 46) تحتوي على عدد لا نهائي من الاعمار، بمعنى أن العدد لا يقتصر فقط على الاعداد الصحيحة والتي تشمل السنوات، ولكنها تشمل أيضا كسور السنوات، والايام والشهور، والساعات.. الخ

وفي الجزء التالي نستعرض بإيجاز تقدير كل من متوسط المجتمع (μ) والنسبة في المجتمع (P) باستخدام بيانات عينة عشوائية.

أولا: تقدير المتوسط بفترة ثقة:

الحالة الاولى:

- المجتمع الأصلي المسحوب منه العينة طبيعي.
- تباين المجتمع (σ) معلوم.

$$\hat{\mu} = \bar{X} \pm z \times \sigma/\sqrt{n}$$
$$\left(\bar{X} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z \times \sigma/\sqrt{n}\right)$$

حيث:

الوسط الحسابي للمجتمع: μ

الوسط الحسابي للعينة: $\bar{X}$

الانحراف المعياري للمجتمع: σ

حجم العينة: n

معامل الثقة المناظر لمستوى (درجة) الثقة: z $(z_{1-\frac{\alpha}{2}})$

حساب معامل الثقة:

إذا أردنا حساب معامل الثقة المناظر لمستوى الثقة المراد حساب فترة الثقة عنده، فيتم ذلك كما يلي:

إذا كان مستوى الثقة يساوي 95% $(1 - \alpha = 95\%)$

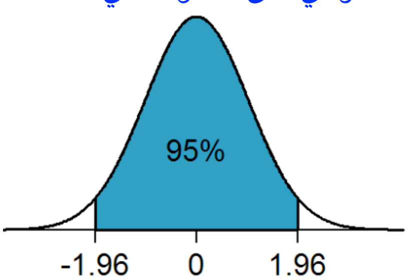
فإن مستوى عدم الثقة (وهو ما يسمى بمستوى المعنوية) يساوي 5% $(\alpha = 5\%)$

وبالتالي فإن $\frac{\alpha}{2}$ تساوي 2.5% $(\frac{\alpha}{2} = 2.5\%)$

أي أن $(1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 2.5\% = 97.5\%)$

فنبحث في جدول Z عن النقطة التي تكون عندها قيمة الاحتمال مساوية للقيمة 0.9750 هذه القيمة هي 1.96 $(z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96)$ ويمكن ملاحظة ذلك من خلال الرسم التالي:

وباختصار يفضل حفظ معاملات الثقة لمستويات الثقة الاكثر استعمالا، وهي على النحو التالي:



درجة الثقة	معامل الثقة Z
68.26%	1
90%	**1.65**
95 %	**1.96**
95.44%	2
99%	**2.58**

ونلخص ما سبق بإيراد النظرية التالية:

نظرية (1)

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ وكانت σ^2 معلومة فإن فترة ثقة $(1-\alpha)\%$ للمعلمة μ هي: $\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

مثال:

أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 16$ من مجتمع طبيعي $N(\mu, 9)$ فوجد أن $\bar{X} = 11.3$، أوجد فترة ثقة 95% للمعلمة المجهولة μ

الحل:

المجتمع طبيعي وتباينه معلوم وقيمة الوسط الحسابي للعينة $\bar{X} = 11.3$

إذاً فترة ثقة 95% هي:

$$\left(\bar{X} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(11.3 - 1.96 \times \frac{3}{4}, 11.3 + 1.96 \times \frac{3}{4}\right)$$
$$= (11.3 - 1.47, 11.3 + 1.47)$$
$$= (9.83, 12.77)$$

تمرين: عينة عشوائية حجمها $n = 25$ أخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري $\sigma =$ 4، إذا كان معدل العينة $\bar{X} = 60$، أوجد فترة ثقة 99% لوسط المجتمع μ

الحالة الثانية:

- المجتمع الأصلي المسحوب منه العينة غير معروف.
- تباين المجتمع (σ) معلوم.
- العينة كبيرة ($n \geq 30$)

نظرية (2)

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع وسطه μ، وتباينه σ^2 معلومة فإن فترة ثقة $(1-\alpha)\%$ للمعلمة μ هي تقريبا: $\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ إذا كانت n كبيرة $(n \geq 30)$

مثال:

عينة عشوائية حجمها $n = 100$ من مجتمع تباينه $\sigma^2 = 25$، وجد أن $\bar{X} = 52$

(أ) أوجد فترة ثقة 90% للمعلمة المجهولة μ

الحل:

التباين معلوم وحجم العينة كبير وقيمة الوسط الحسابي للعينة $\bar{X} = 52$ فنطبق النظرية (2) لتقدير فترة ثقة 90% لوسط المجتمع المجهول μ كالتالي:

$$\left(\bar{X} - z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(52 - 1.64 \times \frac{5}{10}, 52 + 1.64 \times \frac{5}{10}\right)$$
$$= (52 - 0.82, 52 + 0.82)$$
$$= (51.18, 52.82)$$

الحالة الثالثة:

- المجتمع الأصلي المسحوب منه العينة طبيعي.
- تباين المجتمع (σ) غير معلوم
- العينة صغيرة ($n < 30$).

نظرية (3)

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي μ، فإن فترة ثقة $(1-\alpha)\%$ للمعلمة μ هي تقريبا: $\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$ عند درجة حرية $(n-1)$

أي انه اذا كانت العينة صغيرة بمعنى ان حجمها اقل من (30) مفردة، والانحراف المعياري للمجتمع الطبيعي غير معلوم، فان التوزيع الإحصائي المتبع في مثل هذه الحالات هو " توزيع t"

مثال: (العينة اقل من 30 والمجتمع يتبع التوزيع الطبيعي)

سحبت عينة عشوائية من 10 بطاريات وكان متوسط أعمار البطاريات في العينة 5 ساعات بانحراف المعياري مقداره ساعة واحدة. فاذا كان من المعروف ان خط الانتاج المأخوذة منه البطاريات ينتج بطاريات عمرها موزع طبقا للتوزيع الطبيعي،

المطلوب:

إيجاد فترة الـ 95% ثقة للمتوسط غير المعلوم لعمر البطاريات في المجتمع كله.

الحل:

لايجاد فترة الـ 95% ثقة للمتوسط غير المعلوم لعمر البطاريات في المجتمع كله، فإننا نوجد أولا قيمة $t_{0.025}$ و التي تكون معها 2.5% من المساحة عند الاطراف لدرجات حرية n-1=9 ونحصل على هذه القيمة من خلال الرجوع إلى جدول t بالتحرك تحت عمود 0.025 حتى درجات حرية 9 والقيمة التي سيتم التحصل عليها هي 2.262 إذن:

$$\hat{\mu} = \overline{X} \pm 2.262 \frac{s}{\sqrt{n}} = 5 \pm 2.262 \frac{1}{\sqrt{10}} \cong 5 \pm 2.262(0.316) \cong 5 \pm 0.71$$

الحالة الرابعة:

- المجتمع الأصلي المسحوب منه العينة طبيعي.
- تباين المجتمع (σ) غير معلوم
- العينة صغيرة ($n > 30$).

في هذه الحالة يمكن استخدام التوزيع الطبيعي أو توزيع t ، وكلهما يعطي نتائج متقاربة.

مثال: (العينة اكبر من 30 والمجتمع يتبع التوزيع الطبيعي)

سحبت عينة عشوائية من 100 مصباح كهربائي، وكان متوسط عمر المصباح في العينة 2500 ساعة بانحراف معياري مقداره 200 ساعة. فإذا كان من المعروف أن أعمار هذا النوع من المصابيح موزعة طبقا للتوزيع الطبيعي،

المطلوب: إيجاد فترة ثقة 95% للمتوسط غير المعلوم لأعمار المصابيح في المجتمع كله.

الحل:

(1) باستخدام توزيع t: $t_{0.025,\,99} = 1.984$

$$\hat{\mu} = \overline{X} \pm 1.984 \frac{s}{\sqrt{n}} = 2500 \pm 1.984 \frac{200}{\sqrt{100}} \cong 2500 \pm 1.984(20) \cong 2500 \pm 39.68$$

(2) باستخدام التوزيع الطبيعي: $Z_{0.025} = 1.96$

$$\hat{\mu} = \overline{X} \pm 1.96 \frac{s}{\sqrt{n}} = 2500 \pm 1.96 \frac{200}{\sqrt{100}} \cong 2500 \pm 1.96(20) \cong 2500 \pm 39.2$$

Tables of the Normal Distribution

Probability Content from -oo to Z

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

جدول القيم الحرجة لتوزيع t

df | α	0.05	0.025	0.01	0.005	df | α	0.05	0.025	0.01	0.005
1	6.314	12.707	31.819	63.655	26	1.706	2.056	2.479	2.779
2	2.920	4.303	6.965	9.925	27	1.703	2.052	2.473	2.771
3	2.353	3.182	4.541	5.841	28	1.701	2.048	2.467	2.763
4	2.132	2.776	3.747	4.604	29	1.699	2.045	2.462	2.756
5	2.015	2.571	3.365	4.032	30	1.697	2.042	2.457	2.750
6	1.943	2.447	3.143	3.707	34	1.691	2.032	2.441	2.728
7	1.895	2.365	2.998	3.500	35	1.690	2.030	2.438	2.724
8	1.860	2.306	2.897	3.355	36	1.688	2.028	2.435	2.720
9	1.833	2.262	2.821	3.250	47	1.678	2.012	2.408	2.685
10	1.812	2.228	2.764	3.169	48	1.677	2.011	2.407	2.682
11	1.796	2.201	2.718	3.106	49	1.677	2.010	2.405	2.680
12	1.782	2.179	2.681	3.055	62	1.670	1.999	2.388	2.658
13	1.771	2.160	2.650	3.012	63	1.669	1.998	2.387	2.656
14	1.761	2.145	2.625	2.977	64	1.669	1.998	2.386	2.655
15	1.753	2.131	2.603	2.947	79	1.664	1.990	2.375	2.640
16	1.746	2.120	2.584	2.921	80	1.664	1.990	2.374	2.639
17	1.740	2.110	2.567	2.898	81	1.664	1.990	2.373	2.638
18	1.734	2.101	2.552	2.878	98	1.661	1.985	2.365	2.627
19	1.729	2.093	2.540	2.861	99	1.660	1.984	2.365	2.626
20	1.725	2.086	2.528	2.845	100	1.660	1.984	2.364	2.626
21	1.721	2.080	2.518	2.831	142	1.656	1.977	2.353	2.611
22	1.717	2.074	2.508	2.819	143	1.656	1.977	2.353	2.611
23	1.714	2.069	2.500	2.807	144	1.656	1.977	2.353	2.610
24	1.711	2.064	2.492	2.797	199	1.653	1.972	2.345	2.601
25	1.708	2.060	2.485	2.787	200	1.653	1.972	2.345	2.601

المحاضرة العاشرة

تابع .. التقدير

ثانيا: تقدير النسبة بفترة ثقة:

فترة تقدير النسبة للمجتمع (فترة الثقة للنسبة):

إن تقدير النسبة في المجتمع تعتبر من الحالات المهمة لقياس الظواهر الانسانية المختلفة، وبالذات الوصفية منها.
ومن أمثلة ذلك قياس اتجاهات الراي العام متمثلا في نسبة المؤيدين لقرار معين أو مرشح محدد، وقياس بعض المؤشرات الاقتصادية والاجتماعية مثل نسبة البطالة أو نسبة المدخنين أو نسبة قتلى الحروب،... وغيرها.
ونظرا لانه من الصعوبة بمكان في كثير من الاحيان حساب هذه النسبة مباشرة من المجتمع، فإننا غالبا ما نلجأ لتقدير هذه النسبة من عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع.

فلو افترضنا أن نسبة المؤيدين للسياسة الاقتصادية التي تنتهجها دولة ما هي P وأن العينة العشوائية كبيرة بدرجة كافية وأن نسبة مؤيدي هذه السياسة في العينة هي $\hat{p}$ فإن خطوات تقدير النسبة في المجتمع تكون كما يلي:

1) حساب النسبة في العينة $\hat{p}$
2) حساب الخطأ المعياري للنسبة والتي تساوي في هذه الحالة :

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

3) ضرب الخطأ المعياري للنسبة في معامل الثقة المناسب Z (حسب درجة الثقة المطلوبة) والتي نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري (أو من الجدول الذي يحوي أهم درجات ومعاملات الثقة والذي ذكرناه آنفاً). أي نحسب:

$$Z \times \sigma_{\hat{p}} = Z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

4) للحصول على الحد الأدنى لتقدير النسبة نطرح حاصل الضرب (السابق) من نسبة العينة $\hat{p}$، وللحصول على الحد الأعلى نجمع حاصل الضرب مع النسبة في العينة $\hat{p}$، فنحصل على فترة تقدير النسبة. وبالتالي فإن فترة تقدير النسبة تكون في شكلها النهائي كما يلي :

$$P = \hat{p} \pm \left(Z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

مثال:

عينة عشوائية حجمها 144 ناخباً سحبت من إحدى المدن فوجد أن عدد المؤيدين في العينة لمرشح معين هو 60 ناخباً، أنشئ فترة تقدير لنسبة المؤيدين لهذا المرشح في المدينة كلها بدرجة ثقة 95 %

المعطيات:

حجم العينة $(n = 144)$

نسبة المؤيدين في العينة $(\hat{p} = \frac{60}{144} \approx 0.42)$

درجة الثقة $((1-\alpha)\% = 95\%)$ مما يعني أن معامل الثقة المناظر لهذه الدرجة هو (1.96)

المطلوب:

تقدير نسبة المؤيدين لهذا المرشح في المدينة (P)

الحل:

$$P = \hat{p} \pm \left(Z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) \quad = 0.42 \pm \left(1.96 \times \sqrt{\frac{0.42 \times 0.58}{144}} \right)$$
$$= 0.42 \pm (1.96 \times 0.0411)$$
$$\approx 0.42 \pm (0.08)$$

اي أن نسبة المؤيدين للمرشح في المدينة تتراوح بين 0.34 , 0.50 وذلك بدرجة ثقة % 95

بمعنى آخر أن نسبة مؤيدي هذا المرشح في هذه المدينة لا تتجاوز % 50 كحد أعلى، وبالتالي ففرصته في الفوز كمرشح قد لا تكون كبيرة وذلك بدرجة ثقة 95% (أو بتعبير آخر أن هذا الحكم لا تتجاوز نسبة الخطأ فيه 5%).

تمرين: لإيجاد فترة ثقة 90% لنسبة المدخنين بين طلبة إحدى الجامعات قام باحث بمقابلة عينة عشوائية من 100 طالب، فوجد أن 30 طالبا يدخنون، أوجد فترة الثقة المطلوبة.

المعطيات:

حجم العينة $(n = 100)$

نسبة المدخنين في العينة $(\hat{p} = \frac{30}{100} = 0.30)$

درجة الثقة $((1-\alpha)\% = 90\%)$ مما يعني أن معامل الثقة المناظر لهذه الدرجة هو (1.64)

المطلوب:

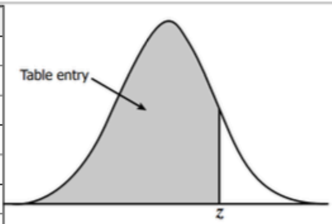
تقدير نسبة المدخنين في هذه الجامعة (P)

ملاحظة ختامية:

يمكن تقدير فترات ثقة لمعالم أخرى في المجتمع، مثل التباين، وكذلك فترات ثقة تخص المقارنة بين مجتمعين مثل فترة الثقة للفرق بين متوسطين، وفترة الثقة للفرق بين نسبتين، وفترة الثقة للنسبة بين تباين عينتين.

وقد اكتفينا فقط ـ في إطار هذا المقرر ـ بعرض فترات الثقة المتعلقة بمتوسط المجتمع والنسبة في المجتمع.

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

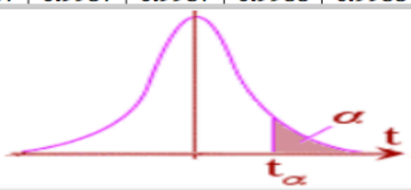


جدول المساحات أسفل التوزيع الطبيعي المعياري

((المساحة الواقعة قبل أي قيمة Z موجبة))

معاملات الثقة Z

درجة الثقة	معامل الثقة Z
90%	1.65
95 %	1.96
99%	2.58



جدول القيم الحرجة لتوزيع t

df | α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	df | α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	47	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	48	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	49	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	62	1.295	1.670	1.999	2.388	2.657
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	63	1.295	1.669	1.998	2.387	2.656
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	64	1.295	1.669	1.998	2.386	2.655
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	79	1.292	1.664	1.990	2.374	2.640
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	81	1.292	1.664	1.990	2.373	2.638
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	98	1.290	1.661	1.984	2.365	2.627
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	99	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	142	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	143	1.287	1.656	1.977	2.353	2.611
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	144	1.287	1.656	1.977	2.353	2.610
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	199	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601

تمارين مراجعة:

إذا كانت متوسط مستوى السكر في الدم لمجموعة من الافراد بمدينة الرياض تمثل ظاهرة تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 20 درجة ، فما هو حجم العينة المناسب لتقدير متوسط مستوى السكر في الدم في هذه المدينة بحيث لا يتعدى الخطأ في تقدير متوسط مستوى السكر 4 درجات ، وذلك بدرجة ثقة 99% (مع تقريب الناتج للرقم الأعلى) :

أ- 60 مفردة
ب- 167 مفردة.. مع التقريب للأعلى
ج- 170 مفردة
د- 20 مفردة

إذا كانت متوسط درجات الطلاب في مقرر التحليل الإحصائي يمثل ظاهرة تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 12 درجة ، فما هو حجم العينة المناسب لتقدير متوسط درجات الطلاب في هذا المقرر بحيث لا يتعدى الخطأ في تقدير المتوسط 3 درجات وذلك بدرجة ثقة 99% (مع تقريب الناتج للرقم الاعلى) :

أ- 60 مفردة
ب- 167 مفردة
ج- 170 مفردة
د- 107 مفردة.. مع التقريب للأعلى

حجم العينة المناسب لتقدير نسبة المدخنين من بين طلاب جامعة الملك فيصل إذا كنا نرغب في ألا يزيد خطأ التقدير عن 5% وبدرجة ثقة 95% يساوي:

أ- 10
ب- 100
ج- 385 .. مع القريب للأعلى
د- 1554

توزيعات المعاينة

(1) العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية هي:

(أ) يسمى المقياس المحسوب من بيانات المجتمع إحصاءة، ويسمى المحسوب من بيانات العينة معلمة.

(ب) يسمى المقياس المحسوب من بيانات المجتمع إحصاءة، ويسمى المحسوب من بيانات العينة أيضا إحصاءة.

(ج) يسمى المقياس المحسوب من بيانات المجتمع معلمة، ويسمى المحسوب من بيانات العينة أيضا معلمة.

(د) يسمى المقياس المحسوب من بيانات المجتمع معلمة، ويسمى المحسوب من بيانات العينة احصاءة.

(2) العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية هي:

(أ) في توزيع المعاينة، الوسط الحسابي (الإحصائي) يتطابق مع قيمة المعلمة.
(ب) في توزيع المعاينة، الوسط الحسابي (الإحصائي) لا يتطابق مع قيمة المعلمة.
(ج) في توزيع المعاينة، الانحراف المعياري (الإحصائي) يتطابق مع قيمة المعلمة.
(د) في توزيع المعاينة، التباين (الإحصائي) يتطابق مع قيمة المعلمة.

(3) لو كان لدينا مجتمع إحصائي وتم قياس إحدى خصائصه ووجد أن قيمها هي: 1، 2، 3، 4

فإذا تم اختيار عينة – بدون إرجاع – حجمها 2 من هذا المجتمع فإن القيمة المتوقعة لكل من الوسط الحسابي للمجتمع (μ)، ومتوسط متوسطات العينات ($\bar{x}$) هما:

(أ) $\mu = 1.5 , E(\bar{x}) = 1.5$

(ب) $\mu = 1.5 , E(\bar{x}) = 2.5$

(ج) $\mu = 2.5 , E(\bar{x}) = 1.5$

(د) $\mu = 2.5 , E(\bar{x}) = 2.5$

(4) اذا كانت $X_1,X_2,X_3,\dots\dots X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2، وكان $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن $\bar{X}$ يتبع التوزيع الطبيعي بوسط μ وانحراف معياري $\sigma/\sqrt{n}$ أي ان:

(أ) $\bar{X}\sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

(ب) $\bar{X}\sim N(\mu, \sigma/n)$

(ج) $\bar{X}\sim N\left(\mu, \sigma^2/\sqrt{n}\right)$

(د) $\bar{X}\sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$

(5) إذا كانت $X_1,X_2,X_3,\dots\dots X_n$ عينة عشوائية من مجتمع وسطه μ وتباينه σ^2 وعناصره N، وكان $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن $\bar{X}$ يقترب من التوزيع الطبيعي بوسط μ وانحراف معياري $\sigma/\sqrt{n}$ كلما:

(أ) كبرت N

(ب) صغرت N

(ج) كبرت n

(د) صغرت n

(6) إذا كانت $X_1,X_2,X_3,\dots\dots X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه μ معلوم وتباينه σ^2، وكان $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن $\bar{X}$ يتبع توزيع طبيعي إذا كان:

(أ) σ^2 معلوما

(ب) σ^2 مجهولا

(7) إذا كانت $X_1,X_2,X_3,\dots\dots X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه μ معلوم وتباينه σ^2، وكان $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن $\bar{X}$ يتبع توزيع t إذا كان:

(أ) σ^2 معلوما

(ب) σ^2 مجهولا

(8) تخضع علامات الطلاب في أحد المقررات لتوزيع طبيعي وسطه 65 وانحرافه المعياري 18، أخذت عينة عشوائية حجمها 36، احتمال أن يزيد وسط علامات العينة على 74 هو تقريبا:

(أ) 0%

(ب) 25%

(ج) 50%

(د) 100%

(9) تخضع أوزان عبوات أحد مبيدات الحشرات المنزلية لتوزيع وسطه 135 غرام وانحرافه المعياري 14 غرام. إذا قررت وزارة التموين رفض كل صندوق من هذه العبوات إذا نقص وزنه عن 6.24، فما نسبة الصناديق المرفوضة، علما بأن عدد العبوات في كل صندوق 48 عبوة؟

(أ) 0.007
(ب) 0.07
(ج) 0.93
(د) 0.993

(10) إذا كانت ساعات المذاكرة الأسبوعية للطلاب الجامعيين في إحدى الدول تأخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي مقداره 20 ساعة. أخذت عينة حجمها 25 طالبا، ووجد أن الانحراف المعياري لعدد ساعات مذاكرتهم الأسبوعية 8 ساعات. احتمال أن يقل وسط عدد ساعات مذاكرتهم الأسبوعية عن 18 ساعة هو تقريبا:

(أ) 10%
(ب) 40%
(ج) 60%
(د) 90%

تمارين مراجعة:

تم سحب عينة عشوائية من مجموع مجتمع العاملين في إحدى الدوائر الحكومية بلغ حجمها 200موظف، فإذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات تقرير تقييم الاداء الخاص بهم هما على الترتيب 68 درجة و 15 درجة ،

بفرض أن توزيع درجات التقييم للعاملين هو توزيع طبيعي، فإن فترة الثقة للوسط الحسابي لدرجات تقارير تقييم الاداء الخاص بهذه الدائرة الحكومية بدرجة ثقة 95% هي:

الحد **الادنى** لفترة الثقة يساوي:

أ- 65.92 درجة
ب- 68 درجة
ج- 70.08 درجة
د- 200 درجة

الحد **الاعلى** لفترة الثقة يساوي:

أ- 65.92 درجة
ب- 68 درجة
ج- 70.08 درجة
د- 200 درجة

تمرين: لإيجاد فترة ثقة 90% لنسبة المدخنين بين طلبة إحدى الجامعات قام باحث بمقابلة عينة عشوائية من 100 طالب، فوجد أن 30 طالبا يدخنون، أوجد فترة الثقة المطلوبة.

المعطيات:

حجم العينة $(n = 100)$

نسبة المدخنين في العينة $(\hat{p} = \frac{30}{100} = 0.30)$

درجة الثقة $((1-\alpha)\% = 90\%)$ مما يعني أن معامل الثقة المناظر لهذه الدرجة هو (1.64)

المطلوب:

تقدير نسبة المدخنين في هذه الجامعة (P)

المحاضرة الحادية عشر

مقدمة في اختبارات الفروض الاحصائية

اختبارات الفروض الإحصائية

المقصود بالفروض هنا الفروض الإحصائية statistical hypotheses بمعنى الفروض التي تتعلق بالمجتمع الإحصائي المسحوبة منه العينة، أو توزيع هذا المجتمع أو معالمه كالوسط الحسابي أو النسبة في المجتمع.

والفرض Hypothesis ما هو إلا استنتاج أو تفسير مبدئي يتعلق بأحد المؤشرات الخاصة بالمجتمع.
ويكون هذا الفرض مبنيا على حيثيات معقولة أو منطقية وليس على حسابات دقيقة خاصة بالمجتمع لأننا نفترض أنه لا يمكن دراسة المجتمع بالكامل عن طريق الحصر الشامل بل نحاول استنتاج أو الاستدلال على مقاييس المجتمع باستخدام بيانات ونتائج العينة.

فمثلا : قد يفترض باحث أن متوسط الدخل الشهري للفرد في دولة ما هو 200 دولار (بناء على ما يراه من مستوى المعيشة في هذا البلد وأوضاعه الاقتصادية) ، أو قد يفترض باحث آخر أن نسبة الناخبين في إحدى الدوائر الذين يؤيدون مرشحا معينا لا تقل عن 30 % ، ويحتاج الباحث إلى اختبار مدى صحة هذه الفروض بشكل علمي (إحصائي) لمعرفة مدى صحتها. أي أن يصل الباحث إلى قرار إما بقبول الفرض أو عدم قبوله (أي رفضه) وذلك باحتمال معين.

وقبل تناول كيفية إجراء الاختبارات الإحصائية نستعرض أولا بعض المفاهيم والتعريفات الاساسية اللازمة لهذا الموضوع حتى تكون الصورة أكثر وضوحا.

القرار الإحصائي:

القرار الإحصائي هو قرار مبني على تجربة تم القيام بها على عينة عشوائية من مجتمع الدراسة.

مثلا: لاتخاذ قرار بشأن هل يؤدي منح حوافز للموظفين إلى رفع الانتاجية، يتم اختيار عينة من الموظفين وتطبق عليهم تجربة (بمنحهم حوافز)، ثم تقارن إنتاجيتهم بباقي الموظفين، ويكون دور الاحصاء هو بيان هل الفرق في الانتاجية يرجع إلى الصدفة أم ربما يرجع فعلا إلى المؤثر الذي حدث (منح الحافز) وذلك بدرجة ثقة محددة. وتكون الوسيلة المساعدة في اتخاذ هذا القرار هي اختبارات الفروض الإحصائية.

الفرض العدمي (أو الصفري) The Null Hypothesis

الفرض العدمي هو "الفرض الاساسي المراد اختباره".
ويرمز له عادة بالرمز H_o . هذا الفرض يأخذ – عادة – شكل معادلة أو مساواة.
فمثلا إذا كان الفرض العدمي المراد اختباره هو أن متوسط دخل الفرد في إحدى الدول هو 200 دولار شهريا فإن هذا الفرض يكتب بالرموز كما يلي:

$$H_o : \mu = 200$$

ويقرأ بالشكل التالي:
الفرض العدمي هو أن متوسط دخل الفرد في هذه الدولة هو 200 دولار شهريا.

وكمثال آخر: إذا كان الفرض المراد اختباره هو أن نسبة المؤيدين لبرنامج اقتصادي معين بين مواطني إحدى الدول هي 30%، فإن هذا الفرض يكتب بالرموز كما يلي :

$$H_o : P = 0.30$$

ويقرأ بالشكل التالي:
الفرض العدمي هو أن نسبة المؤيدين للبرنامج الاقتصادي هي 0.30.

الفرض البديل The Alternative Hypothesis

في اختبارات الفروض يتحتم وضع فرض آخر غير الفرض العدمي المراد اختباره يسمى الفرض البديل.

وهذا الفرض "هو المرجح قبوله في حالة رفض الفرض العدمي" أي لابد من تحديد فرض آخر بديل في الوقت الذي نحدد فيه الفرض العدمي، وبالتالي فإن الفرض البديل يعرف كما يلي:

"الفرض البديل هو الفرض الاخر الذي يرجح قبوله في حالة رفض الفرض العدمي" ، ويرمز له عادة بالرمز : H_1

والفرض البديل له أهمية كبيرة في قياس الظواهر الاجتماعية ـ كما سنرى ـ فهو الذي يحدد نوع الاختبار المستخدم. ويتخذ الفرض البديل احد أشكال ثلاثة هي:

أ- أن يأخذ شكل " لا يساوي". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى: اختبار الطرفين.

فمثلا: إذا كان الفرض العدمي هو أن متوسط الدخل الشهري لفئة معينة في المجتمع هو 200 . $H_0 : \mu = 200$

فإن الفرض البديل في هذه الحالة يأخذ الشكل التالي : $H_1 : \mu \neq 200$

بمعنى أن متوسط دخل هذه الفئة من المجتمع " لا يساوي " 200 ريال شهريا .

ب- أن يأخذ شكل " أكبر من". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى: اختبار الطرف الأيمن.

فمثلا: قد يكون الفرض البديل كما يلي: $H_1 : \mu > 200$

اي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أكبر من 200 ريال شهريا .

ج- أن يأخذ شكل "أقل من" ، وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى: اختبار الطرف الايسر.

فمثلا: قد يكون الفرض البديل هو: $H_1 : \mu < 200$

أي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أقل من 200 ريال شهريا .

وسيلة الاختبار:

هي علاقة رياضية تربط بين المعلمة المطلوب اختبار فرض بشأنها و الاحصاءة التي تناظرها المحسوبة من العينة.

هذه العلاقة ينتج عنها قيمة تسمى عادة إحصاءة الاختبار، تساعد هذه القيمة في اتخاذ قرار بشأن قبول أو عدم قبول الفرض العدمي.

وفي العلاقة المشار إليها ، تستخدم بعض المعلومات المستخرجة من العينة مثل حجم العينة والوسط الحسابي للعينة والانحراف المعياري للعينة والنسبة في العينة وغيرها .

الخطأ في اتخاذ القرار:

في حالة قبول الباحث لفرضه العدمي، فلا مجال للبحث في الفرض البديل، أما في حالة حدوث العكس بمعنى رفض الفرض العدمي فأنه يتحتم في هذه الحالة قبول الفرض البديل، على أنه من الجدير بالذكر أن الباحث هنا عرضة للوقوع في الخطأ عند اتخاذ قراره بقبول الفرض العدمي او رفضه، فقد يرفض فرضا هو في الواقع صحيح، وقد يقبل فرضا هو في الواقع غير صحيح. لذلك فقد تم تصنيف هذه الاخطاء إلى **نوعين هما:**

الخطأ من النوع الاول: Type I Error الخطأ من النوع الاول هو "**رفض الفرض العدمي بينما هو صحيح**" ، أي أنه على الرغم من أن الفرض العدمي في الواقع صحيح وكان من الواجب قبوله فقد تم أخذ قرار خاطئ برفضه وباختصار شديد فإن الخطأ من النوع الاول هو "**رفض فرض صحيح**".

الخطأ من النوع الثاني: Type II Error وفي المقابل فان الخطأ من النوع الثاني يعني "**قبول الفرض العدمي بينما هو خاطئ** " ، أي أنه على الرغم من أن الفرض العدمي خاطئ وكان من الواجب رفضه فقد تم أخذ قرار خاطئ بقبوله. وباختصار شديد فان الخطأ من النوع الثاني هو "**قبول فرض خاطئ** ".

مستوى المعنوية (الدلالة) : Level of Significance

المقصود بمستوى المعنوية هو "احتمال حدوث الخطأ من النوع الاول" أو نسبة حدوثه، أي "احتمال رفض الفرض العدمي بينما هو صحيح". وعادة يرمز إلى مستوى المعنوية بالرمز اللاتيني ألفا **α** وأشهر قيمتين لمستوى المعنوية هما 5%، 1 %، ولكن ليس هناك ما يمنع من أن يأخذ قيما أخرى.

ومن الملاحظات المهمة هنا هو أن "مستوى المعنوية" والذي يسمى أحيانا "مستوى الدلالة" هو المكمل لدرجة الثقة بمعنى أن مجموعهما يساوي 100% أو واحد صحيح. فإذا كانت درجة الثقة 95% فإن مستوى المعنوية يساوي 5%. والعكس صحيح فإذا كان مستوى المعنوية 5% فإن هذا يعني أن درجة الثقة 95 %.

ولعل من أهم الملاحظات هنا هو استخدام تعبير "مستوى المعنوية" في حالات اختبارات الفروض، بينما يستخدم مصطلح "درجة أو مستوى الثقة" في حالات التقدير.

المنطقة الحرجة:

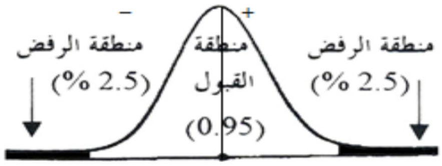
المنطقة الحرجة هي باختصار التمثيل البياني لمستوى المعنوية. وتمثل هذه المنطقة في صورة مساحة تحت منحنى أحد التوزيعات الإحصائية يكون في الغالب إما التوزيع الطبيعي أو توزيع t .

والفكرة الاساسية في اختبار الفرض هي تقسيم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين: أحداهما تسمى "منطقة القبول" أي منطقة قبول الفرض العدمي. والاخرى تسمى "منطقة الرفض"، أي منطقة رفض الفرض العدمي والتي تسمى أحيانا "بالمنطقة الحرجة Critical region".

والنقطة الجديرة بالملاحظة هنا هي أن منطقة القبول تمثل درجة الثقة، بينما تمثل منطقة الرفض مستوى المعنوية. وهناك ثلاث حالات مختلفة لمنطقتي القبول والرفض هي :

الاولى: إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل "لا يساوي" كأن يكون الفرض في هذه الحالة هو أن متوسط دخل الفرد لا يساوي 200 فإن منطقة الرفض تكون موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي، ويسمى الاختبار في هذه الحالة "اختبار الطرفين"، والذي يأخذ الشكل التالي (بافتراض ان α=5%)

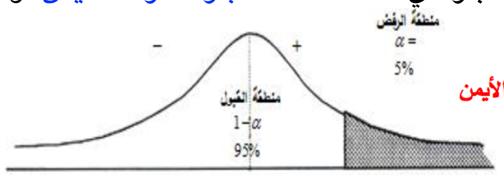
اختبار الطرفين



حيث تمثل المنطقة البيضاء غير المظللة منطقة القبول والتي تساوي 95% وبالتالي فمنطقة الرفض مقسمة بالتساوي على طرفي المنحنى في هذه الحالة تكون قيمة كل منهما 2.5 %.

الثانية: إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل "أكبر من" فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الايمن للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار الطرف الايمن. والذي يأخذ الشكل التالي ادناه:

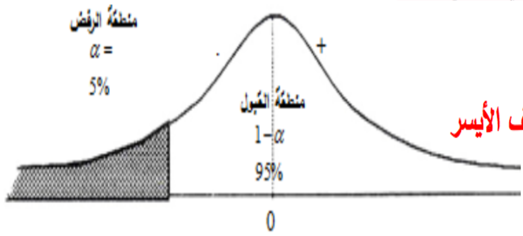
اختبار الطرف الأيمن



فالفرض العدمي هنا نفس فرض المثال السابق، بينما الفرض البديل هو $H_1 : \mu > 200$
بمعنى أن متوسط دخل الفرد أكبر من 200 ريال شهريا.
وبالتالي فإن مستوى المعنوية والذي يساوي مثلا 5% مركز في الطرف الايمن من المنحنى.

الثالثة: إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل "أقل من" فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الايسر للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار الطرف الايسر. والشكل التالي يوضح ذلك:

اختبار الطرف الأيسر



ومع افتراض ثبات الفرض العدمي كما في المثال السابق، يكون الفرض البديل هو$H_1 : \mu < 200$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد أقل من 200 شهريا، وبالتالي فان مستوى المعنوية والذي يساوي مثلا 5 % مركز في الطرف الايسر من المنحنى .

خطوات الاختبار الإحصائي:

1) صياغة الفرضين العدمي والبديل:

- وضع الفرض العدمي H_0، والذي يأخذ – عادة – شكل " يساوي " فمثلا إذا كان المطلوب هو اختبار ما إذا كان متوسط عمر الناخب هو 20 سنة فإن هذا الفرض يصاغ كما يلي: H_0 :µ=20

- وضع الفرض البديل H_1، والذي يأخذ احد أشكال ثلاثة إما :
" لا يساوي " أو " أكبر من " أو " أقل من "

وبالرموز فإن الفرض البديل قد يأخذ شكل احد الصيغ التالية:

$H_1: \mu \neq 20$ او $H_1 : \mu > 20$ او $H_1 : \mu < 20$

2) حساب إحصائية الاختبار: =

$$\frac{\text{قيمة الإحصاءة المناظرة للمعلمة المجهولة من العينة} - \text{قيمة المعلمة المجهولة كما حدد الفرض العدمي}}{\text{الخطأ المعياري}}$$

ويختلف الخطأ المعياري من حالة لأخرى حسب المعلمة المراد اختبار الفروض حولها.

المعلمة المجهولة	رمز المعلمة المجهولة	الإحصاءة المناظرة في العينة	الخطأ المعياري
متوسط المجتمع	μ	$\bar{x}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ أو $\frac{s}{\sqrt{n}}$
النسبة في المجتمع	P	$\hat{p}$	$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

3) تحديد حدود منطقتي القبول والرفض: ونحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري أو توزيع t ، وتختلف وفقا لمستوى المعنوية الخاص بالاختبار وما إذا كان الاختبار ذو طرف واحد أو ذو طرفين.

4) المقارنة والقرار: حيث تقارن قيمة الإحصائية المحسوبة من الخطوة رقم 2 بحدود منطقتي القبول والرفض(من الخطوة رقم 3)، فإن وقعت في منطقة القبول يقبل الفرض العدمي ، بينما لا نستطيع قبول الفرض العدمي إن وقعت الإحصائية المحسوبة في منطقة الرفض (أو أحد منطقتي الرفض).

اي ان خطوات اختبار الفروض تتلخص في الاتي:

1. صياغة الفروض (العدمي والبديل)
2. حساب إحصائية الاختبار
3. تحديد منطقة القبول والرفض
4. اتخاذ قرار بشأن قبول أو عدم قبول الفرض العدمي

اختبارات الفروض حول المتوسط μ

مثال (1): الانحراف المعياري للمجتمع معلوم

اختيرت عينة عشوائية حجمها 49 شخصا من أفراد دولة ما، فإذا كان الوسط الحسابي لدخول الافراد الاسبوعية في العينة هو 75 ريال.

كيف يمكن اختبار الفرض الصفري بأن متوسط الدخل الاسبوعي لمواطني هذه الدولة يساوي 72 ريال مقابل الفرض البديل أنه لا يساوي 72 وذلك بمستوى معنوية 5 % إذا علمت أن الانحراف المعياري لدخول الافراد يساوي 14 ريال.

الحل :

1- الفرض العدمي : هو أن متوسط المجتمع يساوي 72 وبالرموز: $H_0 : \mu = 72$

الفرض البديل : هو أن المتوسط لا يساوي 72 وبالرموز: $H_1 : \mu \neq 72$

2- الإحصائية: بما أن العينة كبيرة فان الإحصائية في حالة اختبار الوسط تأخذ الشكل التالي:

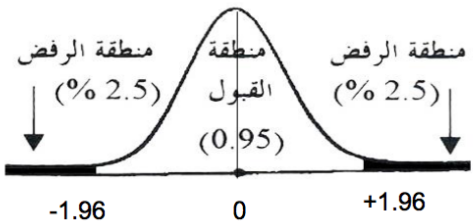
$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

حيث: $n = 49, \sigma = 14, \bar{x} = 75, \mu = 72$

وبالتعويض نحصل على: $Z_{\bar{x}} = \frac{75-72}{\frac{14}{\sqrt{49}}} = 1.5$

اي ان قيمة الإحصائية تساوي 1.5

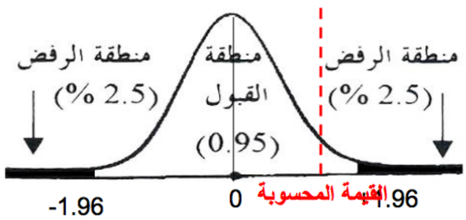
3- حدود منطقتي القبول والرفض: نحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري. حيث مستوى المعنوية 5% وبما أن الفرض البديل هو: " لا يساوي" فإن ما يستخدم في هذه الحالة هو اختبار الطرفين كما في الشكل التالي :



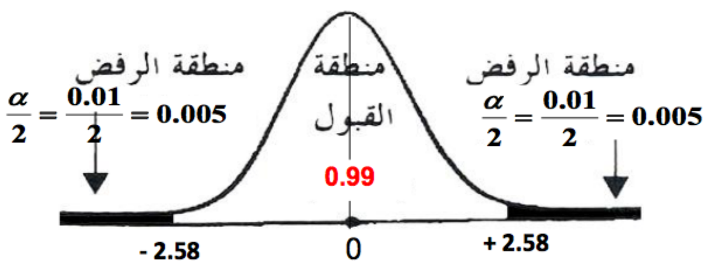
وقد حصلنا على حدود منطقتي القبول والرفض وذلك بقسمة درجة الثقة (المكملة لمستوى المعنوية) والتي تساوي 0.95 على 2 فنحصل على 0.4750 وبالكشف في جدول التوزيع الطبيعي المعياري عن Z التي تقابل المساحة 0.4750 نجد أنها تساوي 1.96 وحيث أنها موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي فنضع إشارة موجبة في النصف الايمن، وإشارة سالبة في النصف الايسر، أي أن منطقة القبول تبدأ من القيمة 1.96- وتستمر حتى القيمة 1.96 + (أي أن أي قيمة محصورة بين هاتين القيمتين تكون في منطقة القبول، وأي قيمة خارج هذه الحدود تكون في منطقة الرفض).

4- المقارنة والقرار: وبمقارنة قيمة الإحصائية المحسوبة من الخطوة رقم 2 (والتي تساوي 1.5) بحدود منطقتي القبول والرفض (من الخطوة رقم 3) نجد أنها تقع في منطقة القبول لذلك فإن القرار هو:

قبول الفرض الصفري بأن متوسط دخول الافراد الاسبوعية في هذه الدولة يساوي 72 ريال وذلك بمستوى معنوية 5 %.

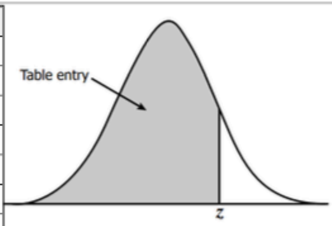


لو استخدمنا مستوى معنوية 1% بدلا من 5% كما في المثال اعلاه فإن حدود منطقتي القبول والرفض تصبح كما يلي :



وبمقارنة قيمة الإحصائية 1.5 بحدود منطقتي القبول والرفض نجد أنها تقع في منطقة القبول أي أن القرار هو نفسه قبول الفرض الصفري ولن يتغير بل يتأكد باستخدام مستوى معنوية 1%.

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990



جدول المساحات أسفل التوزيع الطبيعي المعياري

((المساحة الواقعة قبل أي قيمة موجبة Z))

معاملات الثقة Z

معامل الثقة Z	درجة الثقة
1.65	90%
1.96	95 %
2.58	99%

المحاضرة الثانية عشر

تابع... مقدمة في اختبارات الفروض الإحصائية

اختبارات الفروض الإحصائية

$$\text{إحصائية الاختبار} = \frac{\text{قيمة الإحصاءة المناظرة للمعلمة المجهولة من العينة} - \text{قيمة المعلمة المجهولة كما حدد الفرض العدمي}}{\text{الخطأ المعياري}}$$

المعلمة المجهولة	رمز المعلمة المجهولة	الإحصاءة المناظرة في العينة	الخطأ المعياري
متوسط المجتمع	μ	$\bar{x}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ أو $\frac{s}{\sqrt{n}}$
النسبة في المجتمع	P	$\hat{p}$	$\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

خطوات اختبار الفروض:

1. صياغة الفروض (العدمي والبديل)
2. حساب إحصائية الاختبار
3. تحديد منطقة القبول والرفض
4. اتخاذ قرار بشأن قبول أو عدم قبول الفرض العدمي

مثال (2): الانحراف المعياري للمجتمع مجهول - عينة كبيرة

افترض أن شركة ترغب في اختبار ما إذا كان يمكنها الادعاء بأن متوسط عمر المصباح من إنتاجها هو 1000 ساعة احتراق. وانها قامت بأخذ عينة عشوائية حجمها n = 100 من إنتاجها فوجدت أن متوسط العينة $\bar{x} = 980$ ساعة والانحراف المعياري للعينة s = 80 ساعة.

المطلوب: اختبار هل متوسط عمر المصباح هو 1000 ساعة ، وذلك عند مستوى معنوية 5% ؟

الحل:

1- الفرض العدمي والفرض البديل:

حيث ان μ يمكن أن تساوي أو تزيد عن، أو تقل عن 1,000، فان الشركة يجب أن تضع الفرض العدمي (الصفري) والفرض البديل كالاتي:

$H_0: \mu = 1{,}000$ $\qquad$ $H_1: \mu \neq 1{,}000$

2- إحصائية الاختبار:

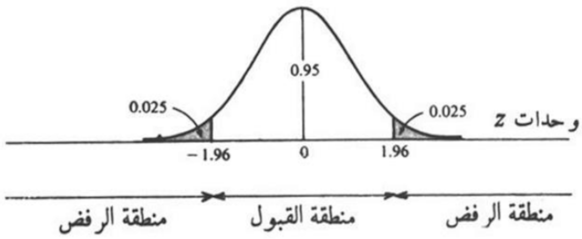
وحيث أن العينة كبيرة (n > 30)، فإن توزيع المعاينة للوسط يكون تقريبا طبيعيا (ويمكن استخدام s كتقدير بد من σ) وتكون إحصائية الاختبار:

$$z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{80/\sqrt{100}} = \frac{-20}{8} = -2.5$$

3- حدود منطقتي القبول والرفض:

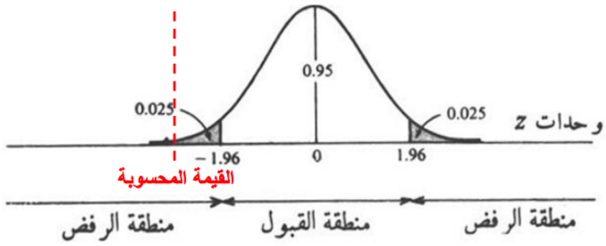
ذكرنا أن توزيع المعاينة للوسط يكون تقريبا طبيعيا طالما أن حجم العينة كبير.

وبالتالي تكون منطقة القبول للاختبار عند مستوى المعنوية 5% بين (,1.96- 1.96+) تحت التوزيع الطبيعي القياسي. وحيث أن الاختبار ذو طرفين (لان الفرض البديل على صورة ≠ فإن منطقة الرفض تقع عند طرفي التوزيع بمساحة 2.5% فيكل طرف.



4- المقارنة والقرار:

بمقارنة القيمة المحسوبة (-2.5) بمناطق الرفض والقبول، نجد أن قيمة z المحسوبة تقع داخل منطقة الرفض، وبالتالي فإن على الشركة أن ترفض الفرضية الصفرية (H_0) اي أن $\mu = 1,000$ وتقبل الفرضية البديلة (H_1) أي $\mu \neq 1,000$ ذلك عند مستوى معنوية 5%.



مثال (3): الانحراف المعياري للمجتمع مجهول - عينة صغيرة

ترغب شركة أن تعرف بدرجة ثقة 95% ما إذا كان يمكنها الادعاء بأن صناديق الصابون المسحوق الذي تبيعها تحتوي على أكثر من 500 جرام (حوالي 1.1 رطل) من الصابون. وتعرف الشركة من الخبرة الماضية أن أوزان الصابون بالصناديق تتبع التوزيع الطبيعي. وقد أخذت الشركة عينة عشوائية حجمها n =25 ووجدت أن $\bar{x} = 520$ جرام و s=75 جرام.

الحل:

1- الفرض العدمي والفرض البديل:

حيث أن الشركة ترغب في اختبار ما إذا كانت $\mu > 500$ فان:

$H_0: \mu = 500$ ، $\mu > 500$

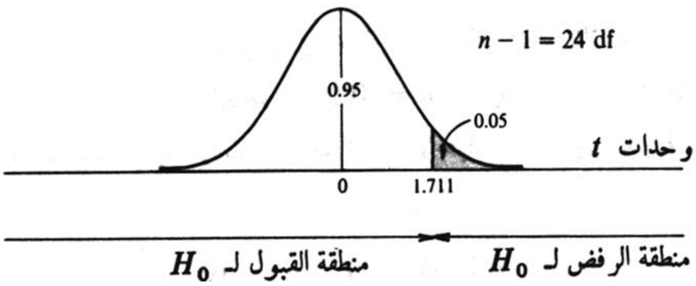
2- إحصائية الاختبار:

حيث أن التوزيع الاصلي الذي سحبت منه العينة طبيعي، والعينة صغيرة ($n < 30$) وكذلك قيمة σ غير معلومة (يتم تقديرها بـ s) فإن توزيع المعاينة للوسط يكون أقرب إلى توزيع t ، وتكون إحصائية الاختبار:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{520 - 500}{75 / \sqrt{25}} = \frac{20}{15} = 1.33$$

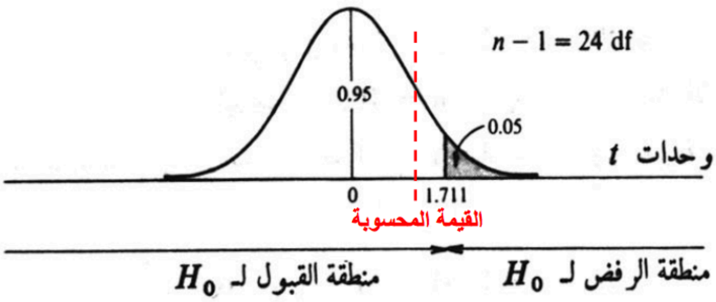
3- حدود منطقتي القبول والرفض:

ذكرنا أن توزيع المعاينة للوسط يكون في هذه الحالة هو توزيع t، وبالتالي علينا أن نستخدم توزيع t (بدرجة حرية n-1-24) لتحديد المنطقة الحرجة، أي منطقة الرفض للاختبار بمستوى معنوية 5%. ونجد ذلك في الجدول الخاص بتوزيع t ، وحيث أن الاختبار ذو طرف واحد (أيمن) لان الفرض البديل على صورة أكبر من ، فإن منطقة الرفض تقع عند الطرف الايمن للتوزيع بمساحة 5% ، وتكون قيمة t التي تحدد المنطقة الحرجة هي $t_{0.05,24}=1.711$



4- المقارنة والقرار:

بمقارنة القيمة المحسوبة (1.33) بمناطق الرفض والقبول، نجد أن قيمة t، المحسوبة تقع داخل منطقة القبول، وبالتالي يقبل الفرض العدمي H_0 ، (μ=500) عند مستوى معنوية 5% (أو بدرجة ثقة 95%) .



مثال (4): اختبارات الفروض حول النسبة P

يدّعى أحد المرشحين في الانتخابات أنه سيحصل على نسبة 70% من أصوات الناخبين عندما تجري الانتخابات. ولاختبار هذا الادعاء تم اختيار عينة عشوائية من الناخبين حجمها 100 ناخب، ووجد أن نسبة من يؤيدون المرشح في العينة هي 60% .

اختبر مدى صحة ادعاء المرشح بأن النسبة في المجتمع هي 70 % مقابل الفرض البديل أن النسبة أقل من 70% وذلك بمستوى معنوية 5 %.

الحل:

1- الفرض العدمي

هو ان النسبة في المجتمع (نسبة من يؤيدون المرشح في المجتمع)هي 0.70 أي ان الفرض العدمي هو ان الادعاء صحيح وان المرشح سيحصل على النسبة التي ادعاها وهي 70% ، وبالرموز

$$H_0: P = 0.70$$

الفرض البديل والمنطقي في هذه الحالة هو أن النسبة في المجتمع أقل من هذا الادعاء وبالرموز:

$$H_1: P < 0.70$$

2- الإحصائية: وتأخذ الإحصائية في حالة اختبار النسبة الشكل التالي:

$$Z = \frac{\hat{p} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

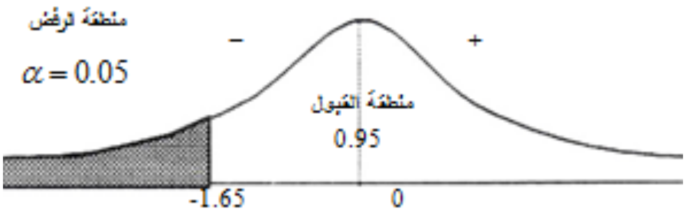
حيث: $n = 100 , \hat{p} = 0.6, P = 0.7$

$$Z = \frac{0.6 - 0.7}{\sqrt{\frac{0.7(1-0.7)}{100}}}$$

Z = -2.18

3- حدود منطقتي القبول والرفض

نحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري، حيث مستوى المعنوية α = 5% وبما أن الفرض البديل هو " أقل من " فنستخدم اختبار الطرف الايسر.



4- المقارنة والقرار:

وبمقارنة قيمة الإحصائية التي حصلنا عليها في الخطوة رقم (3) التي تساوي 2.18 - بحدود منطقتي القبول والرفض نجد أن قيمة الإحصائية تقع في منطقة الرفض لان 2.18 - أصغر من 1.65 - فإن القرار هو :

رفض الفرض العدمي بادعاء المرشح بأن نسبة مؤيديه في المجتمع هي 70 % وقبول الفرض البديل بأن النسبة أقل من 70 % وذلك بمستوى معنوية 5 % (أي أن احتمال الخطأ في هذا القرار لا يتعدى 5 %).

تمارين

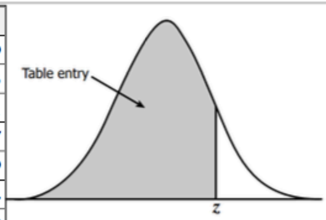
(1) إذا كان متوسط استهلاك الفرد السعودي من الدجاج حسب تقارير وزارة الصحة هو 12 كيلوجرام بانحراف معياري 6 كيلوجرامات لفترة السبعينات الميلادية. أجرى أحد الباحثين دراسة في عام 2003م من عينة قوامها 49 فردا ووجد أن متوسط الاستهلاك للفرد هو 14 كيلوجرام.

هل تشير الدراسة الحالية أن متوسط الاستهلاك أرتفع عما كان عليه في السبعينات؟

(2) ترغب كلية إدارة الاعمال أن تعرف بدرجة ثقة 90% ما إذا كان متوسط معدل الطلاب في السنة الاولى يقل عن 2.5 . اختيرت عينة عشوائية حجمها n = 20 ووجد أن متوسط معدلات الطلاب في العينة يساوي 2.6 بانحراف معياري 0.4. ما الذي يمكن استنتاجه؟

(3) ترغب جامعة الملك فيصل في دراسة نسبة غياب الطلاب عن محاضرات يوم الخميس. ولهذا الغرض تم اختيار عينة عشوائية من الطلاب حجمها 100، ووجد أن نسبة من يغيبون أيام الخميس في العينة هي 27%. اختبر مدى صحة القول بأن النسبة في المجتمع هي 25% مقابل الفرض البديل أن النسبة أكبر من 25% وذلك بمستوى معنوية 5 %.

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

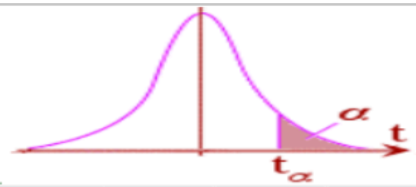


جدول المساحات أسفل التوزيع الطبيعي المعياري

((المساحة الواقعة قبل أي قيمة Z موجبة))

معاملات الثقة Z

درجة الثقة	معامل الثقة Z
90%	1.65
95 %	1.96
99%	2.58



جدول القيم الحرجة لتوزيع t

df | α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	df | α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	47	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	48	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	49	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	62	1.295	1.670	1.999	2.388	2.657
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	63	1.295	1.669	1.998	2.387	2.656
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	64	1.295	1.669	1.998	2.386	2.655
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	79	1.292	1.664	1.990	2.374	2.640
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	81	1.292	1.664	1.990	2.373	2.638
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	98	1.290	1.661	1.984	2.365	2.627
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	99	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	142	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	143	1.287	1.656	1.977	2.353	2.611
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	144	1.287	1.656	1.977	2.353	2.610
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	199	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601

المحاضرة الثالثة عشر

مقدمة في التقدير واختبارات الفروض

باستخدام برنامج SPSS

يعتبر برنامج SPSS من برامج التحليل الإحصائي المعروفة المستخدمة على نطاق واسع وخاصة في مجالات العلوم الادارية والاجتماعية.

ونكتفي في سياق هذا المقرر بعرض موجز لكيفية استخدام هذا البرنامج في تقدير فترات الثقة للمتوسط وكذلك إجراء اختبارات الفروض حول المتوسط باستخدام توزيع t (وهو ما يسمى اختبار t)

تقدير المتوسط بفترة ثقة باستخدام SPSS

مثال:

لتقدير متوسط ساعات المذاكرة للطالب في كلية إدارة الاعمال ، أجرى أحد الباحثين دراسة على عينة قوامها (20) طالبا ووجد أن متوسط ساعات المذاكرة الاسبوعية للطالب هو (7) ساعات بانحراف معياري 1.75 ساعة.

المطلوب: تقدير متوسط ساعات المذاكرة بدرجة ثقة 95%.

الحل:

فترة الثقة للمتوسط:

$$\hat{\mu} = \overline{X} \pm (t_{\alpha/2,n-1}) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

حيث القيمة المستخرجة من جدول توزيع t هي $t_{2.5\%,\,19} = 2.093$

$$\hat{\mu} = \overline{X} \pm (t_{\alpha/2,n-1}) \frac{s}{\sqrt{n}} = 7 \pm 2.093 \frac{1.75}{\sqrt{20}} \cong 7 \pm 0.82$$

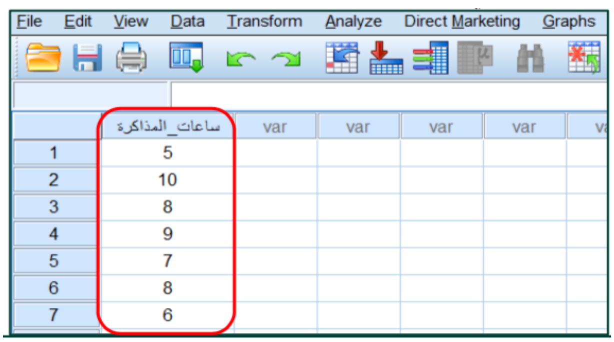
أي أن الحد الادنى لفترة الثقة يساوي 6.18 = 0.82 - 7

والحد الاعلى لفترة الثقة يساوي 7.82 = 0.82 + 7

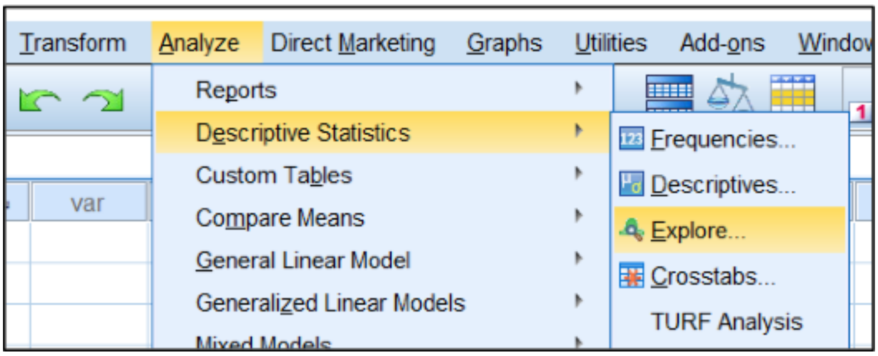
الحــل باستخدام SPSS :

لغرض تقدير فترة الثقة لنفس المثال السابق من خلال استخدام برنامج الـ SPSS نتبع الخطوات التالية :

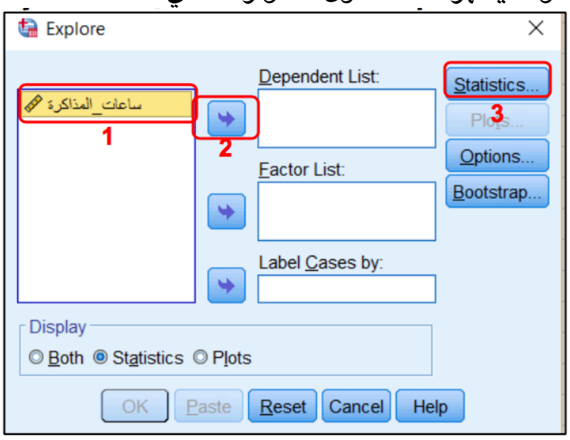
- ✓ إدخال البيانات المراد تحليلها من خلال شاشة تحرير البيانات Data Editor بالطريقة المناسبة كالتالي:



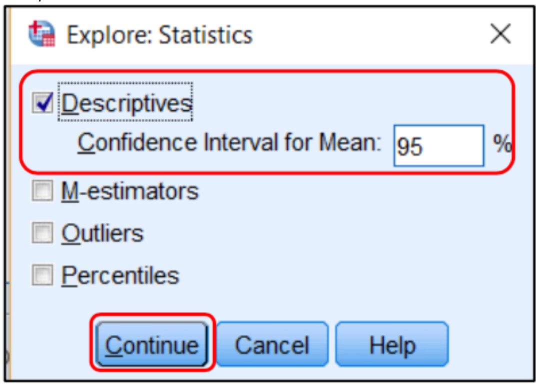
✓ من القائمة Analyze (تحليل) نختار الامر » Descriptive Statistics » ثم Explore .



✓ بعد اختيار الامر "Explore سوف يظهر لك صندوق الحوار التالي :



✓ بعد اختيار Statistics في صندوق الحوار السابق
نحدد درجة الثقة المطلوبة في الخانة بجوار(Confidence Interval for Mean) ثم النقر على زر "استمرار" Continue



✓ أنقر بعد ذلك على زر "موافق" OK سيؤدي ذلك إلى تنفيذ الاختبار، وستلاحظ ظهور النتائج في شاشة المخرجات كالتالي :

Explore

Descriptives

			Statistic	Std. Error
ساعات_المذاكرة	Mean		7.00	.391
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	6.18	
		Upper Bound	7.82	
	5% Trimmed Mean		6.94	
	Median		7.00	
	Variance		3.053	
	Std. Deviation		1.747	

الوسط الحسابي للعينة

الحد الأدنى لفترة الثقة

الحد الأعلى لفترة الثقة

درجة الثقة

الانحراف المعياري من العينة

اختبار الفروض حول المتوسط باستخدام SPSS

مثال على اختبار t :

لو كانت لدينا عينة عشوائية تتكون من 250 طالب وجد أن الوسط الحسابي لاطوال طلاب العينة 155.95 سم،
والانحراف المعياري = 2.94 سم، علما بأن الوسط الحسابي لاطوال طلاب الجامعة يبلغ 158 سم،
اختبر أهمية الفرق المعنوي بين الوسط الحسابي لاطوال طلاب العينة والوسط الحسابي لأطوال طلاب الجامعة.

الحل:

سيتم اختبار الفرضيات التالية :

الفرضية الصفرية: لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسط أطوال الطلاب في العينة ومتوسط أطوال الطلاب في الجامعة

$$(\mu = \mu_0)$$

الفرضية البديلة: توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسط أطوال الطلاب في العينة ومتوسط أطوال الطلاب في الجامعة

$$(\mu \neq \mu_0)$$

مستوى الدلالة: $\alpha = 0.05$

منطقة الرفض: قيمة (ت) الجدولية عند مستوى دلالة α 0.05 ودرجات حرية 249 = 1.960

المختبر الإحصائي:

$\overline{X}$ = 155.95سم ، n = 250 طالب ، S = 2.94 سم

μ = 158سم

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{155.95 - 158}{2.94/\sqrt{250}} = -11.006$$

القرار:

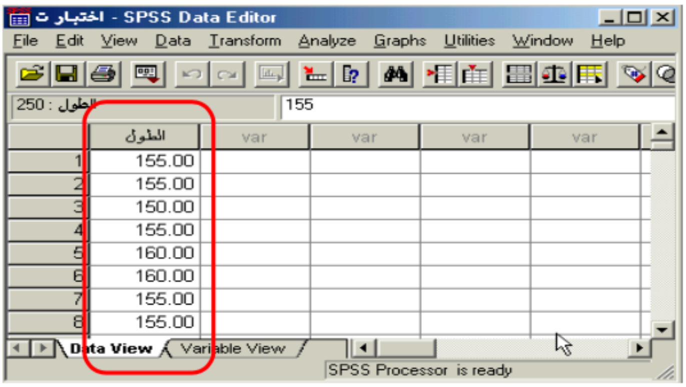
0٥0 قيمة ت المحسوبة (- 11.006) أكبر من قيمة ت المجدولـة (1.96) عند مستوى دلالة . $\alpha = 0.05$

- نرفض الفرضية الصفرية ونقبل البديلة .

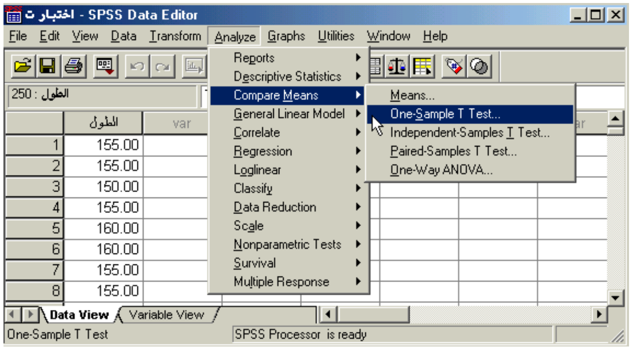
أي أنه توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين الوسط الحسابي للعينة والوسط الحسابي لمجتمـع البحث .

لغرض حساب قيمة (ت) لنفس المثال السابق من خلال استخدام برنامج الـ SPSS نتبع الخطوات التالية :

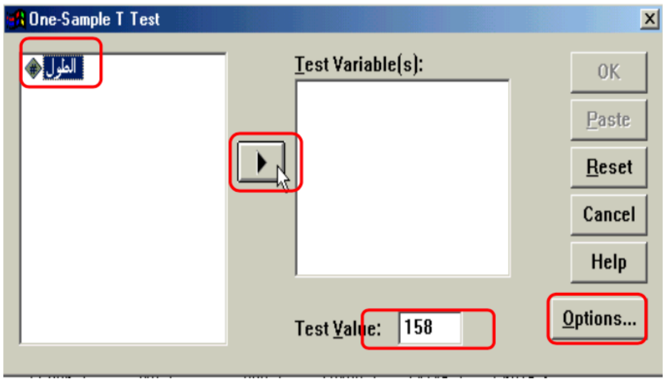
✓ إدخال البيانات المراد تحليلها من خلال شاشة تحرير البيانات Data Editor بالطريقة المناسبة كالتالي:



✓ من القائمة "تحليل" Analyze اختر الامر "مقارنة المتوسطات" Compare Means فتظهر قائمة أوامر فرعية اختر منها "اختبار (ت) لعينة واحدة" One-Sample T Test كالتالي:



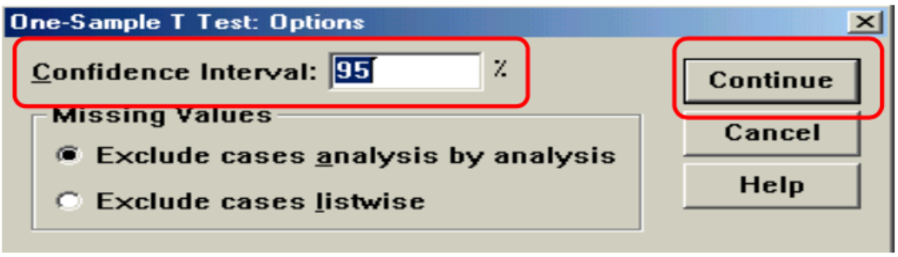
✓ بعد اختيار الامر "اختبار (ت) لعينة واحد" One-Sample T Test سوف يظهر لك صندوق الحوار التالي



✓ من قائمة المتغيرات في الجهة اليسرى من صندوق الحوار انقر نقرا مزدوجا على المتغير "الطول" (أو أنقر على السهم الذي يظهر في صندوق الحوار بعد التظليل على المتغير المرغوب نقله إلى الجهة الاخرى) ستلاحظ انتقاله مباشرة في المستطيل "متغيرات الاختبار" Test Variable (s) .

✓ في الحقل الخاص بـ "القيمة المختبرة" Test Value اكتب القيمة التي تريد أن تقارن بها متوسط العينة موضع الدراسة (في هذا المثال يتم كتابة الرقم 158 والذي يمثل متوسط أطوال الطلاب في الجامعة)

✓ قم بالنقر على زر "خيارات" Options في الجهة السفلية اليمنى من صندوق الحوار السابق وذلك عند الرغبة في تغيير قيمة "فترة الثقة" Confidence Interval حيث يظهر لك صندوق الحوار التالي والذي يتيح إمكانية تغيير فترة الثقة المختبرة (بشكل تلقائي سوف تظهر القيمة 95%) ، وبعد الانتهاء من التعديل على هذا الصندوق الحواري انقر على زر "استمرار" Continue .



✓ انقر بعد ذلك على زر "موافق" OK سيؤدي ذلك إلى تنفيذ الاختبار، وستلاحظ ظهور النتائج في شاشة المخرجات كالتالي

T-Test

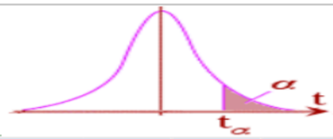
One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
الطول	250	155.9520	2.9422	.1861

One-Sample Test

	Test Value = 158					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
الطول	-11.006	249	.000	-2.0480	-2.4145	-1.6815

يتضح من النتائج أن قيمة (ت) المحسوبة t-test = 11.006 ، ودرجات الحرية df = 249 ، وقيمة Sig (2-tailed) = 0.000 ، وبما أن قيمة Sig (2-tailed) في الجدول (0.000) أصغر من قيمة α = 0.05 فإننا بالتالي نرفض الفرضية الصفرية، أي أنه توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسط أطوال العينة ومتوسطة اطوال طلاب الجامعة.



جدول القيم الحرجة لتوزيع t

df | α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	df | α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	35	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	47	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	48	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	49	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	62	1.295	1.670	1.999	2.388	2.657
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	63	1.295	1.669	1.998	2.387	2.656
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	64	1.295	1.669	1.998	2.386	2.655
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	79	1.292	1.664	1.990	2.374	2.640
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	81	1.292	1.664	1.990	2.373	2.638
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	98	1.290	1.661	1.984	2.365	2.627
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	99	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	142	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	143	1.287	1.656	1.977	2.353	2.611
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	144	1.287	1.656	1.977	2.353	2.610
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	199	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601

المحاضرة الرابعة عشر

مراجعة عامة

الاحتمالات والمتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

1 . إذا كان $A \subset B$ ، فإن:

(a) $A \cap B = B$

(b) $A \cap B = A$

(c) $A \cap B = A - B$

$A \cap B = \emptyset (d)$

2 . إذا كان A و B حدثان مستقلان ، فإن:

(a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

(b) $P(A \cap B) = 0$

(c) $P(A \cap B) = P(A \cup B)$

(d) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

3 . إذا كان A و B حدثان متنافيان أو متعارضان ، فإن:

(a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

(b) $P(A \cap B) = 0$

(c) $P(A \cap B) = P(A \cup B)$

(d) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

4 . إذا كان احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد هو 0.7 وفي مقرر المحاسبة هو 0.8 ، فإن احتمال النجاح في المقررين معا يساوي:

(a) 1.5

(b) 0.87

(c) 0.56

(d) 0.94

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الطلاب تبعاً للنوع ومحل الإقامة:

النوع /الإقامة	الأحساء	خارج الأحساء	المجموع
ذكر	200	300	500
أنثى	400	100	500
المجموع	600	400	1000

5 . إذا اختيرت إحدى الطالبات ، فإن احتمال أن تكون من بين المقيمات في الأحساء يساوي:

(a) 0.40

(b) 0.67

(c) 0.33

(d) 0.80

النوع /الإقامة	الأحساء	خارج الأحساء	المجموع
ذكر	200	300	500
أنثى	400	100	500
المجموع	600	400	1000

6 . إذا اخترت أحد الدراسين عشوائيا ، فإن احتمال أن يكون طالبا مقيما خارج الأحساء يساوي:

(a) 0.30

(b) 0.67

(c) 0.33

(d) 0.80

7 . إذا كان X متغيرا عشوائيا يمثل عدد الأطفال الذكور في الأسر السعودية، فإن هذا المتغير:

(a) متصل

(b) منفصل

(c) ترتيبي

(d) إسمي

8 . عند إلقاء قطعة عملة ثلاث مرات ، فإن عدد عناصر فراغ العينة يساوي:

(a) 36

(b) 6

(c) 8

(d) 12

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

x	1	2	3	4	5
P(x)	0.1	0.3	0.3	C	0.1

9 . قيمة C تساوي:

(a) 0.1

(b) 0.2

(c) 0.3

(d) 0.4

10. $P(X<3) =$

(a) 0.3

(b) 0.1

(c) 0.6

(d) 0.4

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{2}, \qquad 1 \le x \le 3$$

11. $P(X < 2) =$

(a) 0

(b) 0.25

(c) 0.50

(d) 1

12. القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X تساوي:

(a) 1 (c) 3

(b) 2 (d) 9

13. التوزيع الذي قيمته المتوقعة دائما تساوي الصفر هو:

(a) توزيع ذو الحدين

(b) توزيع بواسون.

(c) التوزيع الطبيعي.

(d) توزيع t

14. التوزيع الذي يتساوى متوسطه وتباينه هو:

(a) توزيع ذو الحدين

(b) توزيع بواسون.

(c) التوزيع الطبيعي.

(d) توزيع t

اشترى شخص 4 لمبات كهربائية ، فإذا كان احتمال أن تكون أي منها تالفة هو 0.1 اذا كان عدد اللمبات التالفة يتبع توزيع ذو الحدين ، أجب عن الأسئلة التالية :

15. احتمال أن تكون لمبة واحدة على الأقل تالفة يساوي:

(a) 0.6561

(b) 0.3439

(c) 0.4339

(d) 0.5661

16. القيمة المتوقعة لعدد الوحدات التالفة تساوي:

(a) 0.10

(b) 0.90

(c) 0.09

(d) 0.40

إذا كان عدد الحوادث في إحدى المدن يتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 حوادث في الشهر. احسب الاحتمالات التالية:

17. احتمال عدم حدوث أي حريق في شهر معين يساوي:

(a) 0.99999
(b) 0.00001
(c) 0.04979
(d) 0.95021

18. الانحراف المعياري لعدد الحرائق يساوي:

(a) 0.33
(b) 1
(c) 1.73
(d) 3

19. إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع t بدرجات حرية 20 ، أي $X \sim t_{20}$ فإن القيمة $t(0.10,20)$ تساوي:

(a) 1.725
(b) 1.812
(c) 1.372
(d) 1.325

20. إذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 85$ وتباين $\sigma^2 = 9$، فإن $P(82 < X < 88)$ يساوي:

(a) 0.6826
(b) 0.50
(c) 0.9545
(d) 0.9973

توزيعات المعاينة والتقدير واختبارات الفروض

21. عدد العينات ذات الحجم 2 التي يمكن سحبها مع الإرجاع من مجتمع عدد مفرداته 5 يساوي:

(a) 25
(b) 125
(c) 15
(d) 10

22. أي أنواع العينات التالية ليس عينة عشوائية؟

(a) العينة الطبقية
(b) العينة العنقودية
(c) عينة الحصص
(d) العينة المنتظمة

23. إذا كان الدخل اليومي للأفراد في إحدى الدول يتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري 15 دولاراً، فما هو حجم العينة المناسب لتقدير متوسط الدخل اليومي للأفراد في هذه الدولة بحيث لا يتعدى خطأ التقدير 5 دولارات، وذلك بدرجة ثقة 99 % ؟

(a) 60

(b) 173

(c) 35

(d) 300

24. حجم العينة المناسب لتقدير نسبة المدخنين من بين طلاب جامعة الملك فيصل إذا كنا نرغب في ألا يزيد خطأ التقدير عن 5% وبدرجة ثقة 95% يساوي:

(a) 10 (b) 100

(c) 385 (d) 1554

25. إذا سحبت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2، وكان $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمسحوبة من هذا المجتمع فإن $\bar{x}$ يتبع توزيع t إذا كان :

(a) σ^2 معلوما

(b) σ^2 مجهولا

(c) σ^2 مجهولا و n كبيرة

(d) σ^2 مجهولا و n صغيرة

26. إذا كان مؤشر إغلاق البورصة يتبع توزيعا طبيعيا متوسطه 6000 نقطة بانحراف معياري 1000 نقطة. إذا اختيرت عينة من 36 يوم بشكل عشوائي لتقييم السوق ، فإن احتمال أن يتخطى متوسط مؤشر إغلاق السوق ($\bar{x}$) حاجز 6100 نقطة يساوى:

(a) 0.7257 (b) 0.2743

(c) 0.5398 (d) 0.4602

سحبت عينة عشوائية من طلاب إحدى الجامعات بلغ حجمها 100 طالبا، فإذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات الطلاب بالعينة هما على الترتيب 85 درجة و 10 درجات ، فإنه:

27. بفرض استخدام توزيع t ، الحد الأدنى لفترة الثقة للوسط الحسابي لدرجات الطلاب في هذه الجامعة بدرجة ثقة 95% يساوي تقريبا:

(a) 85

(b) 95

(c) 83.02

(d) 83.34

28. بفرض استخدام التوزيع الطبيعي ، الحد الأعلى لفترة الثقة للوسط الحسابي لدرجات الطلاب في هذه الجامعة بدرجة ثقة 99% يساوي تقريبا:

(a) 85 (b) 95

(c) 87.63 (d) 87.58

إذا كان متوسط درجات الطلاب في مقرر معين هو 75 درجة بانحراف معياري 5 درجات وذلك خلال عام 2010. أجرى أحد الباحثين دراسة عام 2015 لعينة قوامها 100 طالب ممن يدرسون نفس المقرر ووجد أن متوسط الدرجات في العينة هو 80 درجة. لاختبار هل تشير الدراسة التي قام بها الباحث أن متوسط درجات الطلاب في هذا المقرر قد ارتفع عما كان عليه في 2010 وذلك بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$:

29. الفرض العدمي يأخذ الصيغة:

(a) $H_o : \mu = 75$

(b) $H_o : \mu = 80$

(c) $H_o : \mu > 75$

(d) $H_o : \mu > 80$

30. قيمة إحصائية الاختبار تساوي:

(a) 1.96

(b) 2.33

(c) 75

(d) 10

31. إذا كانت قيمة Z الجدولية تساوي 2 تقريبا ، فإن القرار هو:

(a) قبول الفرض العدمي

(b) عدم قبول الفرض العدمي

(c) عدم قبول أي من الفرضين

(d) قبول كلا الفرضين

مستعينا بالمقطع التالي من مخرجات برنامج SPSS ، أجب عن الأسئلة التالية:

One-Sample Test

	Test Value = 50					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
write writing score	4.140	199	.000	2.77500	1.4533	4.0967

32. القيمة المحسوبة (إحصائية الاختبار) تساوي:

(a) 4.0967

(b) 1.4533

(c) 199

(d) 4.140

مستعينا بالمقطع التالي من مخرجات برنامج SPSS ، أجب عن الأسئلة التالية:

One-Sample Test

	Test Value = 50					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
write writing score	4.140	199	.000	2.77500	1.4533	4.0967

33. نتيجة الاختبار - إذا كانت درجة الثقة تساوي 99%- هي:

(a) قبول الفرض العدمي

(b) عدم قبول الفرض العدمي

(c) قبول كلا الفرضين العدمي والبديل

(d) عدم قبول أي من الفرضين

ملاحظة الجداول موجودة في المحاضرات السابقة..

تم.. بحمد الله
دعواتكم مطلبي..

ام شهد..
جامعة الملك فيصل تعليم عن بعد

بالتوفيق للجميع.. ☺