سوف يتم تغطية النقاط التالية خلال هذا الفصل:

أولاً: المنطق و جداول الصواب:

١. التقارير البسيطة و المركبة
٢. أدوات الربط و جداول الصواب
٣. التكافؤ المنطقي
٤. قانوني De Morgan
٥. علاقات التطابق و التطابق العكسي
٦. منطق الدرجة الأولى

ثانياً: طرق البرهان:

١. البرهان المباشر
٢. البرهان غير المباشر:
   أ- البرهان العكسي
   ب- البرهان بطريقة الحالات
   ت- المثال المناقض
   ث- البرهان بالتناقض
٣. الاستقراء الرياضي

المنطق الرياضي: (Mathematical Logic)

هو علم يُعنى بدراسة مبادئ و معايير صحة الاستدلال و يتعامل مع المسببات و الاستنتاجات ويستخدم في معظم الأنشطة الفكرية و العلوم البحتة و التطبيقية، كما أنه يعنى بالمعنى الحديث دراسة طرق البرهان و استخدامها.

التقرير: (Proposition)

هو عبارة تتضمن موضوعاً و فعلاً كما هي الجملة في اللغة العربية، غير أن التقرير يحصر فقط في الجمل الخبرية (التي تتضمن خبراً) و ليست الجمل الإنشائية (كصيغ الأمر و النهي و الاستفهام)

و نستطيع التعبير بشكل أدق عن التقرير بأنه الجملة الخبرية التي تحتمل الصحة أو الخطأ فقط.

أمثلة:

١. العدد ٧ أولي
٢. ٤+٦=١٠
٣. اليوم ماطر

التقارير البسيطة و المركبة:

يسمى التقرير بسيطاً إذا كان عبارة عن جملة خبرية واحدة فقط، بينما يسمى مركباً إذا احتوى أكثر من جملة خبرية. سوف نستخدم الأحرف الصغيرة (a,b,c,…) للتعبير عن التقارير البسيطة و الأحرف الكبيرة (A,B,C,…) للتعبير عن التقارير المركبة.

التقارير تحتمل الصحة أو الخطأ، و عندما نريد التحقق من صحة أو خطأ مجموعة من التقارير مرتبطة مع بعضها بعلاقة نستخدم جداول الصواب.

لنتعرف بداية على أهم أدوات الربط بين التقارير.

أدوات الربط: (Connectives)

الرموز $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$ تسمى أدوات الربط بين التقارير. للتعرف أكثر على خصائصها نستخدم جداول الصواب. باعتبار أن (T=True, F=False)

أداة النفي ($\neg$): (Negation)

$\neg a$	a
F	T
T	F

العمود الأول "a" يضع كل الاحتمالات الممكنة و العمود الآخر يعطي قيمة ليس a .

أداة العطف أو التزامن ($\wedge$): (Conjunction)

a	b	$a \wedge b$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

نلاحظ أن قيمة العلاقة b و a و المعرفة بـ $a \wedge b$ تكون صحيحة فقط عندما يكون التقريران صحيحين.

أداة الفصل ($\vee$): (Disjunction)

a	b	$a \vee b$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

تكون العلاقة b أو a و المعرفة بـ $a \vee b$ خاطئة فقط عندما يكون كلاً من b و a خاطئين.

أداة الاستلزام الشرطي ($\Longrightarrow$): (Implication)

a	b	$a \Longrightarrow b$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

علاقة الاقتضاء تكون خاطئة عندما تكون المعطيات صحيحة و النتيجة خاطئة.

أداة التكافؤ ($\Leftrightarrow$): (Biconditional)

a	b	$a \Leftrightarrow b$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

التكافؤ هو نتيجة للجدول السابق إذا أخذنا في الاعتبار الاقتضاء من و إلى b و a

يمكننا عمل جداول الصواب للعلاقات السابقة للتقارير المركبة كذلك مع الأخذ بالاعتبار تحديد صفوف كافية لكافة الاحتمالات.

مثال: أوجد جدول الصواب للعلاقات:

١. $p \Longrightarrow (q \vee r)$
٢. $p \Longrightarrow \neg(q \Longrightarrow r)$

تعريف:

نقول عن التقرير المركب أنه **صائب كلياً** إذا كانت جميع القيم فيه صائبة بغض النظر عن قيم التقارير البسيطة المكون منها. و عندما تكون جميع القيم خاطئة يسمى **خاطئ كلياً**.

مثال:

١. $a \Longrightarrow (b \Longrightarrow a)$ صائب كلياً
٢. $p \Leftrightarrow (p \Longrightarrow \neg p)$ خاطئ كلياً

تعريف:

نقول عن التقريرين p و q أنهما متكافئين منطقياً إذا كان $p \Leftrightarrow q$ صائب كلياً.

في الجدول التالي نرى أهم العلاقات المتكافئة منطقياً:

اسم الخاصية	التطابق
Identity laws	$P \wedge T \iff P$ $P \vee F \iff P$
Domination laws	$P \vee T \iff T$ $P \wedge F \iff F$
Idempotent laws	$P \vee P \iff P$ $P \wedge P \iff P$
Double negation law	$\neg(\neg p) \iff P$
Commutative laws	$p \wedge q \iff q \wedge p$ $p \vee q \iff q \vee p$
Associative laws	$(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$
Distributive laws	$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
De Morgan's laws	$\neg (p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ $\neg (p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$

المطلوب إثبات العلاقات السابقة !!!

تعريف: التطابق العكسي (contrapositive)

التطابق العكسي للتقرير المركب $p \implies q$ هو التقرير $\neg q \implies \neg p$

نظرية:

كل تقرير يكافأ منطقياً تطابقه العكسي.

البرهان:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
T	T	**T**	F	F	**T**	**T**
T	F	**F**	T	F	**F**	**T**
F	T	**T**	F	T	**T**	**T**
F	F	**T**	T	T	**T**	**T**

من خلال جدول الصواب السابق يتبين أن التقريرين متكافئان منطقياً.

تعريف:
تعرف المجموعة بأنها عبارة عن تجمع عناصر مختلفة.

أمثلة:

Natural numbers: $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية

Integers: $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ مجموعة الأعداد الصحيحة

Rational numbers: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in N, b \neq 0\}$ مجموعة الأعداد القياسية

Real numbers: $\mathbb{R}$ = {rational and irrational numbers} مجموعة الأعداد الحقيقية

تعريف:
نقول عن مجموعتين أنهما متساويتان إذا كان لهما نفس العناصر.

مثال:
نقول عن المجموعتين $\{1, 3, 5\}$ و $\{3, 1, 5\}$ أنهما متساويتان لأنهما يحتويان نفس العناصر. بالتأكيد أنه لا يعتد بترتيب العناصر. نلاحظ أيضا أنه لا يهم إذا كان عنصر من مجموعة سرد أكثر من مرة، حتى أن $\{1,3,3,3,5,5,5,5,\}$ هو نفس مجموعة $\{1, 3, 5\}$ لأن لديهم نفس العناصر.

طريقة أخرى لوصف مجموعة هي استخدام خواص التوصيف. حيث نصنف جميع العناصر في المجموعة حسب خاصية أو أكثر.

على سبيل المثال المجموعة التي تحوي جميع الأعداد الفردية أقل من ١٠ يمكن كتابتها بالتعبير التالي:

O={x| x is an odd positive integer less than 10}

نحن غالبا ما نستخدم هذا النوع من التدوين لوصف مجموعات عندما يستحيل سرد جميع عناصرها.

على سبيل المثال :

Real numbers: $\mathbb{R}$ = {rational and irrational numbers} مجموعة الأعداد الحقيقية

تعريفات هامة:

١. نقول عن عنصر a أنه ينتمي إلى المجموعة A ونكتب $a \in A$ ، عندما يكون a أحد عناصر A . بينما عندما نكتب $a \notin A$ فهذا يعني أن a لا ينتمي إلى A .

٢. نقول أن المجموعة A هي مجموعة جزئية من B و نكتب $A \subseteq B$ إذا و إذا فقط كان كل عنصر من A هو عنصر من B . و هذا يعني:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

٣. المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة.

٤. كل مجموعة هي جزئية من نفسها.

٥. عندما تكون A مجموعة جزئية من B و لا تساويها و تكتب $A \subset B$ ، تسمى مجموعة جزئية فعلية من B . و بالعكس نقول أن:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

٦. لتكن S مجموعة تحوي فقط n من العناصر المختلفة، حيث n عدد صحيح موجب، فإن S تسمى مجموعة منتهية و n هو عدد عناصرها أو ***cardinality* of S** و يعبر عنه كما يلي:

$$|S| = n$$

٧. لتكن S مجموعة منتهية عدد عناصرها n، نعرف مجموعة القوة بأنها مجموعة جميع المجموعات الجزئية لـ S . و تعرف بالشكل $\mathcal{P}(S)$. و عدد المجموعات الجزئية هو 2^n.

٨. يعرف الضرب بين مجموعتين A و B كما يلي:

$$A \times B = \{ (a,b) |\, a \in A , b \in B \}.$$

تمارين:

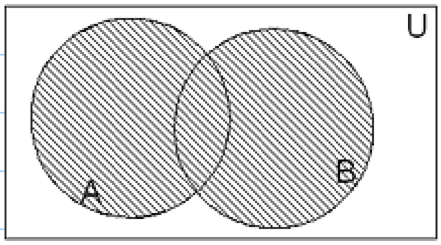
١. إذا كانت $A = \{0,1,2\}$ أوجد مجموعة القوة لـ A .

٢. لتكن $A = \{1,2\}$ و $B = \{3,4\}$ أوجد $A \times B$.

٣. لتكن $A = \{0,1\}$ و $B = \{1,2\}$ و $C = \{0,1,2\}$ أوجد $A \times B \times C$.

العمليات على المجموعات:

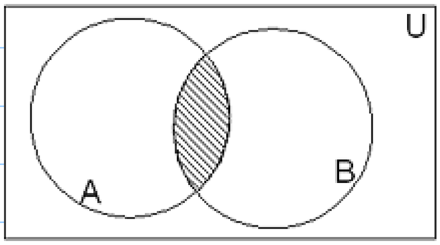
١. <u>الاتحاد : (Union)</u>



اتحاد مجموعتين A و B و يعرف بالشكل $A \cup B$
هو جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو B أو كليهما.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

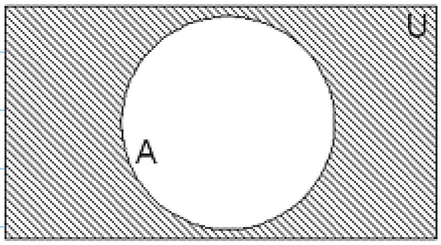
٢. <u>التقاطع: (Intersection)</u>



تقاطع مجموعتين A و B و يعرف بالشكل $A \cap B$
هو جميع العناصر التي تنتمي إلى A و B معاً.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

٣. <u>الفرق: (Difference)</u>



العنصر x ينتمي إلى الفرق بين A و B إذا و إذا فقط كان

$$x \in A \wedge x \notin B$$

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$