المحاضرة التمهيدية

أهداف المقرر:

الهدف من المقرر:

يهدف هذا المقرر إلى التعرّف على أساسيات التفاضل والتكامل وتطبيقاتهما خاصة في العلوم الإدارية. وذلك من خلال التعرف على الدوال بأنواعها المختلفة وكيفية حساب النهاية لها والبحث في اتصالها ومن ثم إيجاد الاشتقاق لها وتحديد القيم العظمى والصغرى بالإضافة إلى إيجاد التكامل المحدود وغير المحدود وأساليب التكامل المختلفة في التطبيقات الاقتصادية.

محتويات المقرر:

يحتوي هذا المقرر على المواضيع التالية:

الموضوع الأول : المجموعات (تمهيد)

الموضوع الثاني : العلاقات والدوال

الموضوع الثالث : النهايات والاتصال

الموضوع الرابع : التفاضل وتطبيقاته

الموضوع الخامس: التكامل وتطبيقاته

<u>الكتاب الدراسي:</u>

•الرياضيات العامة وتطبيقاتها الاقتصادية د. عدنان محمد عوض - عمان – دار الفرقان (٢٠٠٤)

<u>بعض المراجع المختارة</u>

•الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية فتحي خليل حمدان - عمان– دار وائل - الطبعة الثانية (٢٠٠٩)

تابع : المراجع المختارة:

- الرياضيات في الاقتصاد والإدارة – الجزء الثاني ، تأليف احمد محمد باروم ، محمد طلعت عبدالناصر، عبدالشافي فهمي عبادة، يوسف نصرالدين

المحاضرة الأولى
المجموعات

تعريف المجموعة:

المجموعة ببساطة هي تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماماً. وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شئ آخر.
ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل:
$A, B, C, \cdots$

تابع : تعريف المجموعة:

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل:
$a, b, c, \cdots$

تابع : تعريف المجموعة:

يستخدم الرمز ϵ يستخدم الرمز "ينتمي إلى" ليبين عناصر المجموعة ، فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \in A$

تابع : تعريف المجموعة:

أما إذا كان a ليس عنصرا من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة
ملاحظة : تعد دراسة المجموعات ذات أهمية كبيرة في دراسة العلاقات والدوال.

طرق كتابة المجموعات:
•طريقة العد (سرد العناصر):

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة "," مثل: $A = \{1,3,5,7\}$

تابع: طرق كتابة المجموعات:

$B = \{a, b, c, d\}$
$C = \{1,2,3,\cdots\}$
بحيث لا يتم تكرار العناصر

تابع: طرق كتابة المجموعات:

•طريقة القاعدة (الصفة المميزة):

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ، فمثلاً :

A={x:كلية بجامعة الملك فيصلx}

تابع: طرق كتابة المجموعات:

B={x:طالب يدرس هذا المقرر حالياx}

C={x: عدد طبيعي زوجي x }

D={x: -3≤x ≤1 ،عدد حقيقي X}

X={x: 0≤x ≤12 ،عدد صحيح X}

أنواع المجموعات:

- **المجموعة الخالية:**

هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز Φ أو { } .

مثلا: A={x:x^2+1=0 ،عدد حقيقيx}

تابع: أنواع المجموعات:

- **المجموعة المنتهية:**

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة

مثال: المجموعات التالية مجموعات منتهية

$$A=\{2,4,6,8\}$$

$$B=\{1,2,3,\cdots,100\}$$

$$C=\{x,y,z,w,u\}$$

تابع: أنواع المجموعات:

•المجموعة غير المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات غير منتهية

A={x:عدد طبيعي فردي x }

$$B=\{10,20,30,\cdots\}$$

$$C=\{x\in R: 0\le x\le 10\}$$

تابع: أنواع المجموعات:

•المجموعة الكلية:

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية منها، ويرمز لها بالرمز U.

تابع: أنواع المجموعات:

أمثلة:

•إذا كانت $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

فان $A\subset B$

٢. مجموعة جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

تابع: أنواع المجموعات:

•تساوي المجموعات:

تكون المجموعتان A ،B متساويتان إذا كانت

$A\subseteq B, B\subseteq A \Rightarrow A=B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصورة

$A\equiv B$

تابع: أنواع المجموعات:

مثال:

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية؟

$1-A=\{1,3,5,7\}\ ,\ B=\{3,1,5,7\}$

$2-A=\{0,1,2\}\ ,\ B=\{a,b,c\}$

الحل:

1) $A=B$

2) $A\equiv B$

العمليات على المجموعات:

•الاتحاد

اتحاد المجموعتين A ،B ($A\cup B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما. أي أن :

$$A\cup B=\{x : x\in A \vee x\in B\}$$

تابع : العمليات على المجموعات:

•التقاطع

تقاطع المجموعتين A، B($A \cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً. أي العناصر المشتركة بين A و B . أي أن

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

تابع : العمليات على المجموعات:

•المكملة

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A. أي أن

$$\overline{A} = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$

تابع : العمليات على المجموعات:

•الفرق

إذا كانت مجموعتان A، B فان A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة A وليست في B.أي أن

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

تابع: العمليات الجبرية على المجموعات:

مثال:

إذا كانت $A = \{1,2,3, x, y\}$ و $B = \{3,4,5, x, w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U = \{1,2,3,4,5, w, x, y, z\}$

فأوجد:

1) $A \cup B$

2) $A \cap B$

3) $A - B$

4) $\overline{A}$

5) $\overline{B}$

الحل:

1) $A \cup B = \{1,2,3,4,5, x, y, w\}$

2) $A \cap B = \{3, x\}$

3) $A - B = \{1,2, y\}$

4) $\overline{A} = \{4,5, w, z\}$

5) $\overline{B} = \{1,2, y, z\}$

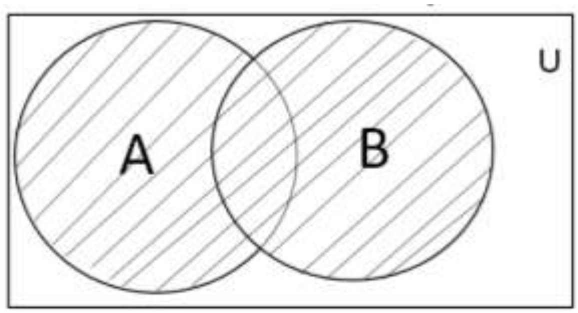
المحاضرة الثانية

المجموعات – الجزء الثاني

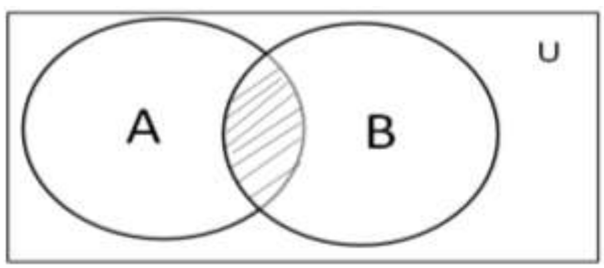
أشكال فين:

يمكن استخدام الأشكال الهندسية لتمثيل المجموعات والعمليات عليها، حيث يتم تمثيل المجموعة الكلية U بمستطيل ومن ثم أي مجموعة جزئية منها بشكل هندسي كالدائرة مثلاً، يرسم داخل المستطيل ، وتستخدم هذه الأشكال لتوضيح العمليات التي نجريها على المجموعات مثل الاتحاد و التقاطع والمكملة والفرق وغيرها. كما في الأمثلة التالية:

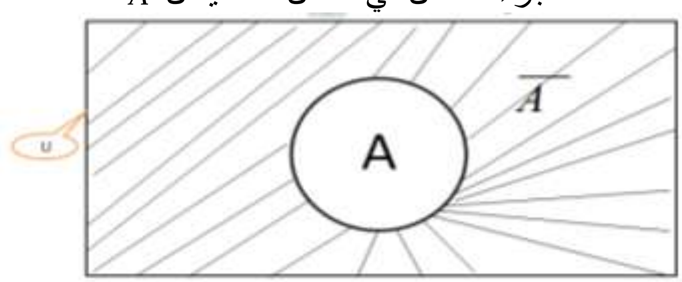
الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل اتحاد مجموعتين A و B



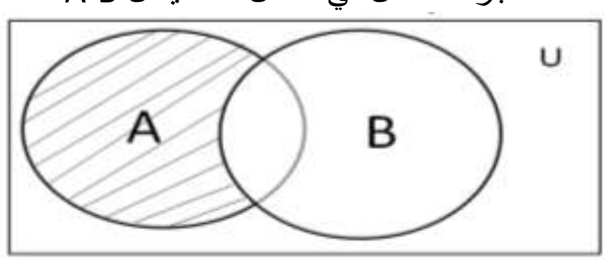
الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل تقاطع مجموعتين A و B



الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل $\overline{A}$



الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل A-B



الضرب الديكارتي:

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A، B ($A\times B$) بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x,y)التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B. بالرموز

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

تابع : الضرب الديكارتي:

مثال :إذا كانت $A=\{-2,1\}$ و $B=\{-3,1,4\}$

فأوجد $A\times B$ و $B\times A$

الحل : $A\times B=\{(-2,-3),(-2,2),-2,4),(1,-3),(1,1),(1,4)\}$

$B\times A=\{(-3,-2),(-3,1),(1,-2),(1,4),(4,-2),(4,1)\}$

تابع : الضرب الديكارتي:

أنشئ $A\times B$ علما بان

$A=\{1,2\}$ و $B=\{w,x,y\}$

الحل : $A\times B=\{(1,w),(1,x),(1,y),(2,w),(x,x),(2,y)\}$

تابع : الضرب الديكارتي:

ملاحظات:

•لاحظ أن عدد عناصر A عنصران وعدد عناصر B ثلاثة عناصر، وان عدد عناصر $A\times B$ يساوي عدد عناصر $B\times A$ ويساوي ٦ عناصر (أزواج مرتبة) = 2×3 = عدد عناصر A×عدد عناصر B .

•أيضا يمكننا ملاحظة أن$A\times B\neq B\times A$

تابع الضرب الديكارتي:

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1,y_1) و (x_2,y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1=x_2)$ ، وكان المسقط الثاني في الزوج الأول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني، $(y_1=y_2)$.

مثال : أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $\left(x+1,y-\frac{1}{2}\right)=\left(4,\frac{3}{2}\right)$

الحل: $x+1=4 \quad \Rightarrow x=4-1=3$

$$y-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

مجموعة المجموعات :

مجموعة المجموعات لأية مجموعة A هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة A ومن بينها المجموعة الخالية Φ والمجموعة A نفسها ويرمز لها بالرمز P.

مثال: أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $U=\{a,b,c\}$

الحل : مجموعة المجموعات تساوي

$$P=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},U\}$$

ملاحظة: إذا احتوت A على n من العناصر، فان عدد المجموعات الجزئية يساوي 2^n .

تمرين: أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $A=\{1,2\}$

مجموعة الأعداد:

١. مجموعة الأعداد الطبيعية:

$$N=\{1,2,3,\cdots\}$$

٢. مجموعة الأعداد الصحيحة:

$$Z=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$$

٣. مجموعة الأعداد النسبية:

$$Q=\left\{\frac{a}{b},\ a,b\notin Z;b\neq 0\right\}$$

٤. مجموعة الأعداد غير النسبية :

٤. وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة الأعداد النسبية مثل $\sqrt{2}$ والنسبة التقريبية π والعدد النابيبري e غيرها.

٥. مجموعة الأعداد الحقيقية:

وهي المجموعة التي تحتوي على كافة الأنواع السابقة ويرمز لها بالرمز R وتمثل هندسياً بخط الأعداد.

$$N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$$

تمارين:

• افرض أن $A=\{3,4,5,x,y\}$ و $B=\{4,x,y,z\}$ ضع الرمز $\in$ أو $\notin$ في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة .

$(i)\ 3$ ——— A

$(ii)\ 3$ ——— B

$(iii)\ x$ ——— A

$(iv)\ x$ ——— B

$(v)\ z$ ——— A

$(vi)\ z$ ——— B

$(vii)\ 1$ ——— A

$(viii)\ 1$ ——— B

$(ix)\ A$ ——— A

$(x)\ B$ ——— B

$(x)\ B$ ——— B

اسرد عناصر كل مجموعة من المجموعات التالية . يمكن استخدام النقط للتعبير عن استمرار سرد عناصر المجموعة عندما يكون بها عدد لانهائي من العناصر

i. A={x: 7 عدد طبيعي اصغر من x}

ii. B={x: 2 عدد طبيعي زوجي يقبل القسمة على x}

iii. C={y: h وc حرف من حروف الهجاء المحصور بين y}

iv. D={x: 17 عدد طبيعي فردي اصغر من x}

تابع: تمارين:

- ضع الرمز = أو $\neq$ في المكان الخالي لتكون الجملة صحيحة

$(i)\ \{a,b,c\}$ ——— $\{b,c,a\}$

$(ii)\ \{0,1,2,3\}$ ——— $\{0,1,2,3,3\}$

$(iii)\ \{x,y,z\}$ ——— $\{x,y,z,w\}$

تابع: تمارين:

•افرض أن $X=\{1,2,3,4\}$ و $Y=\{4,6,8,10\}$ ضع الرمز $\subset$ أو $\not\subset$ أو $\subseteq$ في المكان الخالي لتكون الجملة صحيحة

$(i)\ X$ ——— Y

$(ii)\ Y$ ——— X

$(iii)\ X$ ——— $X\cup Y$

$(iv)\ \phi$ ——— X

$(v)\ \phi$ ——— Y

تابع: تمارين:

•إذا كانت المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من ١٠ ، افرض ان $A=\{1,3,5\}$ و $B=\{2,4,6\}$ كون المجموعات الاتية:

$(i)\ A\cup B$

$(ii)\ A\cap B$

$(iii)\ \overline{A}$

$(iv)\ \overline{B}$

$(v)\ \overline{A\cup B}$

$(vi)\ \overline{A\cap B}$

$(vii)\ \overline{A}\cup\overline{B}$

$(viii)\ \overline{A\cap U}$

$(ix)\ A\cap A$

تابع: تمارين:

•لتكن المجموعة الكلية $U=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ ولتكن $A=\{1,2\}\ ,\ B=\{-1,1,3\}\ ,\ C=\{2,4,6\}$ فأوجد

$(i)\ A\times B$

$(ii)\ B\times A$

$(iii)\ B\times B$

$(iv)\ A\times(B\cap C)$

$(v)\ (A\times B)\cap(A\times C)$

$(vi)\ \overline{C}\times B$

تابع: تمارين:

- إذا كانت

A={x: ٥ عدد طبيعي اصغر من x}

B={y: ٣ عدد طبيعي اصغر من y}

هل $A\times B=B\times A$

- أوجد قيم x وy التي تحقق المعادلة $(x,y^2)=(2x-2,1)$

حل مسائل مختارة من التمرين:

١. الفقرات (i) ،(iii)، (v)
٢. الفقرات (i) ،(iii)
٣. الفقرات (i) ،(iii)
٤. الفقرات (i) ،(iii)، (v)
٥. الفقرات (i) ،(iii)، (v) ، (vii)،(ix)
٦. الفقرات (i) ،(iii)، (v)

المحاضرة الثالثة
العلاقات والدوال

العلاقات:

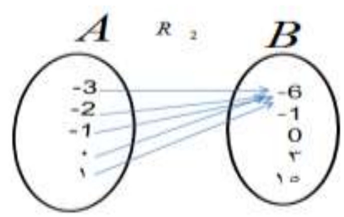
تعرف العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B بأنها مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي A×B.
المجموعة التي عناصرها جميع المكونات الأولى في العلاقة تسمى بمجال العلاقة وتسمى المجموعة التي عناصرها جميع المكونات الثانية في العلاقة مدى العلاقة.
مثال: إذا كانت A={-3,-2,-1,0,1} ،B={-6,-1,0,3,15}وكانت R_1 و R_2 علاقات معرفة من A إلى B كما يلي

$$R_1 = \{(-3,3), (-2,-6), (1,0), (0,15), (1,-1)\}$$

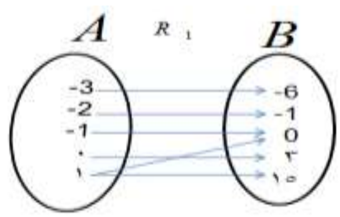
$$R_2 = \{(-3,-6), (-2,-6), (1,-6), (0,-6), (1,-6)\}$$

تابع : العلاقات:

مثل كل من R_1 و R_2 بالمخطط السهمي ثم أوجد مداها :



مداها هو {-6}



مداها هو {-6,-1,0,3,15}

الدالة:

يعتبر مفهوم الدالة واحدا من أهم المفاهيم في الرياضيات. وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو (تتعين بواسطة) كمية أخرى.

فمثلاً:

- حجم الكرة يعتمد على نصف قطرها.
- متوسط إنتاج الفدان من المحاصيل يعتمد على كمية السماد المستخدمة.
- الاستهلاك الشهري لأسرة ما يعتمد على دخلها الشهري.

تابع : الدالة:

تعريف مجرد لمفهوم الدالة:

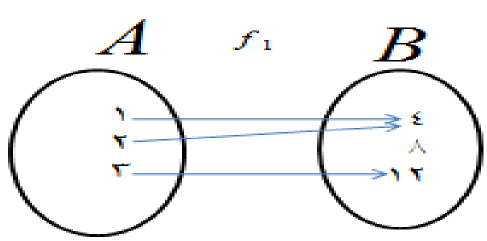
افرض أن A ، B مجموعتان غير خاليتين، يقال أن f دالة من A إلى B ، أي f:A B إذا كانت f مجموعة جزئية من A×B بحيث أن لكل عنصر xϵAعنصر وحيد yϵB بحيث (x,y)ϵf . يسمى y قيمة الدالة f عند x ويكتب ذلك رمزا على النحو y=f(x). ويسمى y بالمتغير التابع و x بالمتغير المستقل.

تابع : الدالة:

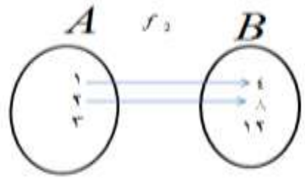
- فمثلا إذا كانت A={1,2,3} و B={4,8,12} فان $f_3 = \{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$ دالة من A إلى B وذلك لان $f_1 \subseteq A \times B$
- ولكن $f_2 = \{(1,4),(2,4)\}$ ليست دالة من A إلى B لان ليس له صورة $3 \in A$
- وأيضا $f_3 = \{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ ليست دالة لان وله صورتان هما ٤ ، ٨.

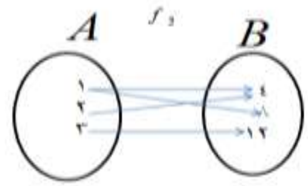
تابع : الدالة:

كما يمكن توضيح ذلك من خلال تمثيل f_1 ، f_2 و f_3 بالمخطط السهمي كما يلي:



تابع : الدالة:





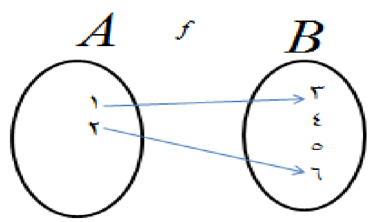
تابع الدالة:
ملاحظة:
إذا كانت f دالة من A إلى B. فان A تسمى مجال الدالة . وتسمى B المجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى.

تابع الدالة:

مثال : إذا كان $A=\{1,2\}$ ، $B=\{3,4,5,6\}$ ، $f=\{(1,3),(2,6)\}$

مثل f بالمخطط السهمي ثم أوجد مداها

الحل:



تابع الدالة:
مثال: إذا كان $f(x)=x^2+4x-3$ ، فأوجد

$(i)\ f(2)$
$(ii)\ f(-1)$
$(iii)\ f(a)$
$(iv)\ f(x+1)$

الحل:

$$(i)\ f(2)=2^2+4\times 2-3=4+8-3=9$$
$$(ii)\ f(-1)=(-1)^2+(4\times -1)-3=1-4-3=-6$$
$$(iii)\ f(a)=a^2+4\times a-3=a^2+4a-3$$
$$(iv)\ f(x+1)=(x+1)^2+4(x+1)-3$$
$$=x^2+2x+1+4x+4-3=x^2+6x+2$$

مثال:

إذا كان $f(x)=3x^2-7x+2$ ، فأوجد

$$(i)\ f(a)$$
$$(ii)\ f(-3)$$
$$(iii)\ f\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$(iv)\ f\left(\frac{-2}{3}\right)$$

الحل:

$$(i)\ f(a)=3a^2-7a+2$$
$$(ii)\ f(-3)=3(-3)^2-7(-3)+2$$
$$=27+21+2=50$$

$$(iii)\ f\left(\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{1}{2}\right)^2-7\left(\frac{1}{2}\right)+2$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{7}{2}+2=\frac{-3}{4}$$

$$(iv)\ f\left(\frac{-2}{3}\right)=3\left(\frac{-2}{3}\right)^2-7\left(\frac{-2}{3}\right)+2$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{14}{3}+2=8$$

تمرين:

إذا كان $f(x)=2x^2-3x$ ، فأوجد

$$(i)\ f(0)$$
$$(ii)\ f(-4)$$
$$(iii)\ f(1+h)$$
$$(iv)\ f(x+h)$$

ملاحظة:

سنقتصر في دراستنا للدوال على دراسة بعض أنواع الدوال الحقيقية .

الدوال الحقيقية:

الدالة الحقيقية هي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية . أي $f:R\to R$

- دالة كثيرة الحدود:

هي الدالة التي على الصورة

حيث $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a$ أعداد حقيقية وتسمى $a_n,a_{n-1},\cdots,a$ معاملات كثيرة الحدود، n عدد طبيعي. تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لــ (x)

الدوال الحقيقية:

مثال: ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية:

$$(1)\ f(x)=3$$

$$(2)\ f(x)=3x-4$$

$$(3)\ f(x)=x^2-x+1$$

$$(4)\ f(x)=2-3x+x^3$$

$$(5)\ f(x)=x^3+x^5+5-6$$

تابع: الدوال الحقيقية:

الحل:

- الدرجة الصفرية ويسمى أيضا دالة ثابتة.
- الدرجة الأولى ويسمى أيضا دالة خطية.
- الدرجة الثانية ويسمى أيضا دالة تربيعية.
- الدرجة الثالثة أو دالة تكعيبية.
- الدرجة الخامسة

العمليات على الدوال:

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة معطيات. وتشمل هذه العمليات، العمليات الثنائية من جمع وطرح وضرب وقسمة وتركيب وعملية أحادية واحدة هي المعكوس.

لتكن f ،g دالتين فان:

$$(i)(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(ii)(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(iii)(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0$$

$$(v)(fog)(x)=f(g(x))$$

(vi) معكوس الدالة:

إذا كانت y=f(x) دالة فان معكوسها يعني إيجاد x كدالة في y أي $x=f^{-1}(y)$، حيث f^{-1} يرمز لمعكوس الدالة f

تابع: العمليات على الدوال:

مثال: إذا كانت f(x)=3x+5 ، $g(x)=x^2+1$ ، فأوجد

$$(i)\,(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(ii)\,(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(iii)\,(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0$$

$$(v)\,(fog)(x)=f\big(g(x)\big)$$

$$(vi)\ f^{-1}$$

الحل:

$$(i)\,(f+g)(x)=f(x)+g(x)=3x\ +5+x^2+1$$
$$=x^2+3x+6$$

$$(ii)\,(f-g)(x)=f(x)-g(x)=3x\ +5-(x^2+1)$$
$$=3x+5-x^2-1=3x-x^2+4$$

$$(iii)\,(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=(3x+5)(x^2+1)$$
$$=3x^3+3x+5x^2+5$$
$$=3x^3+5x^2+3x+5$$

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x+5}{x^2+1}$$

$$(v)\,(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=f(x^2+1)=3(x^2+1)+5$$
$$=3x^2+3+5$$
$$=3x^2+8$$

$$(vi)\ f^{-1}(y)=\frac{y-5}{3}$$

مثال : افرض ان $f(x)=1/(x-2)$ و $g(x)=\sqrt{x}$ احسب

$(i)\,(fog)(9)$
$(ii)\,(fog)(x)$
$(iii)\,(gof)(6)$
$(iv)\,(gof)(x)$

الحل:

$$(i)\,(fog)(9)=f\big(g(9)\big)=f(3)=\frac{1}{3-2}=1$$

$$(ii)\,(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=\frac{1}{g(x)-2}=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$(iii)\,(gof)(6)=g\big(f(6)\big)=g\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

:تمرين $(iv)\,(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\frac{1}{x-2}}$

تمرين:

افرض أن $f(x)=1/(x-1)$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، فأوجد

$(i)\,(fg)(x)$
$(ii)\,(f-g)(x)$
$(iii)\,(f\times g)(x)$
$(iv)\,\frac{f}{g}(x)$

$(v)\,(fog)(x)$

$(vi)\,(gof)(x)$

المحاضرة الثالثة التكميلية

حـــــل أمثلـــــة

الضرب الديكارتي : أمثلة :

مثال(١):

إذا كانت {A = {-2, 1 و {B = {-3, 1, 4 فأوجد A×B و B×A

الحل:

$$A\times B=\{(-2,-3),(-2,1),-2,4),(1,-3),(1,1),(1,4)\}$$

$$B\times A=\{(-3,-2),(-3,1),(1,-2),(1,1),(4,-2),(4,1)\}$$

مثال(٢) :

أنشئ $A\times B$ علما بان $A=\{1,2\}$ و $B=\{w,x,y\}$

الحل:

$$A\times B=\{(1,w),(1,x),(1,y),(2,w),(2,x),(2,y)\}$$

تمرين:

إذا كانت {A = {1,2,3 و {B = {a, b فأوجد A×B ، B×A و A×A

العلاقات : أمثلة :

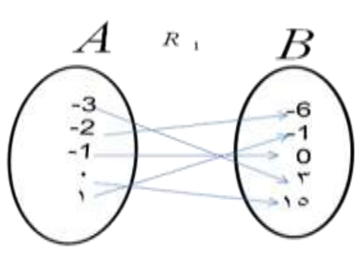
مثال(١) : إذا كانت {A={-3,-2,-1,0,1 ،{B={-6,-1,0,3,15 وكانت R_1 و R_2 علاقات معرفة من A إلى B كما يلي :

$$R_1=\{(-3,3),(-2,-6),(-1,0),(0,15),(1,-1)\}$$

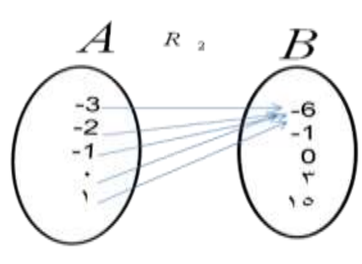
$$R_2=\{(-3,-6),(-2,-6),(1,-6),(0,-6),(1,-6)\}$$

مثل كل من R_1 و R_2 بالمخطط السهمي ثم أوجد مداها :

الحل



مداها هو {-6,-1,0,3,15}



مداها هو {-6}

تابع : العلاقات:

مثال(٢): لكل من العلاقات التالية بيِّن المجال والمدى:

- R={(-7,2), (-3,0), (5,-1), (-3,6)}
- R={(2,2), (1,1), (0,0), (1,-1), (2,-2)}

الحل:

- مجال R هو {-7,-3,5} ومدى R هو {2,0,-1,6}
- مجال R هو {2,1,0} ومدى R هو {2,1,0,-1,-2}

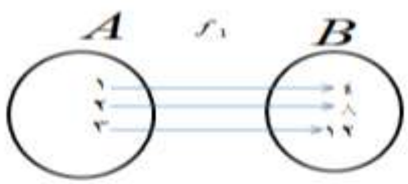
الدالة : أمثلة:

مثال: ذا كانت A={1,2,3} و B={4,8,12}

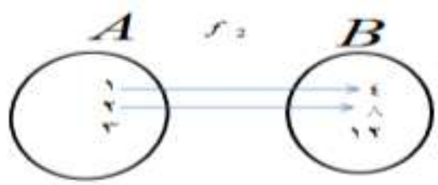
$f_1 = \{(1,4),(2,8),(3,12)\}$ ، $f_2 = \{(1,4),(2,8)\}$ و $f_3 = \{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$

فهل f_1 ، f_2 و f_3 دوال من A إلى B ؟

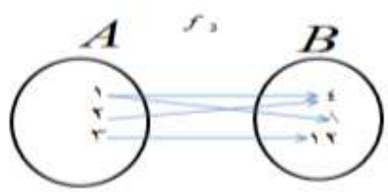
الحل:



نعم f_1 دالة لان كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل.



f_2 ليست دالة لان $3 \in A$ وليس له صورة B .



f_3 ليست دالة لان $1 \in A$ وله صورتان .

تمارين:

- لكل من العلاقات التالية بيِّن المجال والمدى:

- R= {(-1,2), (2,2), (3,5), (6,1) }
- R ={(0,7), (1,5), (1,2), (3,-4) }
- R={(-3,1), (-1,1), (0, 1), (4,1)}
- R={(-4,0), (-4,4), (2,3), (1,9)}
- R={(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)}
- R={(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)}
- أي من العلاقات أعلاه تمثل دالة؟

إيجاد قيمة الدالة : أمثلة :

مثال(١): إذا كان $f(x)=x^2+4x-3$ ، فأوجد

$$(i)\ f(2)$$
$$(ii)\ f(-1)$$
$$(iii)\ f(a)$$
$$(iv)\ f(x+1)$$

الحل:

$$(i)\ f(2)=2^2+4\times2-3=4+8-3=9$$
$$(ii)\ f(-1)=(-1)^2+(4\times-1)-3=1-4-3=-6$$
$$(iii)\ f(a)=a^2+4\times a-3=a^2+4a-3$$
$$(iv)\ f(x+1)=(x+1)^2+4(x+1)-3$$
$$=x^2+2x+1+4x+4-3=x^2+6x+2$$

مثال(٢):

إذا كان $f(x)=3x^2-7x+2$ ، فأوجد

$$(i)\ f(a)$$

$$(ii)\ f(-3)$$

$$(iii)\ f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$(iv)\ f\left(\frac{-2}{3}\right)$$

الحل:

$$(i)\ f(a)=3a^2-7a+2$$

$$(ii)\ f(-3)=3(-3)^2-7(-3)+2$$
$$=27+21+2=50$$

$$(iii)\ f\left(\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{1}{2}\right)^2-7\left(\frac{1}{2}\right)+2$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{7}{2}+2=\frac{3}{4}-\frac{14}{4}+\frac{8}{4}=\frac{-3}{4}$$

$$(iv)\ f\left(\frac{-2}{3}\right)=3\left(\frac{-2}{3}\right)^2-7\left(\frac{-2}{3}\right)+2$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{14}{3}+2=8$$

تمارين:

١. إذا كان $f(x)=2x^2-3x$ ، فأوجد

$$(i)\ f(0)$$

$$(ii)\ f(-4)$$

$$(iii)\ f(1+h)$$

$$(iv)\ f(x+h)$$

تابع : تمارين:

٢ . للدالة $f(x)=2x^2-x-5$ أحسب $f(t)$ و $f(-1)$

٣. للدالة $g(x)=\frac{x-1}{2x+3}$ أحسب $g(x-1)$ و $g(4)$

٤. للدالة $f(x)=2x^2-1$ أحسب $f(1)+f(2)+f(3)$

٥. للدالة $f(x)=x^2$ أحسب $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

٦. للدالة $g(x)=x+1$ أحسب $2[g(2)]^2-g(2)+5$

٧. للدالة $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ أحسب $\frac{5}{f(4)}$

العمليات على الدوال : أمثلة :

مثال(١) : إذا كانت $f(x)=3x+5$ ، $g(x)=x^2+1$ ، فأوجد

$$(i)(f+g)(x)$$
$$(ii)(f-g)(x)$$
$$(iii)(f\times g)(x)$$
$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)\ ,\ g(x)\neq 0$$
$$(v)(fog)(x)$$
$$(vi)\ f^{-1}$$

الحل:

$$(i)(f+g)(x)=f(x)+g(x)=3x+5+x^2+1$$
$$=x^2+3x+6$$
$$(ii)(f-g)(x)=f(x)-g(x)=3x+5-(x^2+1)$$
$$=3x+5-x^2-1=3x-x^2+4$$
$$(iii)(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=(3x+5)(x^2+1)$$
$$=3x^3+3x+5x^2+5$$
$$=3x^3+5x^2+3x+5$$
$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x+5}{x^2+1}$$
$$(v)(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=f(x^2+1)=3(x^2+1)+5$$
$$=3x^2+3+5$$
$$=3x^2+8$$
$$(vi)\,x=\frac{y-5}{3}\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{y-5}{3}$$

تابع: العمليات على الدوال:

مثال(٢):افرض ان $f(x)=1/(x-2)$ و $g(x)=\sqrt{x}$ احسب

$(i)(fog)(9)$

$(ii)(fog)(x)$

$(iii)(gof)(6)$

$(iv)(gof)(x)$

الحل:

$$(i)(fog)(9)=f\left(g(9)\right)=f(3)=\frac{1}{3-2}=1$$

$$(ii)(fog)(x)=f\left(g(x)\right)=\frac{1}{g(x)-2}=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$(iii)(gof)(6)=g\left(f(6)\right)=g\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$(iv)(gof)(x)=g\left(f(x)\right)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\frac{1}{x-2}}$$

تمارين:

١. أوجد : $(fog)(x)$ و $(gof)(x)$ اذا كانت

1. $f(x)=x^2-3x \quad , g(x)=\sqrt{x+2}$
2. $f(x)=\sqrt{25-x^2} \quad , g(x)=\sqrt{x-3}$
3. $f(x)=\sqrt{x-15} \quad , g(x)=x^2+2x$

٢. افرض أن $f(x)=1/(x-1)$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، فأوجد

$(i)(f+g)(x)$

$(ii)(f-g)(x)$

$(iii)(f\times g)(x)$

$(iv)\ \frac{f}{g}(x)$

$(v)(fog)(x)$

$(vi)(gof)(x)$

٣- إذا كانت $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=x^2$ فأوجد

$(i)\,(f+g)(x)$

$(ii)\,(f-g)(x)$

$(iii)\,(f\times g)(x)$

$(iv)\;\frac{f}{g}(x)$

$(v)\,(f o g)(x)$

$(vi)\,(g o f)(x)$

$(vii)\;f^{-1}$

$(viii)\;f(7x)$

$(ix)\,(7f)(x)$

$(X)\quad(f+7)(x)$

المحاضرة الرابعة

معادلات الخط المستقيم

إيجاد ميل الخط المستقيم:

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين:

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ يعرف على انه النسبة بين التغير في y والتغير في x ، ويرمز له عادة بالحرف m

اذن: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

حيث: $x_1 \neq x_2$

مثال:

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين P و Q حيث:

i. P(1,-3) ، Q(3,7)
ii. P(3,2) ، Q(5,2)
iii. P(2, 3) ، Q(2,6)

الحل:

$$1.\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-3)}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$2.\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

$$3.\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0} = \infty$$ **إذن الميل غير معرف**

ملاحظات هامة:

- إذا كان الميل يساوي صفر فان ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .
- إذا كان الميل يساوي   فان ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

٢- ميل الخط المستقيم الذي معادلته في الصورة العامة ax+by+c=0 حيث a,b,c ثوابت والثابتان a,b لا يساويان الصفر معاً، هو $m = \dfrac{-a}{b}$

مثال: أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته 2x+4y-7 =0

الحل:

$m = \dfrac{-a}{b}$ ، حيث a=2 و b=4

اذاً $m = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة:

المستقيمات المتوازية:

يقال أن المستقيم L_1 **موازياً للمستقيم** L_2 **أي** $L_1 // L_2$ **إذا وفقط إذا كان** $m_1 = m_2$

مثال: هل المستقيمان 4x-y-2=0 و y=4x+1 متوازيان ؟

الحل:

$$m_1 = 4 \quad , m_2 = 4$$

$$\because m_1 = m_2 = 4$$

اذاً متوازيين

المستقيمات المتعامدة:

يقال أن المستقيم L_1 يعامد المستقيم L_2 أي $L_1 \perp L_2$ إذا وفقط إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال: هل المستقيمان y-3x-2=0 و 3y+x-15=0 متعامدان؟

الحل:

$$m_1 = 3 \, , m_2 = \frac{-1}{3}$$

$$\because m_1 \times m_2 = \frac{-1}{3} \times 3 = -1$$

اذاً متعامدين

معادلة الخط المستقيم:

طرق تحديد معادلة الخط المستقيم:

١.بمعلومية نقطة وميل:

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة $P(x_1, y_1)$ **هي** $y - y_1 = m(x - x_1)$

مثال :أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (5,-3) وميله يساوي 2- .

الحل:

$$m = -2 \, , x_1 = 5 \, , y_1 = -3$$

$$y - (-3) = -2(x - 5)$$

$$y + 3 = -2x + 10$$

$$y = -2x + 10 - 3$$

$$y = -2x + 7$$

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (1,1) وميله يساوي ٢.

الحل:

$$m = 2 \, , x_1 = 1 \, , y_1 = 1$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y - 1 = 2x - 2$$

$$y = 2x - 2 + 1$$

$$y = 2x - 1$$

٢.بمعلومية نقطتين:

معادلة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ هي $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

مثال: أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين (1,-2) ، (5,6)

الحل:

$$x_1=1, y_1=-2, x_2=5, y_2=6$$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-(-2)}{x-1}=\frac{6-(-2)}{5-1}$$

$$\frac{y+2}{x-1}=\frac{8}{4}=2$$

$$y+2=2(x-1)$$

$$y+2=2x-2$$

$$y=2x-2-2$$

$$y=2x-4$$

٣.بمعلومية ميل والمحصور الصادي:

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويقطع من محور الصادات جزءا طوله b هي y=mx+b

مثال:

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله m=3 مقطوعه الصادي b=-2

الحل:

$$y=mx+b$$

$$y=3x-2$$

مثال:

أوجد الميل والمقطوع الصادي للمستقيم2x+3y=6

الحل: لإيجاد المطلوب نضع أولا المعادلة المعطاة على الصورة :

Y=mx+b

الحل:

من المعادلة المعطاة نجد أن

بمقارنة هذه المعادلة الأخيرة بالمعادلةy=mx+b نجد أن

$$2x+3y=6$$

$$3y=-2x+6$$

$$y=-\frac{2}{3}x+2$$

●بمعلومية الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات :

- الميل هو $m=-\frac{2}{3}$ والمقطوع الصادي هو b=2

٤.بمعلومية الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات :

المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءا طوله = a ومن محور الصادات جزءا طوله يساوي = b تكون معادلته:

المحل: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءا طوله ٣ وحدات ومن محور الصادات جزءا طوله ٢ وحده.

الحل

$$a=3, b=2$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$$

$$2x+3y=6$$

مثال: أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته $2x-3y=5$

الحل:

المحصور السيني للخط =a وهذا يعني أن الخط يمر بالنقطة (a,0)

$$2a=5 \quad \Rightarrow a=\frac{5}{2}$$

المحصور الصادي للخط =b وهذا يعني أن الخط يمر بالنقطة (0,b)

$$-3b=5 \quad \Rightarrow b=-\frac{5}{3}$$

تمارين:

١. أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته $y=-\frac{3}{2}x+6$

٢. أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته $2x+7y=14$

٣. أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته $3x-y=6$

٤. أوجد كل خط من الخطوط المستقيمة الذي يحقق الشروط المعطاة فيما يلي:

أ- المستقيم المار بالنقطة (1,-2) وميله m=-3

ب- المستقيم المار بالنقطة (3,4) وميله صفر

ت- المستقيم المار بنقطة الأصل وميله ٢

ث- المستقيم المار بالنقطة (2,3) وميله 3/2-
ج- المستقيم المار بالنقطتين (3, 4) و (7,2)
ح- المستقيم المار بالنقطتين (2,1) و (3,4)
خ- المستقيم الذي ميله m=-2 ومقطوعه الصادي b=3
د- المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل ويوازي المستقيم 4y+2x=7
ذ- المستقيم الذي يمر بالنقطة (3,2) وعمودي على المستقيم y=-3x+4
ر- المستقيم الذي يمر بالنقطة (1,2-) وعمودي على المستقيم 4y=2x-3
ز- المستقيم الذي يمر بالنقطة (0,3) ونقطة تقاطع المستقيمين 3x+y=1 ، 4y+2x=3
س- المستقيم الذي يمر بالنقطة (3,5) ويوازي المستقيم 3x+5y-2=0
ش- المستقيم الذي يمر بالنقطة (1,-5-) وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين (5,3) و (1,8)

5. أوجد الميل والمقطوع الصادي لكل علاقة من العلاقات الخطية التالية:

$i)\quad 3x+5y=15$

$ii)\quad 2x=13-4y$

$iii)\quad y+2x+6=0$

$iv)\quad 8x+5y=20$

واجب(١):

١- أوجد كل خط من الخطوط المستقيمة الذي يحقق الشروط المعطاة فيما يلي:

أ- المستقيم المار بالنقطة (6, 2) وميله m=-7
ب- المستقيم المار بالنقطتين (5,8) و (3,6-)
ت- المستقيم الذي يمر بالنقطة (3,0) وعمودي على المستقيم 2x+3y=6
ث- المستقيم الذي يمر (3,3) ويوازي المستقيم 3x-y=6

٢- أوجد الميل والمقطوع الصادي للمستقيم 4x=12-3y-

المحاضرة الخامسة

المتباينات والقيمة المطلقة

المتباينات

أي تعبير يتضمن احد الرموز > ،≤ ، < ، ≥ يسمى متباينة. فمثلاً كل مما يلي هي متباينات:

$(i)\ 3x+4\le 8-2x$

$(ii)\ \dfrac{2x+4}{x+5}<3$

$(iii)\ (x+4)(x-1)>9$

تستخدم المتباينات في تعريف نوع خاص من المجموعات الجزئية من الأعداد الحقيقية والتي تسمى الفترة.
وهناك أربعة أنواع من الفترات تعرف كما يلي:

١. فترة مغلقة $[a,b]=\{x\in R: a\le x\le b\}$

٢. فترة مفتوحة $(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$

٣. نصف مغلقة (نصف مفتوحة) $[a,b)=\{x\in R: a\le x<b\}$

٤. فترة نصف مفتوحة (نصف مغلقة) $(a,b]=\{x\in R: a<x\le b\}$

خواص المتباينات:

١. $a^2\ge 0$ لكل $a\in R$

٢.إذا كانت a<b و b<c فان a<c

٣.إذا كانت a<b فان a+c<b+c وكذلك a-c<b-c

٤.إذا كانت a<b وكانت c>0 فان ac<bc

٥.إذا كانت a<b وكانت c<0 فان ac>bc

٦.إذا كانت a>0 فان

٧.إذا كانت a>0 و b>0 بحيث a<b فان $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

حل المتباينات:

حل المتباينة هو القيمة أو مجموعة القيم التي تجعل المتباينة صحيحاً.

مثال(١): حل المتباينة $4x+7\ge 2x-3$

الحل:

$$4x+7-7\ge 2x-3-7$$
$$4x\ge 2x-10$$
$$4x-2x\ge -10$$
$$2x\ge -10$$
$$\frac{1}{2}\times 2x\ge \frac{1}{2}\times -10$$
$$x\ge -5$$

مجموعة الحل هي الفترة (∞,5-].

مثال(٢): حل المتباينة $-5<3x-2<1$

الحل: $-5+2<3x<1+2$

$$-3<3x<3$$
$$\frac{1}{3}\times -3<\frac{1}{3}\times 3x<\frac{1}{3}\times 3$$
$$-1<x<1$$

مجموعة الحل هي الفترة (1,1-).

مثال(٣): حل المتباينة $x^2+x-12>0$

الحل:

$(x-3)(x+4)>0$

الحالة الأولى $(x-3)>0$ و $(x+4)>0$

اذاً $x>3$ و $x>-4$

أي أن $x>3$

الحالة الثانية $(x-3)<0$ و $(x+4)<0$

اذاً $x<3$ و $x<-4$

أي أن $x<-4$

اذاً مجموعة الحل هي $(-\infty,-4)\cup(3,\infty)$

مثال(٤):

حل المتباينة $x^2 \le 4x+12$

الحل:

$$x^2-4x-12 \le 0$$

$$(x-6)(x+2) \le 0$$

$$(x-6)(x+2)=0$$

$$x-6=0 \Rightarrow x=6$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

نعين جذري المعادلة على خط الأعداد فيقسم خط الأعداد إلى ثلاثة أجزاء ونأخذ نقط اختيارية داخلية في كل قسم من هذه الأقسام الثلاثة ونفحص كون المتباينة متحققة أم لا كما يلي:

إشارة (x-6)	- -	- -	+ +
إشارة (x+2)	- -	+ +	+ +
	-2		6

مجموعة الحل هي $[-2,6]$

مثال(٥):

حل المتباينة $\dfrac{4x+5}{x+2} \ge 3$

الحل:

$$\frac{4x+5}{x+2}-3 \ge 0$$

$$\frac{4x+5-3x-6}{x+2} \ge 0$$

$$\frac{x-1}{x+2} \ge 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

نعين جذري البسط والمقام على خط الأعداد فيقسم خط الأعداد إلى ثلاثة أجزاء ونأخذ نقط اختيارية داخلية في كل قسم من هذه الأقسام الثلاثة ونفحص كون المتباينة متحققة أم لا كما يلي:

إشارة (x-1)	- -	- -	+ +
إشارة (x+2)	- -	+ +	+ +

-2 $\qquad\qquad$ 1

بما أن $\frac{x-1}{x+2}=0$ **عند** $x=1$

اذاً المتباينة متحققة في الفترة $(-\infty,-2)\cup[1,\infty)$

تمارين:

حل المتباينات التالية:

1. $5>2-9x>-4$
2. $5x-6>11$
3. $-6\le 1-3x\le 2$
4. $4\le 2x+2\le 10$
5. $(x-3)(x+1)<0$
6. $3x-5<10$
7. $x^2+x>12$
8. $\frac{x+1}{x-1}>0$
9. $\frac{x+4}{x-2}\le 1$
10. $\frac{x+2}{x-4}\ge 1$
11. $(2x+2)(x-1)(x-3)>0$
12. $x^3-5x^2+6x>0$
13. $x^2+x<2$
14. $3\le 4x-7<9$
15. $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\le 2$
16. $\frac{2x}{3x-4}-2\ge 0$

القيمة المطلقه:

تعريف:
القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي (ويرمز له بالرمز $|x|$) تعرف كالآتي:

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

خواص القيمة المطلقة:

١. $|x| < a$ تكافئ $-a < x < a$ حيث $a > 0$
٢. $|x| \leq a$ تكافئ $-a \leq x \leq a$ حيث $a > 0$
٣. $|x| > a$ تكافئ $x > a$ أو $x < -a$ حيث $a > 0$
٤. $|x| \geq a$ تكافئ $x \geq a$ أو $x \leq -a$ حيث $a > 0$
٥. $|ab| = |a||b|$
٦. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
٧. $|a+b| \leq |a| + |b|$
٨. $|a-b| \geq |a| - |b|$

مثال (١):

حل المتباينة

الحل:

$$|2x+4 \leq 3| \quad \Rightarrow \quad -3 \leq 2x+4 \leq 3$$
$$-7 \leq 2x \leq -1$$
$$-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

مجموعة الحل هي الفترة $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

مثال(٢):

حل المتباينة $|2x-5|>3$

الحل:

$2x-5<-3$ أو $2x-5>3$

$2x<2$ أو $2x>8$

$x<1$ أو $x>4$

مجموعة حل المتباينة هي $(-\infty,1)\cup(4,\infty)$

مثال(٣):

حل المتباينة $\left|\frac{3x+1}{2}\right|<1$

الحل:

$$-1<\frac{3x+1}{2}<1$$

$$-2<3x+1<2$$

$$-3<3x<1$$

$$-1<x<\frac{1}{3}$$

مجموعة الحل هي $(-1,\frac{1}{3})$

تمارين:

1. $|x+2|<1$
2. $|3x|>12$
3. $|3x-2|\le 4$
4. $|1-2x|>3$
5. $|2x-3|<7$
6. $|3x+4|\ge 5$
7. $|2x|<6$
8. $\left|\frac{7-3x}{2}\right|\le 1$

المحاضرة السادسة

الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

الدالة الاسية:

أي دالة من النوع $y = a^x$ تسمى دالة أسية .
حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الأساس ، x: الأس.
حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية الموجبة. أي $f: R \to R^+$

أمثلة:

$$f(x) = 2^x \,,\, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \,,\, f(x) = e^x \,,\, f(x) = 10^x$$

الدالة اللوغاريتمية:

إذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ فان الدالة الاسية $y = a^x$ لها معكوس $\log_a y$
يرمز لها بالرمز $x = \log_a y$ تسمى الدالة اللوغاريتمية ، حيث $\log_a y$ وتقرأ لوغاريتم y للأساس a
.
حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية الموجبة ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية. أي $f: R^+ \to R$
أمثلة: $f(x) = \log_2 x, \ f(x) = \log_4(2x+4)$

اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات الاعتيادية:

يعتبر العددان ١٠ ، e (عدد غير نسبي يساوي تقريباً 2.71828) من أكثر الأعداد استعمالاً كأساس للوغاريتمات.
واللوغاريتمات للأساس e تسمى اللوغاريتمات الطبيعية ويرمز لها $\ln x$. تسمى اللوغاريتمات للأساس ١٠ باللوغاريتمات الاعتيادية ويرمز لها بالرمز $\log x$ بدلا عن $\log_{10} x$.

قوانين اللوغاريتمات:

إذا كان كل من x ، y ، b عدداً حقيقياً موجباً ، b≠1 ، وكان n عدداً حقيقياً فان:

1. $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b \dfrac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
3. $\log_b x^n = n \log_b x$
4. $\log_b 1 = 0$
5. $\log_b b = 1$

الدوال المثلثية:

هناك دالتان أساسيتان هما:
(i) $y = \sin x$
(ii) $y = \cos x$
وهناك دوال تعرف بواسطة هاتين الدالتين مثل:

تابع الدوال المثلثية:

$$(iii)\ y=\tan x \qquad \left(\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \cos x \neq 0\right)$$

$$(iv)\ y=\sec x \qquad \left(\frac{1}{\cos x} \quad , \cos x \neq 0\right)$$

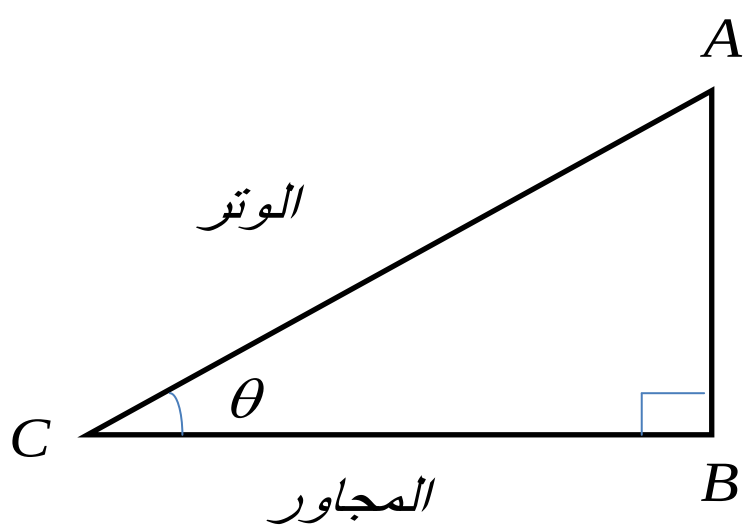
$$(v)\ y=\csc x \qquad \left(\frac{1}{\sin x} \quad , \sin x \neq 0\right)$$

$$(vi)\ y=\cot x \qquad \left(\frac{\cos x}{\sin x} \quad , \sin x \neq 0\right)$$

ملاحظة: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

التفسير الهندسي للدوال المثلثية:

إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في B كما في الشكل التالي:



تابع : الدوال المثلثية:

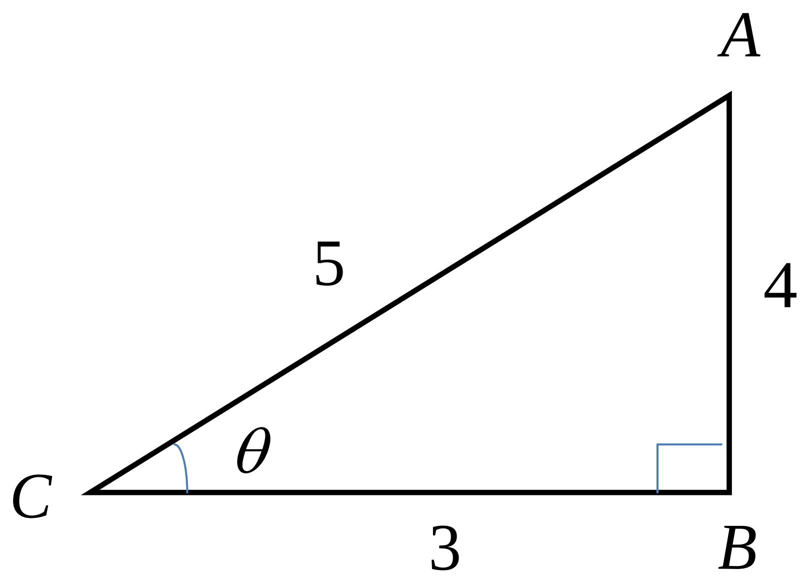
فان النسب المثلثية لزواية حادة θ وهي:

$$\sin\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \ ، \ \cos\theta=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \ ، \ \tan\theta=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

مثال:

إذا كان $\cot\theta = \frac{3}{4}$ ، فأوجد النسب الأساسية: ، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

الحل:



$\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ، $\tan\theta = \frac{4}{3}$

الدوال النسبية:

إذا كان $h(x)$ ، $g(x)$ كثيري حدود فان $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ تسمى دالة نسبية بشرط $g(x)\neq 0$ ومجالها هو كافة الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام.

أمثلة:

1. $f(x) = \frac{x+7}{x+5}$
2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
3. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$

الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

الدالة الصريحة:

هي الدالة التي يمكن كتابتها في الصورة $y=f(x)$ ، أي المتغير التابع y في طرف والمتغير المستقل x في الطرف الآخر.

أمثلة:

1. $y = 2x + 3$
2. $y = x$
3. $y = x^2 + 2x - 3$

الدالة الضمنية:

هي التي يمكن في الصورة f(x,y)=k، حيث k قيمة ثابتة.

أمثلة:

1. $x^2 + y^2 = 25$
2. $x^2 + y^2 + xy + 2x - 4y + 5 = 0$
3. $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

الدالة الزوجية:

تعتبر الدالة y=f(x) دالة زوجية إذا كانت f(-x)= f(x)

مثال:

هل الدالة $f(x) = x^2$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 \\ &= (-x)(-x) \\ &= x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

اذاً الدالة زوجية

مثال:

هل الدالة $f(x) = x^2 + x$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + (-x) \\ &= (-x)(-x) + (-x) \\ &= x^2 - x \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

اذاً ليست زوجية.

الدالة الفردية:

تعتبر الدالة y=f(x) دالة فردية إذا كانت f(-x)= -f(x)

مثال:

هل الدالة $f(x) = x^3$ دالة فردية ؟

الحل:

$$f(-x) = (-x)^3$$
$$= (-x)(-x)(-x)$$
$$= -x^3$$
$$= -f(x)$$

اذاً الدالة فردية.

مثال:

هل الدالة $f(x) = x^3 + x$ دالة فردية ؟

الحل:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)$$
$$= (-x)(-x)(-x) + (-x)$$
$$= -x^3 - x$$
$$= -f(x)$$

اذاً الدالة فردية

تطبيقات اقتصادية:

١ - **دوال الطلب الخطية:**

هناك علاقة عكسية بين كمية الطلب على سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما قل الطلب عليها.
ونرمز لكمية الطلب على السلعة بالرمز Q_D بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

مثال:

إذا دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D = 25 - 5P$

فأوجد

- الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 3$.
- سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 18$
- الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل. أي $P = 0$
- أعلى سعر يمكن أن يدفعه أي شخص لهذه السلعة .

١.عندما $P=3$

$$\begin{aligned} Q_D &= 25-5P \\ &= 25-5\times 3 \\ &= 25-15 \\ &= 10 \end{aligned}$$

٢.عندما $Q_D=18$.

$$\begin{aligned} Q_D &= 25-5P \\ 18 &= 25-5\times P \\ 5P &= 25-18=7 \\ \therefore P &= \frac{7}{5}=1.4 \end{aligned}$$

٣.عندما $P=0$

$$\begin{aligned} Q_D &= 25-5P \\ &= 25-5\times 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

٤.أعلى سعر يحدث عندما $Q_D=0$

$$\begin{aligned} Q_D &= 25-5P \\ 0 &= 25-5\times P \\ 5P &= 25 \\ \therefore P &= 5 \end{aligned}$$

٢- **دالة العرض (الإنتاج) الخطية:**

هناك علاقة طردية بين كمية الإنتاج من سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما زادت كمية الإنتاج.
ونرمز لكمية العرض (الإنتاج) من سلعة ما بالرمز Q_S بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

مثال:

إذا كانت $Q_S=3P-2$ فأوجد:

١. Q_S إذا كانت $P=5$
٢. P إذا كانت $Q_S=10$
٣. اقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج).

:

الحل:

١.عندما $P=5$

$$Q_S = 3P - 2$$
$$= 3 \times 5 - 2$$
$$= 15 - 2$$
$$= 13$$

٢.عندما $Q_S = 10$

$$Q_S = 3P - 2$$
$$10 = 3P - 2$$
$$-3P = -2 - 10 = -12$$
$$\therefore P = 4$$

٣.أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج). أي عندما $Q_S = 0$

$$Q_S = 3P - 2$$
$$0 = 3P - 2$$
$$-3P = -2 - 0 = -2$$
$$\therefore P = \frac{2}{3}$$

٣- التوازن في السوق بين دالتي العرض والطلب الخطيتين:

يحدث التوازن في السوق إذا كانت الكمية المعروضة من سلعة ما مساوياً للكمية المطلوبة منها. وهذه الحقيقة تعين سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن.

مثال:

إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 2 - P$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = P - 1$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

الحل: يحدث التوازن عندما تتساوي الكميتان المطلوبة والمعروضة .

$$Q_S = Q_D$$
$$P - 1 = 2 - P$$
$$P + P = 2 + 1$$
$$2P = 3$$
$$\therefore P = \frac{3}{2}$$

نعوض سعر التوازن في إحدى الدالتين، ولتكن دالة العرض

$$\therefore Q_S = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

تمارين:

١. هل الدالة $f(x)=3x^2-4x$ دالة زوجية؟

٢. هل الدالة $f(x)=3x^3-4x$ دالة فردية ؟

٣. هل الدالة $f(x)=2x^2+x$ دالة فردية ؟

٤. هل الدالة $f(x)=x^3-4$ دالة زوجية ؟

٥. هل الدالة $f(x)=x^3-x$ زوجية أم فردية أم غير ذلك؟

٦. إذا كان $\sec\theta=2$ ، فأوجد النسب الأساسية $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

٧. إذا دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D=100-5P$ فأوجد

أ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P=19$.

ب) سعر وحدة السلعة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D=50$.

جـ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل، أي $P=0$.

د) أعلى سعر يمكن أن يدفعه أي شخص لهذه السلعة.

٨.إذا دالة العرض على سلعة معينة: $Q_S=4P-5$ فأوجد

أ) Q_S إذا كانت $P=5$.

ب) P إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_S=7$.

جـ) أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج)

٩.إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D=25-\frac{1}{2}P$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S=2P-50$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

١٠ إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D=3P-4$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S=36-2P$.

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

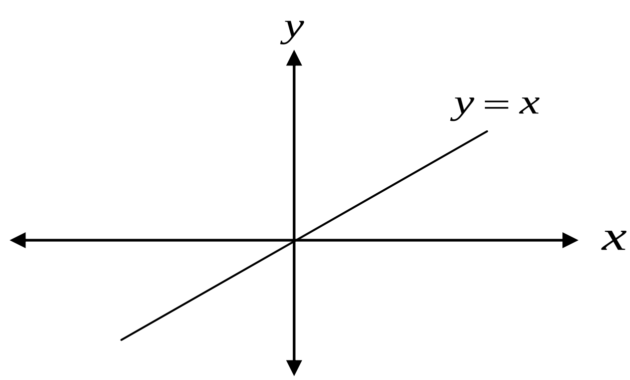
المحاضرة السابعة
رسم الدوال:

الخطوات:

١. نقوم بإنشاء جدول بقيم x وقيم y المناظرة لها للحصول على الأزواج المرتبة التالية: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$
٢. نرسم المحاور الديكارتية ونقوم بتدريج كل منهما تدريجاً مناسباً .
٣. نقوم بتعيين هذه النقاط على المستوى الديكارتي ثم توصيل هذه النقاط بصورة ملساء للحصول على منحنى الدالة.

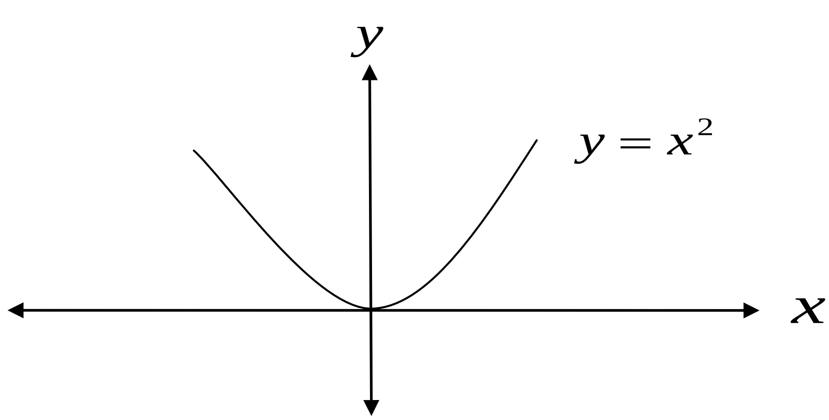
رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:
هناك صيغ قياسية لبعض الدوال مثل:
١. دالة خط مستقيم
مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x$
الحل:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	-3	-2	-1	0	1	٢	٣



٢. الدالة التربيعية:
مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x^2$
الحل:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	9	4	1	0	1	4	9

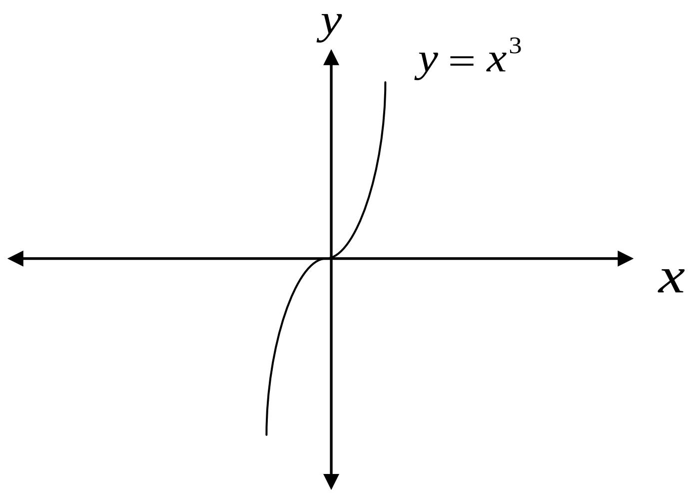


٣. الدالة التكعيبية:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x^3$

الحل:

x	-2	-1	0	1	2
y=f(x)	-8	1	0	1	8

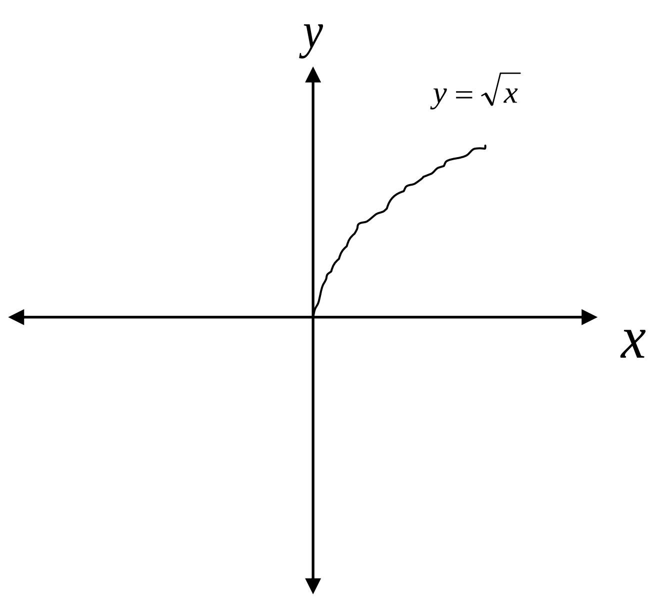


٤. الدالة الجذر التربيعي:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$

الحل:

x	0	1	2	3	4
y=f(x)	0	1	1.4	1.7	2

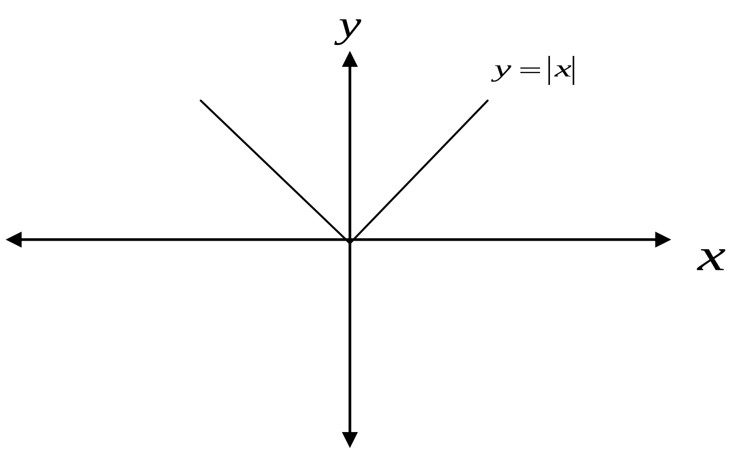


٥. دالة القيمة المطلقة:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = |x|$

الحل:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y=f(x)	٣	٢	١	0	1	٢	٣



ملاحظات على رسم الدوال:

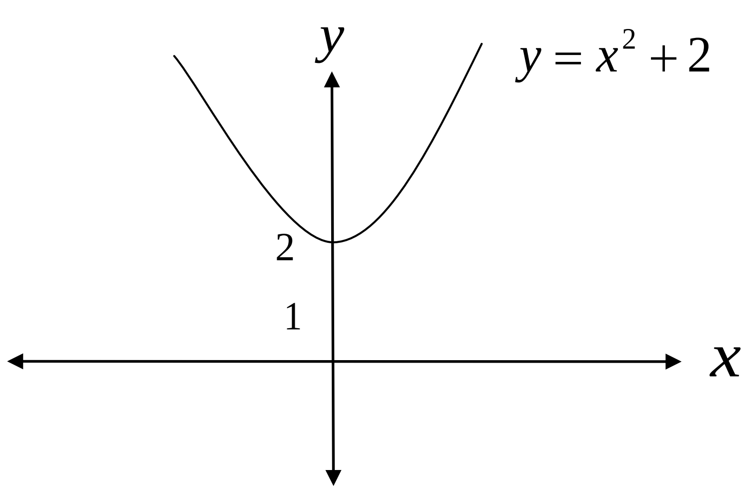
١.الإزاحة إلى الأعلى :

يمكن الحصول على منحنى $y = f(x) + c$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى أعلى (على محور y) .

مثال:

ارسم منحنى الدالة $y = x^2 + 2$ الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = x^2$ وحدتين إلى أعلى كما يلي:



٢.الإزاحة إلى الأسفل:

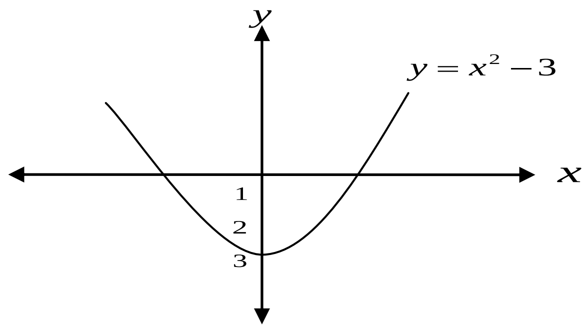
يمكن الحصول على منحنى $y = f(x) - c$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى أسفل (على محور y) .

مثال:

ارسم الدالة $y = x^2 - 3$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = x^2$ ثلاث وحدات إلى أسفل كما يلي:



٣.الإزاحة إلى اليمين:

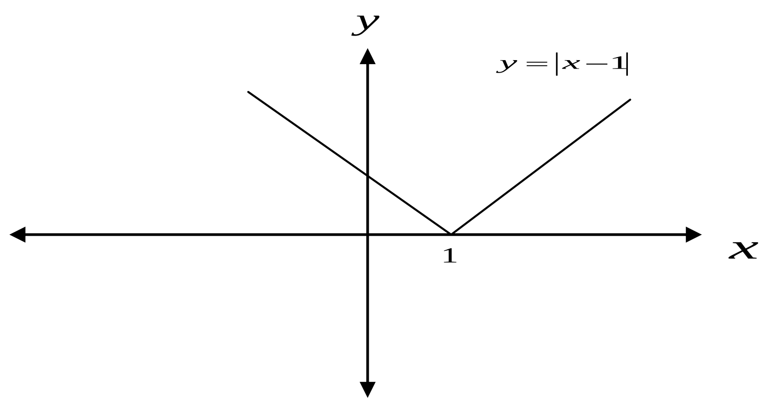
يمكن الحصول على منحنى $y = f(x - c)$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى اليمين (على محور x) .

مثال:

ارسم الدالة $y = |x - 1|$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = |x|$ وحدة واحدة إلى اليمين كما يلي:



٤.الإزاحة إلى اليسار:

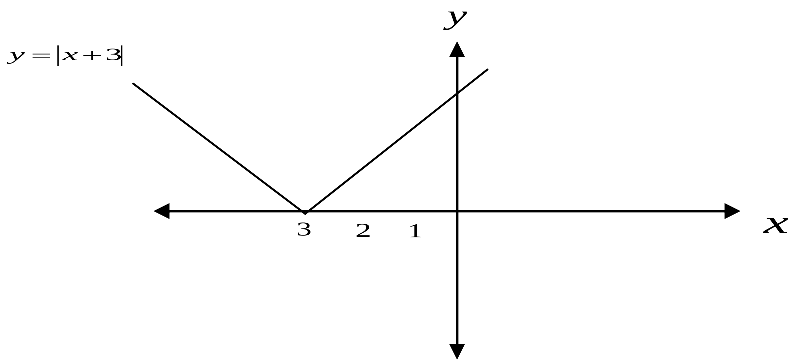
يمكن الحصول على منحنى $y = f(x + c)$ بإزاحة منحنى $y = f(x)$ بمقدار c وحدة إلى اليسار (على محور x) .

مثال:

ارسم الدالة $y = |x + 3|$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = |x|$ ثلاث وحدات إلى اليسار كما يلي:



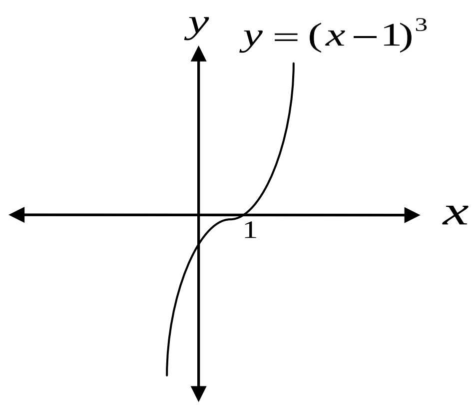
تابع: رسم الدوال :

مثال: $y=(x-1)^3+2$

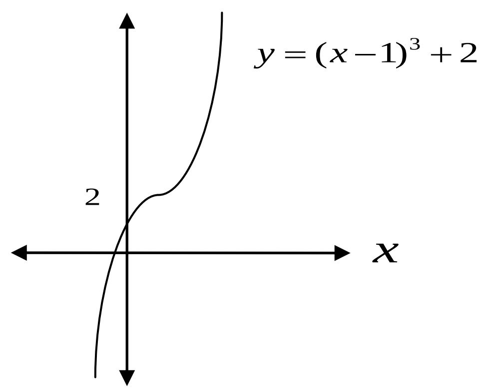
ارسم الدالة

الحل:

نحصل على منحني هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y=x^3$ وحدة واحدة إلى اليمين ثم وحدتان إلى أعلى كما يلي:



$\Rightarrow$



تابع: ملاحظات على رسم الدوال:

٥.الانعكاس على محور x:

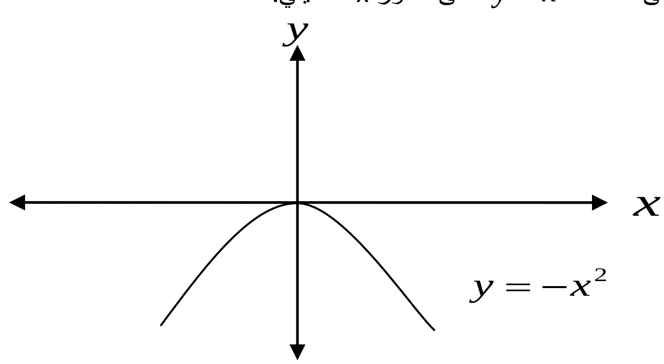
يمكن الحصول على منحنى $y=-f(x)$ بانعكاس منحنى $y=f(x)$ على محور x .

مثال:

ارسم الدالة $y=-x^2$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y=x^2$ على محور x كما يلي:

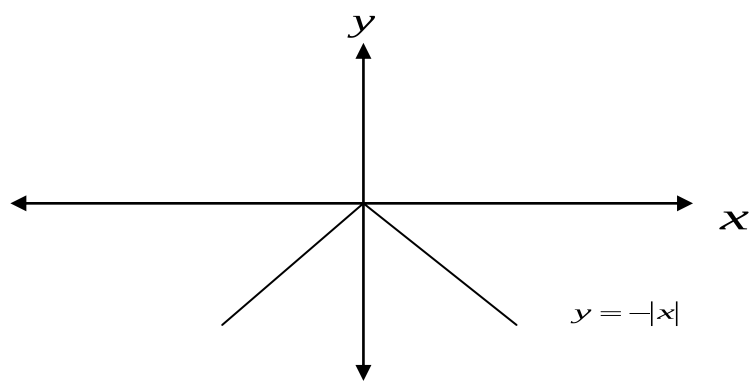


مثال:

ارسم الدالة $y=-|x|$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y=|x|$ على محور x كما يلي:

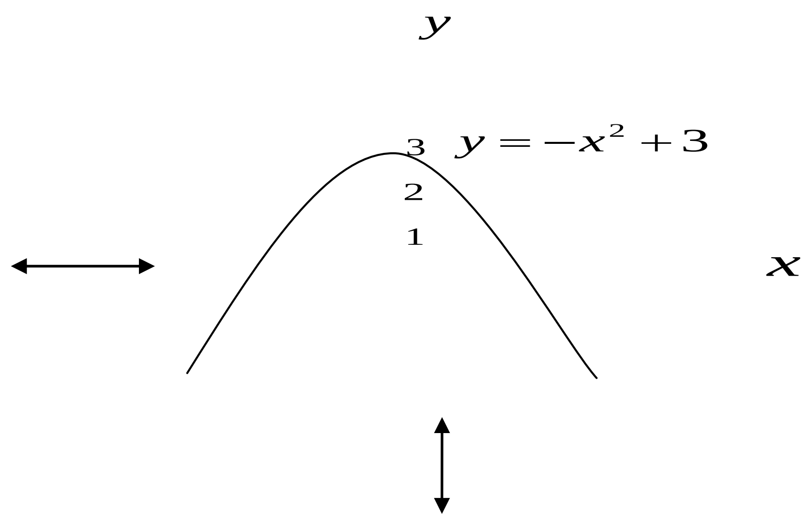


مثال:

ارسم الدالة

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y=x^2$ على محور x ثم إزاحته ثلاث وحدات إلى أعلى كما يلي:



الانعكاس على محور y:

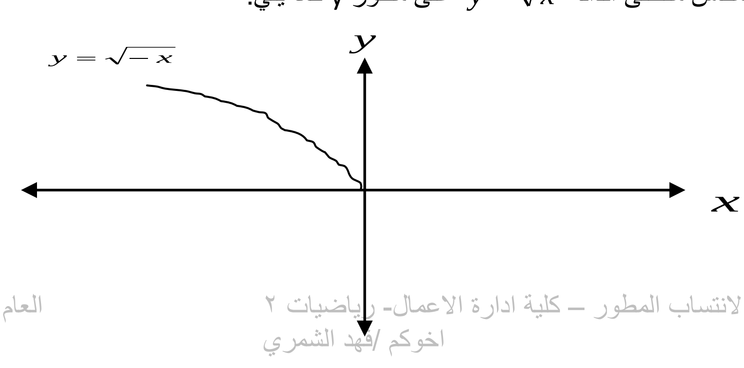
يمكن الحصول على منحنى $y=f(-x)$ بانعكاس منحنى $y=f(x)$ على محور y .

مثال:

ارسم الدالة $y=\sqrt{-x}$

الحل:

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y=\sqrt{x}$ على محور y كما يلي:



تمارين:
ارسم الدوال التالية:

1. $f(x) = x + 4$
2. $f(x) = x^2 - 4$
3. $f(x) = x^2 + 1$
4. $f(x) = (x+2)^2 - 1$
5. $f(x) = (x-3)^2$
6. $f(x) = -(x+2)^2$
7. $f(x) = |x-3| + 4$
8. $f(x) = (x-2)^3$
9. $f(x) = \sqrt{-x}$
10 $f(x) = -|x| - 2$

المحاضرة الثامنة

النهايات

مفهوم النهاية:

نهاية الدالة يقصد بها إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة. وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x\to a} f(x)$ وتقرأ

نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a ($x \to a$)

مثال:

إذا كانت f(x)=2x+1 فان $\lim_{x\to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما قيمة x تؤول إلى ٢. وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي ٥.

جبر النهايات:

١. إذا كانت $f(x)=c$ ، حيث عدد حقيقي فان $\lim_{x\to a} f(x)=c$ لكل عدد حقيقي a

٢. إذا كانت $f(x)=mx+c$ فان $\lim_{x\to a} f(x)=ma+c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال:

أوجد قيمة كل مما يأتي:

1. $\lim_{x\to 5} 27$

2. $\lim_{x\to -2} (1-2x)$

3. $\lim_{x\to 2} (3x+4)$

4. $\lim_{x\to \frac{1}{2}} (8x-5)$

الحل:

1. $\lim_{x\to 5} 27 = 27$

2. $\lim_{x\to -2} (1-2x) = 1-(2\times -2) = 1+4 = 5$

3. $\lim_{x\to 2} (3x+4) = 3\times 2+4 = 6+4 = 10$

4. $\lim_{x\to \frac{1}{2}} (8x-5) = 8\times \frac{1}{2} - 5 = 4-5 = -1$

٣. إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ، وكانت $\lim_{x\to a} g(x) = k$ وكانت c أي عدد حقيقي ، فان:

i. $\lim_{x\to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = l \pm k$

.i $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \times \lim\limits_{x \to a} f(x) = c \times l$

.iii $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \times g(x) \right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x) = l \times k$

.iii $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{l}{k} \quad , k \neq 0$

مثال:

إذا كانت $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ ، $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -8$ و $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 10.5$

فأوجد مما يلي:

.i $\lim\limits_{x \to 2} [h(x) - f(x)]$

.ii $\lim\limits_{x \to 2} [g(x) \times h(x)]$

.iii $\lim_{x\to 2} 8f(x)$

.iv $\lim_{x\to 2}\left[f(x)+h(x)+g(x)\right]$

.v $\lim_{x\to 2}\left[f(x)-g(x)\times h(x)\right]$

.vi $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$

.vii $\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{f(x)}$

الحل:

.i
$$\lim_{x\to 2}\left[h(x)-f(x)\right]=\lim_{x\to 2}h(x)-\lim_{x\to 2}f(x)$$
$$=10.5-5=5.5$$

.ii
$$\lim_{x\to 2}\left[g(x)\times h(x)\right]=\lim_{x\to 2}g(x)\times\lim_{x\to 2}h(x)$$
$$=-8\times 10.5=-84$$

.ii
$$\lim_{x\to 2}8f(x)=8\lim_{x\to 2}f(x)=8\times 5=40$$

.iii
$$\lim_{x\to 2}\left[f(x)+h(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to 2}f(x)+\lim_{x\to 2}h(x)+\lim_{x\to 2}g(x)$$
$$=5+10.5+(-8)$$
$$=15.5-8=7.5$$

.iv
$$\lim_{x\to 2}\left[f(x)-g(x)\times h(x)\right]=\lim_{x\to 2}f(x)-\lim_{x\to 2}g(x)\times\lim_{x\to 2}h(x)$$
$$=5-(-8\times 10.5)$$
$$=5+84=89$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)}=\frac{5}{-8}=-\frac{5}{8}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to 2} h(x)}{\lim_{x\to 2} f(x)}=\frac{10.5}{5}=2.1$$

نظرية:

إذا كانت النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عددا صحيحاً موجباً فان $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

مثال:

$$\lim_{x\to 1}[3x-1]^6=\left[\lim_{x\to 1} 3x-1\right]^6=[3\times 1-1]^6=[3-1]^6=2^6=64$$

أمثلة:

أوجد نهاية كل من الدوال التالية:

1. $$\lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7)=3\times 2^3+5\times 2^2-7$$
$$=3\times 8+5\times 4-7$$
$$=24+20-7=37$$

2. $$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2+7}{x-5}=\frac{3\times 3^2+7}{3-5}=\frac{3\times 9+7}{-2}=\frac{27+7}{-2}=\frac{34}{-2}=-17$$

3. $$\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{5x+3}=\frac{2\times 2-1}{5\times 2+3}=\frac{4-1}{10+3}=\frac{3}{13}$$

4. $$\lim_{x\to 2}e^x=e^2$$

5. $$\lim_{x\to 1}e^{x^2+2x+1}=e^{1^2+2\times 1+1}=e^{1+2+1}=e^4$$

6. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(-1)^2-1}{-1+1}=\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}$$ كميه غير معينة

7. $$\lim_{x\to 2}\left((\log(3x^2+5)\right)=\log(3\times 2^2+5)$$
$$=\log(3\times 4+5)$$
$$=\log(12+5)$$
$$=\log 17$$

8. $$\lim_{x\to 3}\left(\ln(2x-5)\right)=\ln(2\times 3-5)=\ln(6-5)=\ln 1=0$$

9. $$\lim_{x\to 1}(3x^3+4x-2)^3=(3\times 1^3+4\times 1-2)^3=(3+4-2)^3=5^3=125$$

10. $$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5}=\sqrt[3]{2^2+5}=\sqrt[3]{4+5}=\sqrt[3]{9}$$

٣. إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل:

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+5 & , x<1 \\ 7x-2 & , x>1 \end{cases}$$

وأردنا إيجاد $\lim_{x\to a} f(x)$ فقد تنشأ إحدى ثلاث حالات:

i. تقع a ضمن مجال القاعدة الأولى

i. تقع a ضمن مجال القاعدة الثانية

ii. تقع a على الحد الفاصل بين المجالين

مثال: إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , x<1\\ 7x-2 & , x>1\end{cases}$$

فأوجد

$$i.\ \lim_{x\to 3} f(x)\quad,\quad ii.\ \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)\quad,\quad iii.\ \lim_{x\to 1} f(x)$$

الحل:

i. تقع ٣ ضمن مجال القاعدة الثانية لان 1< 3 >1

$$\therefore\ \lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3} 7x-2=7\times 3-2=21-2=19$$

ii. تقع $\frac{1}{2}$ ضمن مجال القاعدة الثانية لان$1>\frac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}} 3x^2+5=3\left(\frac{1}{2}\right)^2+5=\frac{3}{4}+5=\frac{3}{4}+\frac{20}{4}=\frac{23}{4}$$

iii. تقع ١ على الحد الفاصل بين مجال القاعدتين لذا نحسب النهاية من اليمين

(أي $\lim_{x\to 1^+} f(x)$) والنهاية من اليسار(أي $\lim_{x\to 1^-} f(x)$)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} 7x-2=7\times 1-2=7-2=5$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} 3x^2 + 5 = 3 \times 1^2 + 5 = 3 + 5 = 8$$

$$\because \lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة

<u>تمارين</u>

أ- إذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x \to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$

فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x \to 2} [5f(x) - 4h(x)]$

ii. $\lim_{x \to 2} \left[-\frac{1}{2} g(x) \times h(x)\right]$

iii. $\lim_{x \to 2} [f(x) + 2h(x) + 3g(x) - 2]$

iv. $\lim_{x \to 2} [8f(x) - g(x) \times h(x)]$

v. $\lim_{x \to 2} \frac{g(x)}{f(x)}$

vi. $\lim_{x \to 2} \frac{h(x)}{2f(x)}$

ب- أوجد النهايات التالية إذا وجدت:

1. $\lim_{x\to 2}(x^2-2x+1)$

2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

3. $\lim_{x\to -2}\frac{2x-3}{x+4}$

4. $\lim_{x\to 0}e^x$

5. $\lim_{x\to 6}\sqrt[4]{x^2-3x-8}$

6. $\lim_{x\to 3}\left(\log(2x+4)\right)$

7. $\lim_{x\to 2}\left(\ln(x^2+1)\right)$

8. $\lim_{x\to -1}(2x^2+5x+1)^2$

9. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}$

المحاضرة التاسعة
نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة
(حالات عدم التعيين) والاتصال

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

الكمية الغير معينة هي الكمية التي ليس لها جواب محدد.
من أهم حالات عدم التعيين التي تظهر عند حساب النهايات هي:

$\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

يمكن إزالة حالة عدم التعيين بإحدى الطرق التالية:

أولاً: عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ نعالج الحالة كما يلي:

أ- إذا كانت البسط والمقام كثيرتا حدود:

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:
التحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

1. $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

الحل:

بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \frac{1-1}{-1+1} = \frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x-1) = -1-1 = -2$$

2. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

الحل:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6$$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$

الحل:

كمية غير معينة $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{1^2-3\times 1+2}{1-1}=\frac{1-3+2}{1-1}=\frac{0}{0}$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=1-2=-1$$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{2x}$

الحل:

كمية غير معينة $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{2x}=\frac{0^2+0}{2\times 0}=\frac{0}{0}$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x\times 2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

- **إذا احتوت الدالة على جذر:**

نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ونقوم بالتحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

1. $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

الحل:

كمية غير معينة $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\frac{\sqrt{9}-3}{9-9}=\frac{3-3}{9-9}=\frac{0}{0}$

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط$\left(\sqrt{x}+3\right)$

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}$$
$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

2. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

الحل:

كمية غير معينة $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2}=\frac{\sqrt{4}-2}{2-2}=\frac{2-2}{2-2}=\frac{0}{0}$

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط $(\sqrt{x+2}+2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

ثانياً: عندما $x\to\infty$

عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ نتبع ما يلي:

نقسم كل حد من حدود البسط والمقام على بأكبر أس أو نستخدم النتيجة التالية إذا كان البسط والمقام كثيرتا حدود.

نتيجة:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتا حدود و $x\to\infty$ فان:

إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.

$$1-\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

معامل بأكبر أس في البسط

$$2-\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \text{-------------------------------}$$

معامل بأكبر أس في المقام

إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام.

$$3-\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

ملاحظة:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right]^n=0$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right]^3=0$$

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5}$

الحل:

بما أن درجة البسط = درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5}=\frac{1}{3}$$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2+2x+1}$

الحل:

بما أن درجة البسط أقل من من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^2+2x+1}=0$$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+5}$

الحل:
بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+5} = \infty$$

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2}{2x^3+7}$

الحل:
بما أن درجة البسط = من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2}{2x^3+7} = \frac{5}{2}$$

تابع: تمارين:
أوجد النهايات التالية:

1. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-16}$

2. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$

3. $\lim_{x\to -4} \frac{x+4}{x^2+5x+4}$

4. $\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9}$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-5x^2+2}{7x^5+6x^3-3x+1}$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+3x-2}{2x^2+4}$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+6x-21}{x^2+1}$

الاتصال:

تعريف:

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في نقطة a إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

أ- الدالة معرفة في a أي أن f(a) معرفة

ب- $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة

ت- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

مثال(١):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x-9 & , x \neq -3 \\ \\ -6 & , x = -3 \end{cases}$$

متصلة في x=-3 ؟

الحل:

$$f(-3) = -6$$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} x - 9 = -3 - 9 = -12$$

بما أن $\lim_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$

اذاً الدالة غير متصلة في x=-3

مثال(٢):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , 0 < x < 5 \\ \\ 25 + 2x & , x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في x=5 ؟

الحل:

$$f(5) = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5}(25+2x) = 25+2\times 5 = 25+10 = 35$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5} 6x = 6\times 5 = 30$$

بما أن

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) \neq \lim_{x\to 5^-} f(x)$$

اذاً

$\lim_{x\to 5} f(x)$ غير موجودة

اذاً الدالة غير متصلة في x=5

مثال(٣):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2-3 & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

متصلة في x=0 ؟

الحل:

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(5x^2-3) = 5(0)^2-3 = -3$$

بما أن

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$$

اذاً الدالة غير متصلة في x=0

مثال(٤):

أثبت أن الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ غير متصلة في x=-2

الحل:

$$f(-2) = \frac{(-2)^2-4}{-2+2} = \frac{4-4}{-2+2} = \frac{0}{0}$$ غير معرفة

اذاً الدالة غير متصلة في x=-2

بين فيما إذا كانت الدالة المعطاة متصلة أو غير متصلة في العدد x المعطى

1. $f(x)=\begin{cases}2+x & ,x<2\\ 2-x & ,x\geq 2\end{cases}$ في x=2

2. $f(x)=\begin{cases}2x & ,x\geq -1\\ x-1 & ,x<-1\end{cases}$ في x=-1

3. $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,x\leq 1\\ 2 & ,x>1\end{cases}$ في x=1

4. $f(x)=\begin{cases}x+1 & ,x<2\\ 1 & ,x=2\\ 5-x & ,x>2\end{cases}$ في x=2

حلول الفقرات المختارة من تمارين المحاضرة التاسعة

3. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x+4}{x^2+5x+4}$ بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x\to -4} \frac{x+4}{x^2+5x+4} = \frac{-4+4}{(-4)^2+5\times -4+4} = \frac{-4+4}{16-20+4} = \frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل المقام إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to -4} \frac{x+4}{x^2+5x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{x+4}{(x+4)(x+1)} = \lim_{x\to -4} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-4+1}$$
$$= -\frac{1}{3}$$

4. $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{x-9}$

الحل

$$\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9} = \frac{3-\sqrt{9}}{9-9} = \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط ($3+\sqrt{x}$)

$$\lim_{x\to 9} \frac{3-\sqrt{x}}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)}{(x-9)\left(3+\sqrt{x}\right)} = \lim_{x\to 9} \frac{9-x}{(x-9)\left(3+\sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 9} \frac{-(x-9)}{(x-9)\left(3+\sqrt{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 9} \frac{-1}{3+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{-1}{3+\sqrt{9}} = \frac{-1}{3+3} = \frac{-1}{6}$$

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+6x-21}{x^2+1}$

الحل:

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+6x-21}{x^2+1}=\infty$$

هل الدالة المعرفة بـ

$$2.\quad f(x)=\begin{cases}2x & , x\ge -1\\ x-1 & , x<-1\end{cases}$$

متصلة في x=-1 ؟

$$f(-1)=2\times -1=-2$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1} 2x=2\times -1=-2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}(x-1)=-1-1=-2$$

بما أن $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)$

اذاً $\lim_{x\to -1} f(x)=-2$

و بما أن $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=-2$

اذاً الدالة متصلة في x=-1

هل الدالة المعرفة بـ

$$4.\quad f(x)=\begin{cases}x+1 & , x<2\\ 1 & , x=2\\ 5-x & , x>2\end{cases}$$

متصلة في x=٢ ؟

$f(2)=1$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}(5-x)=5-2=3$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}(x+1)=2+1=3$$

بما أن $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$

اذاً $\lim_{x\to 2} f(x)=3$

و بما أن $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

اذاً الدالة غير متصلة في x=2

رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

٣.الدالة التكعيبية:

مثال: ارسم الدالة $y=f(x)=x^3$

الحل:

x	-2	-1	0	1	2
y=f(x)	-8	1	0	1	8

المحاضرة العاشرة
الاشتقاق

الاشتقاق:

متوسط التغير:

إذا كانت y=f(x) فان أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها تحدث تغير في المتغير التابع y قدره . النسبة بين التغير في y إلى التغير في x تسمى متوسط التغير للدالة.

اذاً $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

لأي x_1 و x_2 في مجال الدالة

حيث $x_2=x_1+\Delta x$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من ١ إلى 1.5

الحل:

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1.5$$
$$f(1)=1^2+2=1+2=3$$
$$f(1.5)=(1.5)^2+2=2.25+2=4.25$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{4.25-3}{1.5-1}=\frac{1.25}{0.5}=2.5$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=3x+2$ عندما تتغير x من ١ إلى 2

الحل:

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=2$$
$$f(1)=3\times 1+2=3+2=5$$
$$f(2)=3\times 2+2=6+2=8$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{8-5}{2-1}=\frac{3}{1}=3$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من ٢ إلى 4

الحل:

$$x_1=2 \quad , \quad x_2=4$$
$$f(2)=2^2+2=4+2=6$$
$$f(4)=4^2+2=16+2=18$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{18-6}{4-2}=\frac{12}{2}=6$$

تعريف المشتقة الأولى:

نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \to 0$ (ان وجدت) تسمى المشتقة الاولى للدالة $y=f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها باحد الرموز التالية:

$$\frac{dy}{dx} \text{،} \qquad f'(x) \quad \text{،} \qquad y' \quad \text{،} \qquad \frac{d}{dx}f(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ إذاً

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للتفاضل(المبادئ الأولية للتفاضل)

مثال:

إذا كانت $f(x) = x^2$ أوجد $f'(x)$ من المبادئ الأولية .

الحل:

$$f(x) = x^2$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x) = 2x$$

ملاحظة:

وعندما تكون للدالة $f(x)$ مشتقة في العدد a تكون قيمتها $f'(a)$ ويقال أن الدالة قابلة للاشتقاق في a .

جبر الاشتقاق:

١.إذا كانت $y = x^n$ حيث n عدد حقيقي فان : $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

i. $y = x^5$

ii. $y = x^{-3}$

iii. $y = x^{\frac{1}{2}}$

الحل:

i. $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

ii. $\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$

iii. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

٢.إذا كانت $y = c$ حيث c كمية ثابتة فان : $\frac{dy}{dx} = 0$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

i. $y = 5$
ii. $y = -10$
iii. $y = \frac{3}{4}$

الحل:

i. $\frac{dy}{dx} = 0$
ii. $\frac{dy}{dx} = 0$
iii. $\frac{dy}{dx} = 0$

٣.إذا كانت $y = cx^n$ فان : $\frac{dy}{dx} = ncx^{n-1}$

مثال:أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

i. $y = 3x^4$
ii. $y = -2x^7$
iii. $y = 16x^{\frac{1}{2}}$

الحل:

i. $\frac{dy}{dx} = 12x^3$

ii. $\frac{dy}{dx} = -14x^6$

iii. $\frac{dy}{dx} = 8x^{-\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

٤.إذا كانت $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ حيث $n \neq 0$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n-1) a x^{n-2} + n a_n x^{n-1}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 15x^2 - 4x + 7$$

٥.إذا كانت $y = [f(x)]^n$ فان : $\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1} .\ f'(x)$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (2x^2 + 5)^8$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8(2x^2 + 5)^7 .\ 4x = 32x(2x^2 + 5)^7$$

٦

.إذا كانت $y = (f(x) . g(x))$ فان : $\frac{dy}{dx} = f'(x) . g(x) + g'(x) .\ f(x)$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (x^2 + 1)(2x^3 - 2)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2x(2x^3 - 2) + 6x^2 (x^2 + 1)$$
$$= 4x^4 - 4x + 6x^4 + 6x^2$$
$$= 10x^4 + 6x^2 - 4x$$

٧.إذا كانت $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ فان : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g(x).f'(x)-f(x).g'(x))}{[g(x)]^2}$

مثال:

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\dfrac{2x+5}{3x-4}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3x-4)(2)-(2x+5)(3)}{(3x-4)^2}$$
$$=\frac{6x-8-6x-15}{(3x-4)^2}$$
$$=\frac{-23}{(3x-4)^2}$$

نتيجة: إذا كانت $y=\dfrac{c}{f(x)}$ حيث c ثابت فان :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-c\,.\,f'(x)}{[f(x)]^2}$$

مثال: أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=\dfrac{3}{x^2-2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-3(2x)}{(x^2-2)^2}=\frac{-6x}{(x^2-2)^2}$$

٨.إذا كانت $y=f(u)$ ، $u=g(x)$ فان :

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ (قانون السلسلة)

مثال: إذا كانت $y=u^2+5u$ ، $u=x+3$ فأوجد $\dfrac{dy}{dx}$

الحل: $\dfrac{dy}{du}=2u+5$ ، $\dfrac{du}{dx}=1$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(2u+5)(1)=2(x+3)+5=2x+11$$

المشتقات العليا:

عندما نشتق الدالة للمرة الثانية فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,,\ f''(x)\,,\ y''$$

وعندما نشتق الدالة للمرة الثالثة فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثالثة ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^3y}{dx^3}\,,\ f'''(x)\,,\ y'''$$

وهكذا

مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

الحل:

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$

مثال: أوجد المشتقات الأربع الأولى للدالة $y = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + x - 1$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 4x + 1$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 80x^3 + 36x^2 - 48x + 4$$

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 240x^2 + 72x - 48$$

$$\frac{dy^4}{dx^4} = 480x + 72$$

تمارين

١.أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = 4x^2 - 3x^4$

ii. $y = (2x^5 - 1)(5x^3 + 7x)$

iii. $y = \sqrt{3}\left(x^5 - x^{-3}\right)$

iv. $y = \dfrac{2x-1}{2x+1}$

v. $y = x+1$

vi. $y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)$

vii. $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$

viii. $y = \dfrac{1}{2x+3}$

ix. $y = (4x^2 + 5x - 2)^8$

٢.أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كانت :

i. $y = u^3 - 2u \quad , \quad u = x^2 - 5x + 6$

ii. $y = u^2 - 2u^{-2} \quad , \quad u = x^2 + 2$

iii. $y = \dfrac{u^2+1}{u-2} \quad , \quad u = 3x + 7$

٣.أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال الآتية:

i. $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$

ii. $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$

iii. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

iv. $y = \dfrac{1}{3x+1}$

حلول الفقرات المختارة من تمارين المحاضرة العاشرة:

١- $vii. \quad y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$

الحل:

$$y=\left(3x^2+4\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}\left(3x^2+4\right)^{\frac{1}{5}-1}.\,6x=\frac{6}{5}x\left(3x^2+4\right)^{-\frac{4}{5}}$$

$$ix.\quad y=\left(4x^2+5x-2\right)^8$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=8\left(4x^2+5x-2\right)^7.\,(8x+5)$$

$$=\left(64x+40\right)\left(4x^2+5x-2\right)^7$$

:

٢- $$iii.\quad y=\frac{u^2+1}{u-2}\quad ,\ u=3x+7$$

الحل:

$$\frac{dy}{du}=\frac{(u-2).2u-(u^2+1).1}{(u-2)^2}=\frac{2u^2-4u-u^2-1}{(u-2)^2}$$

$$=\frac{u^2-4u-1}{(u-2)^2}$$

$$\frac{du}{dx}=3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=\frac{u^2-4u-1}{(u-2)^2}\times 3=\frac{3(3x+7)^2-12(3x+7)-3}{(3x+7-2)^2}$$

$$=\frac{3(3x+7)^2-36x-87}{(3x+5)^2}$$

$$=\frac{3(9x^2+42x+49)-36x-87}{(3x+5)^2}$$

$$=\frac{27x^2+126x+147-36x-87}{(3x+5)^2}$$

$$=\frac{27x^2+96x+60}{(3x+5)^2}$$

٣- $$iv.\quad y=\frac{1}{3x+1}$$

الحل:

$$y' = \frac{-1\times 3}{(3x+1)^2} = \frac{-3}{(3x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-(-3)(2(3x+1)\times 3)}{(3x+1)^4} = \frac{18(3x+1)}{(3x+1)^4} = \frac{18}{(3x+1)^3}$$

$$y''' = \frac{-18\times 3(3x+1)^2\times 3}{(3x+1)^6} = \frac{-162}{(3x+1)^4}$$

المحاضرة الحادية عشرة
مشتقة الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

تابع: الاشتقاق:

مشتقة الدوال الاسية:

إذا كانت $y = e^x$ فان : $\frac{dy}{dx} = e^x$

وبشكل عام إذا كانت $y = e^u$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = e^u . \frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y = e^{x^2+2x+1}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = e^{x^2+2x+1}\left(2x+2\right) = (2x+2)e^{x+2x+1}$

إذا كانت $y = a^x$ فان : $\frac{dy}{dx} = a^x . \ln a$

وبشكل عام إذا كانت $y = a^u$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = a^u . \ln a . \frac{du}{dx}$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = 3^x$

2. $y = 9^{2x^2}$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3$

مشتقة الدوال اللوغاريتمية:

إذا كانت $y = \ln x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \ln u$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y = \ln(1+x^2)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\times 2x=\frac{2x}{1+x^2}$$

نتيجة:

إذا كانت $y=\log_a x$ فان : $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ln a}$

وبشكل عام إذا كانت $y=\log_a u$ حيث $u=f(x)$ فان: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}.\frac{1}{\ln a}$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y=\log_2 x$
2. $y=\log_2(1+x^2)$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ln 2}$
2. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\times 2x\times\frac{1}{\ln 2}=\frac{2x}{(1+x^2)\ln 2}$

مشتقة الدوال المثلثية:

١.إذا كانت $y=\sin x$ فان : $\frac{dy}{dx}=\cos x$

وبشكل عام إذا كانت $y=\sin u$ حيث $u=f(x)$ فان: $\frac{dy}{dx}=\cos u.\frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y=\sin 4x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\cos 4x\times 4=4\cos 4x$$

٢.إذا كانت $y=\cos x$ فان : $\frac{dy}{dx}=-\sin x$

وبشكل عام إذا كانت $y=\cos u$ حيث $u=f(x)$ فان: $\frac{dy}{dx}=-\sin u.\frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y = \cos 5x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = -\sin 5x \times 5 = -5\cos 5x$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = \cos^2 x$
2. $y = \sin x \cos x$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx} = 2\cos x\,.\,(-\sin x) = -2\cos x \sin x$
2. $y = \sin x \times -\sin x + \cos x \times \cos x = -\sin^2 x + \cos^2 x$

جدول مشتقات بقية الدوال المثلثية:

3. $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u . \frac{du}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u . \tan u . \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u . \cot u . \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u . \frac{du}{dx}$

حيث $u = f(x)$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ الدوال الآتية :

1. $y = \tan^2 x$
2. $y = \cot^3(2x+1)$
3. $y = \sec(x+1)$

4. $y = \csc 2x$

الحل:

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2\tan x \ \sec^2 x$

2. $\dfrac{dy}{dx} = 3\cot^2(2x+1).\left[-\csc^2(2x+1)\right].(2)$

$= -6\cot^2(2x+1).\csc^2(2x+1)$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \sec(x+1).\tan(x+1)\ .(1)$

$= \sec(x+1)\tan(x+1)$

4. $\dfrac{dy}{dx} = -\csc 2x.\cot 2x\ .(2)$

$= -2\csc 2x \cot 2x$

الاشتقاق الضمني:

لإيجاد $\dfrac{dy}{dx}$ من دالة ضمنية(غير صريحة) نعتبر y دالة لـ x ونطبق قواعد

الاشتقاق المناسبة.

ملاحظة:

عندما نفاضل أي حد يحتوي على y نضرب ناتج التفاضل في $\dfrac{dy}{dx}$ ثم نجمع الحدود المحتوية على $\dfrac{dy}{dx}$في طرف ، وننقل الحدود الاخرى في الطرف الثاني.

مثال: أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية:

1. $y^2 + x^2 = 9$
2. $y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3 = 9$
3. $4x^2 + 3xy - xy^2 = 0$

الحل:

1. $2y\dfrac{dy}{dx} + 2x = 0$

$2y\dfrac{dy}{dx} = -2x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{2y} = -\dfrac{x}{y}$

2. $2y\frac{dy}{dx}+2x+9x^2+12y^2\frac{dy}{dx}=0$

$$2y\frac{dy}{dx}+12y^2\frac{dy}{dx}=-2x-9x^2$$

$$\left(2y+12y^2\right)\frac{dy}{dx}=-2x-9x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-9x^2}{2y+12y^2}$$

3. $8x+3x\frac{dy}{dx}+3y-2xy\frac{dy}{dx}-y^2=0$

$$3x\frac{dy}{dx}-2xy\frac{dy}{dx}=y^2-3y-8x$$

$$\left(3x-2xy\right)\frac{dy}{dx}=y^2-3y-8x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-3y-8x}{3x-2xy}$$

تابع: الاشتقاق:

الاشتقاق الجزئي:

إذا كانت لدينا الدالة $z=f(x,y)$ دالة متغيرين ، اذا ابقينا y ثابتاً فان z دالة في x فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى x وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى x ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial x}$

وبنفس الطريقة إذا أبقينا x ثابتاً فان z دالة في y فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى y وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى y ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial y}$

مثال:

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ لكل من الدوال الآتية:

1. $z=xy+x^2y+y^2x$
2. $z=2x^2+3xy-6y^2$

الحل:

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2xy + y^2$

   $\frac{\partial z}{\partial y} = x + x^2 + 2yx$

2. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y$

   $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 12y$

تمارين

١.أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = e^{x^2 - 2x}$

ii. $y = (2x+3)e^{-2x}$

iii. $y = e^{\cos x}$

iv. $y = \frac{1}{2}\left(e^{3x} + e^{-3x}\right)$

v. $y = \log_4 3x$

vi. $y = 7^{x^3}$

vii. $y = \ln(\sin x)$

viii. $y = x^2 e^{2x}$

ix. $y = e^{2x}\cos 3x$

٢.أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

i. $9x^2 + 4y^2 = 40$

ii. $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$

iii. $4xy^3 - x^2y + x^3 - 5x + 6 = 0$

iv. $5x^2 + 2x^2y + y^2 = 8$

v. $y = x^2 \sin x$

vi. $y^2 = x\cos y$

٣.إذا كانت $y^2 - 4x^2 = 5$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$ و $y = 3$

٤.إذا كانت $xy^2 + 3y = 27$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 2$ و $y = 3$

٥.أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ إذا كانت :

i. $z = x^3 - 2xy + y^3$

ii. $z = 5y^3 + xy - 7y^2$

iii. $z = xy - \ln xy$

iv. $z = x\ln y + y\ln x - xe^{xy}$

حلول الفقرات المختارة من تمارين المحاضرة الحادية عشرة.

٢- $ii.\quad y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$

الحل:

$$4y^3\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} - 12x^2 = 5$$

$$4y^3\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 5$$

$$\left(3y^3 + 3\right)\frac{dy}{dx} = 12x^2 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x^2 + 5}{3y^3 + 3}$$

$iv.\quad 5x^2 + 2x^2y + y^2 = 8$

الحل:

$$10x + 2x^2\frac{dy}{dx} + 4xy + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -10x - 4xy$$

$$\left(2x^2 + 2y\right)\frac{dy}{dx} = -10x - 4xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-10x - 4xy}{2x^2 + 2y} = \frac{-2(5x + 2xy)}{2(x^2 + y)} = \frac{-(5x + 2xy)}{(x^2 + y)}$$

حلول الفقرات المختارة من تمارين المحاضرة الحادية عشرة.

٤- إذا كانت $y^2 - 4x^2 = 5$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$ و $y = 3$

الحل:

$$2y\frac{dy}{dx} - 8x^2 = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 8x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{2y} = \frac{4x}{y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1, y=3} = \frac{4\times -1}{3} = \frac{-4}{3}$$

حلول الفقرات المختارة من تمارين المحاضرة الحادية عشرة.

٤- إذا كانت $xy^2 + 3y = 27$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 2$ و $y = 3$

الحل:

$$2xy\frac{dy}{dx} + y^2 + 3\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$(2xy + 3)\frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{2xy + 3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2, y=3} = \frac{-(3)^2}{2\times 2\times 3 + 3} = \frac{-9}{15} = \frac{-3}{5}$$

٥- $i.\quad z = x^3 - 2xy + y^3$

الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 3y^2$$

الحل:

$$iv. \quad z = x\ln y + y\ln x - xe^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y + \frac{y}{x} - (xe^{xy} \times y + e^{xy} \times 1)$$

$$= \ln y + \frac{y}{x} - xye^{xy} - e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} + \ln x - xe^{xy} \times x$$

$$= \frac{x}{y} + \ln x - x^2e^{xy}$$

المحاضرة الثانية عشرة
التكامل

التكامل غير المحدد:

التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق ، وتسمى عملية ايجاد y إذا علمت y' بعملية التكامل . ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل. فإذا كانت f دالة للمتغير x، فتكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل $\int f(x).dx$ ، حيث الرمز $\int$ يدل على عملية التكامل غير المحدد وان dx تدل على أن هذه العملية تجرى بالنسبة للمتغير x .

تابع: التكامل:

قواعد التكامل:

1. $\int dx = x + c$ حيث c ثابت التكامل
2. $\int a\,dx = ax + c$ حيث a ثابت
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \,, n \neq -1$
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ حيث a ثابت
5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
6. $\int e^x dx = e^x + c$
7. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c \,, x \neq 0$
8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
9. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
10. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
11. $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$
12. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$
13. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$

أمثلة:

1. $\int 5dx = 5x + c$

2. $\int (7x+3)dx = \frac{7x^2}{2} + 3x + c$

3. $\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$

4. $\int (3\sin x + 2x)dx = -3\cos x + \frac{2x^2}{2} + c = -3\cos x + x^2 + c$

5. $\int (x + \sec^2 x)dx = \frac{x^2}{2} + \tan x + c$

6. $\int (x^{\frac{1}{2}} + 4)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4x + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + c$

7. $\int (4e^x + x^{-1})dx = \int \left(4e^x + \frac{1}{x}\right)dx = 4e^x + \ln|x| + c$

ملاحظات :

1. $\int [f(x)]^n . f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \;, n \neq -1$

أمثلة:

i. $\int 3(x^3+4)^4 x^2 dx = \frac{(x+4)^5}{5} + c$

ii. $\int (x^2+1)^3 x\, dx = \frac{1}{2}\int 2(x^2+1)^3 x\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^4}{4} + c$

$$= \frac{(x^2+1)^4}{8} + c$$

iii. $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$

iv. $\int \sin^2 x \cos x\, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

2. $\int \left[f(x) \right]^n . f'(x)\, dx = \ln\left| f(x) \right| + c \,, n = -1$

أمثلة:

i. $\int x^3(1+x^4)^{-1} dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(1+x^4)^{-1} dx = \frac{1}{4}\left|1+x^4\right| + c$

ii. $\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int 2x(1+x^2)^{-1} dx = \left|1+x^2\right| + c$

3. $\int f'(x).e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$

أمثلة:

i. $\int e^{\sin x} \cos x \;\, dx = e^{\sin x} + c$

ii. $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

iii. $\int x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9}\int 9x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9} e^{3x^3} + c$

حل المعادلات التفاضلية:

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = xy^{-2}$

الحل:

نفصل المتغيرين x، y عن بعضهما بحيث يصبح تفاضل كل منهما مضروباً في دالة لذلك المتغير فقط، كما نبين أدناه.

$$\frac{dy}{dx} = xy^{-2} = \frac{x}{y^2}$$

$$y^2 dy = xdx$$

بإجراء التكامل للطرفين

$$\int y^2 dy = \int xdx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + c$$

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3y^3 = \frac{4x^3}{y^{-3}}$$
$$y^{-3}dy = 4x^3dx$$

$$\int y^{-3}dy = \int 4x^3dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{4x^4}{4} + c$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x^4 + c$$

تمارين

١.أوجد ناتج التكاملات الآتية:

i. $\int \left(5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6\right)dx$

ii. $\int \left(x^{1/2} - 3x^{2/3} + 5x^{-1/2}\right)dx$

iii. $\int \frac{x}{x^2+5}dx$

iv. $\int \cos 3x \, dx$

v. $\int \left(\sec^2 2x - 1\right)dx$

vi. $\int e^{2x}dx$

vii. $\int \frac{x^2dx}{x^3+1} \quad , x \neq -1$

٢.حل المعادلة التفاضلية المعطاة:

i. $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$

ii. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

iii. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

المحاضرة الثالثة عشر
التكامل المحدد

التكامل المحدد:

إذا كانت g(x) دالة بحيث $g'(x)=f(x)$ فان: $\int_a^b f(x)dx=\left[g(x)\right]_a^b=g(b)-g(a)$

ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدد للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ و يسمى a بالحد الأدنى و a بالحد الأعلى أو يسميان معاً بحدي التكامل.

مثال:

أوجد $\int_1^3 x^3dx$

الحل: $\int_1^3 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3=\frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=\frac{81-1}{4}=\frac{80}{4}=20$

بعض خواص التكامل المحدد:

1. $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$

مثال :

$$\int_1^2 4x^3dx=4\int_1^2 x^3dx=4\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\left[x^4\right]_1^2=16-1=15$$

2. $\int_a^a f(x)dx=0$

$$\int_5^5 3x^2dx=0$$

3. $\int_a^b \left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

$$\int_0^2 (3x^2+e^x)dx=\int_0^2 3x^2\,dx+\int_0^2 e^x\,dx$$

4. $\int_c^d f(x)dx=-\int_d^c f(x)dx$

مثال: إذا كان $\int_{2}^{4} f(x)dx = 8$ فان $\int_{4}^{2} f(x)dx = -8$

$$5. \quad \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{2}^{4} x^2dx + \int_{4}^{2} x^2dx = \int_{2}^{2} x^2dx = 0$$

أمثلة:

أوجد التكاملات التالية:

$$1. \quad \int_{0}^{3} 2\,dx$$

الحل:

$$\int_{0}^{3} 2\,dx = [2x]_0^3 = 2\times 3 - 0 = 6$$

$$2. \quad \int_{0}^{2} (x+6)dx$$

الحل:

$$\int_{0}^{2} (x+6)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2^2}{2} + 6(2)\right] - 0$$

$$= 2 + 12 = 14$$

$$3. \quad \int_{1}^{3} (3x^2 - 4x - 5)dx$$

الحل:

$$\int_{1}^{3} (3x^2 - 4x - 5)dx = [x^3 - 2x^2 - 5x]_1^3$$

$$= [3^3 - 2(3)^2 - 5(3)] - [1^3 - 2(1)^2 - 5(1)]$$

$$= [27 - 18 - 15] - [1 - 2 - 5]$$

$$= -6 + 6 = 0$$

4. $\int_{-2}^{2}(5x+4)dx$

$$\int_{-2}^{2}(5x+4)dx=\left[\frac{5x^2}{2}+4x\right]_{-2}^{2}$$
$$=\left[\frac{5(2)^2}{2}+4(2)\right]-\left[\frac{5(-2)^2}{2}+4(-2)\right]$$
$$=[10+8]-[10-8]$$
$$=18-2=16$$

5. $\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx$

الحل:

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^2$$
$$=\ln 2-\ln 1$$
$$=\ln 2-0=\ln 2$$

6. $\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx$

الحل:

$$\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\pi}$$
$$=-\cos\pi-(-\cos 0)$$
$$=-(-1)+1=2$$

7. $\int_{0}^{2}(2x+1)^3dx$

$$\int_{0}^{2}(2x+1)^3dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}2(2x+1)^3dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^4}{4}\right]_0^2=\frac{1}{8}\left[(2\times2+1)^4-1\right]$$
$$=\frac{1}{8}\times624=78$$

- إذا كان $\int_{1}^{2} f(x)dx = 5$ ، $\int_{1}^{3} f(x)dx = 10$ فأوجد

$i.\quad \int_{2}^{3} f(x)dx$

$ii.\quad \int_{1}^{1} f(x)dx$

$iii.\quad \int_{3}^{1} f(x)dx$

$iv.\quad \int_{1}^{2} 6f(x)dx$

الحل:

$$\int_{1}^{2} f(x)dx = 5 \quad \Rightarrow \quad \int_{2}^{1} f(x)dx = -5$$

$$i.\quad \int_{2}^{3} f(x)dx = \int_{2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx$$
$$= -5 + 10 = 5$$

$$ii.\quad \int_{1}^{1} f(x)dx = 0$$

$$iii.\quad \int_{3}^{1} f(x)dx = -\int_{1}^{3} f(x)dx = -10$$

$$iv.\quad \int_{1}^{2} 6f(x)dx = 6\int_{1}^{2} f(x)dx = 6 \times 5 = 30$$

- أوجد التكاملات التالية:

$i.\quad \int_{0}^{2} (5x^3 - 3x + 6)dx$

$ii.\quad \int_{-2}^{3} 7dx$

$iii.\quad \int_{4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\,dx$

iv. $\int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx$

iv. $\int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx$

vi. $\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$

vii. $\int_{-2}^{3}\left(6x^2-5\right)dx$

viii. $\int_{2}^{10}\frac{1}{\sqrt{5x-1}}dx$

ix. $\int_{0}^{\pi}\sec^2 x\,dx$

المحاضرة الرابعة عشر
حل التمارين

من تمارين المحاضرة الثانية:

•إذا كانت المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من ١٠ ، افرض ان $A=\{1,3,5\}$ و $B=\{2,4,6\}$ كون المجموعات الاتية:

$(i)\ A\cup B$

$(ii)\ A\cap B$

$(iii)\ \overline{A}$

الحل:

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$(i)\ A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

$(ii)\ A\cap B=\phi$

$(iii)\ \overline{A}=\{2,4,6,7,8,9\}$

من تمارين المحاضرة الثانية:

•لتكن المجموعة الكلية $U=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$

ولتكن $A=\{1,2\}\ ,\ B=\{-1,1,3\}\ ,\ C=\{2,4,6\}$

فأوجد

$(i)\ A\times B$

$(ii)\ \overline{C}\times A$

الحل:

$(i)\ A\times B=\{(1,-1),(1,1)(1,3),(2,-1),(2,1),(2,3)\}$

$\overline{C}=\{-1,0,1,3,5\}$

$(ii)\ \overline{C}\times A=\{(-1,1),(-1,2),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(3,3),(3,2),(5,1),(5,2)\}$

٨. أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x,y^2)=(2x-2,1)$

الحل:

$x=2x-2$

$x-2x=-2$

$-x=-2$

$x=\dfrac{-2}{-1}=2$

$y^2=1$

$y=\pm\sqrt{1}=\pm1$

$y=\pm1$

من تمارين المحاضرة الثالثة التكميلية:

٣- إذا كانت $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=x^2$ فأوجد

$(iii)(f\times g)(x)$

$(iv)\ \frac{f}{g}(x)$

$(v)(fog)(x)$

$(iv)\ \ f^{-1}$

الحل:

$$(iii)(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$
$$=\frac{1}{x}\times x^2=x$$

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x}\Big/x^2=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^3}$$

$$(v)(fog)(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{x^2}$$

$$(iv)\ \ f(x)=y=\frac{1}{x}$$

$$y=\frac{1}{x}$$
$$xy=1$$
$$x=\frac{1}{y}$$
$$x=f^{-1}(y)=\frac{1}{y}$$

من تمارين المحاضرة الخامسة:

١- حل المتباينة

$$5>2-9x>-4$$

الحل:

$$5-2>-9x>-4-2$$
$$3>-9x>-6$$
$$\frac{-1}{9}\times 3<x<\frac{-1}{9}\times -6$$
$$\frac{-1}{3}<x<\frac{2}{3}$$

مجموعة الحل هي الفترة $(\frac{-1}{3},\frac{2}{3})$

٢- حل المتباينة $5x-6>11$

الحل:

$$5x>11+6$$
$$5x>17$$
$$x>17\times\frac{1}{5}$$
$$x>3.4$$

مجموعة الحل هي الفترة $(3.4,\infty)$

من تمارين المحاضرة الخامسة (القيمة المطلقة)

٥- حل المتباينة $|2x-3|<7$

الحل:

$$-7<2x-3<7$$
$$-7+3<2x<7+3$$
$$-4<2x<10$$
$$\frac{1}{2}\times-4<x<10\times\frac{1}{2}$$
$$-2<x<5$$

مجموعة الحل هي الفترة $(-2,5)$

من تمارين المحاضرة السادسة.

- هل الدالة $f(x)=3x^2-4x$ دالة زوجية؟

الحل:

$$f(-x)=3(-x)^2-4(-x)$$
$$=3x^2+4x$$
$$\neq f(x)$$

اذاً ليست زوجية.

من تمارين المحاضرة السادسة.

- هل الدالة $f(x)=3x^3-4x$ دالة فردية ؟

الحل:

$$f(-x)=3(-x)^3-4(-x)$$
$$=-3x^3+4x$$

$$-f(x)=-(3x^2-4x)$$
$$=-3x^2+4x$$
$$=f(-x)$$

اذاً فردية.

من تمارين المحاضرة السادسة:

٦.إذا دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D = 100 - 5P$ فأوجد

أ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 19$.

ب) سعر وحدة السلعة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 50$.

الحل:

أ.عندما $P = 19$

$$Q_D = 100 - 5 \times 19$$
$$= 100 - 95$$
$$= 5$$

ب.عندما $Q_D = 50$

$$Q_D = 100 - 5P$$
$$50 = 100 - 5P$$
$$5P = 100 - 50 = 50$$
$$\therefore P = \frac{50}{5} = 10$$

تمارين متنوعة .

- إذا كانت $f(x)= 4x^2-3x^4$ فان المشتقة الأولى للدالة عند $x = 2$ تساوي:

٢. أوجد مجال $f(x) = \frac{2x+8}{x+4}$

٣. أوجد مجال الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

١.

الحل:

$$f'(x) = 8x - 12x^3$$

عند $x=2$

$$f'(2) = 8 \times 2 - 12 \times (2)^3$$
$$= 16 - 96 = -80$$

.٢
الحل:
يجب أن لا يكون المقام صفراً ، ويكون x+4=0 عندما x=-4
اذاً المجال هو R-{-4}
.٣
الحل:
المجال هو R لان دليل الجذر فردي
واجب(١):
١- أوجد كل خط من الخطوط المستقيمة الذي يحقق الشروط المعطاة فيما يلي:
- المستقيم المار بالنقطة (6, 2) وميله m=-7
- المستقيم المار بالنقطتين (5,8) و (-3,6)
- المستقيم الذي يمر بالنقطة (3,0) وعمودي على المستقيم 2x+3y=6
- المستقيم الذي يمر (3,3) ويوازي المستقيم 3x-y=6

٢- أوجد الميل والمقطوع الصادي للمستقيم -4x=12-3y

حلول واجب(١)(من المحاضرة الرابعة)
أ- المستقيم المار بالنقطة (6, 2) وميله يساوي m= -7 .
الحل:

$$m=-7\,,\,x_1=6\,,\,y_1=2$$
$$y-2=-7(x-6)$$
$$y-2=-7x+42$$
$$y=-7x+42+2$$
$$y=-7x+44$$

حلول واجب(١)(من المحاضرة الرابعة)
ب - المستقيم المار بالنقطتين (5, 8) و (-3,6)
الحل:

$$x_1=5, y_1=8, x_2=-3, y_2=6$$
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-8}{x-5}=\frac{6-8}{-3-5}=\frac{-2}{-8}=\frac{1}{4}$$
$$4(y-8)=x-5$$
$$4y-32=x-5$$
$$4y=x-5+32=x+27$$
$$y=\frac{x+27}{4}$$

حلول واجب(١)(من المحاضرة الرابعة)

ج- المستقيم الذي يمر بالنقطة (3, 0) وعمودي على المستقيم 2x+3y=6

الحل:

نفرض ميل المستقيم 2x+3y=6 هو m_1 وميل المستقيم العمودي m_2

اذاً

$$m_1 = \frac{-a}{b}$$

$$a = 2, b = 3$$

$$m_1 = \frac{-2}{3}$$

$m_1 \times m_2 = -1$ **(شرط التعامد)**

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{-2/3} = -1 \times \frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$x_1 = 3 , y_1 = 0$$

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x-3) = \frac{3x-9}{2}$$

$$y = \frac{3x-9}{2}$$

د-المستقيم الذي يمر بالنقطة (3, 3) ويوازي على المستقيم 3x-y=6

الحل:

نفرض ميل المستقيم 3x-y=6 هو m_1 وميل المستقيم الموازي m_2

اذاً $m_1 = \frac{-a}{b}$

$$a = 3, b = -1$$

$$m_1 = \frac{-3}{-1} = 3$$

$m_2 = m_1 = 3$ **(شرط التوازي)**

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$x_1 = 3 , y_1 = 3$$

$$y - 3 = 3(x-3) = 3x - 9$$

$$y = 3x - 9 + 3$$

$$y = 3x - 6$$

٢- أوجد الميل والمقطوع الصادي للمستقيم $-4x=12-3y$

الحل:

لإيجاد المطلوب نضع أولا المعادلة المعطاة على الصورة :

$Y=mx+b$

من المعادلة المعطاة نجد أن

$$3y = 4x + 12$$

$$y = \frac{4}{3}x + 4$$

بمقارنة هذه المعادلة الأخيرة بالمعادلة $y=mx+b$

نجد أن الميل هو $m = \frac{4}{3}$ والمقطوع الصادي هو $b=4$