المحاضرة المباشرة الثانية
(الأسبوع السابع)

الباب الخامس (المعادلات)

١) معادلات خطية في مجهول واحد (س) :-

أ س = جـ .

٢) معادلات خطية في مجهولين

أ س + ب ص = جـ .

٣) معادلات خطية آنية في مجهولين :-

أ$_1$ س + ب$_1$ ص = جـ$_1$

أ$_2$ س + ب$_2$ ص = جـ$_2$.

٤) معادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد :-

أ س^2 + ب س + جـ = صفر .

مثلاً :-

أ) أ س^2 + ب س = صفر (جـ = صفر)

ب) أ س^2 + جـ = صفر (ب = صفر)

جـ) أ س^2 + ب س + جـ = صفر (أ ≠ صفر ، ب ≠ صفر ، جـ ≠ صفر)

ويمكن حل هذا النوع من المعادلات بأحد الطرق التالية :-

١) طريقة التحليل .

٢) طريقة القانون العام :-

والصيغة العامة لهذه الطريقة تكتب على النحو التالي :

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \mp \sqrt{\text{ب}^2 - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$

حيث أ : هو معامل س^2 .

ب : معامل س

جـ : الحد الثابت .

ويسمى المقدار ($\text{ب}^2 - ٤\text{أجـ}$) بالمميز ويرمز له بالرمز م ،

ويوجد هنالك ثلاث حالات للمميز هي :-

١- إذا كانت م > صفر ، فيكون للمعادلة $\text{أس}^2 + \text{ب س} + \text{جـ} = \text{صفر}$

حلين حقيقين مختلفين هما :-

$$\text{س}_1 = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\text{م}}}{٢\text{أ}} \quad ، \quad \text{س}_2 = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\text{م}}}{٢\text{أ}}$$

(ويسميان أيضاً بجذرا المعادلة) .

٢- إذا كانت م = صفر ، فيكون للمعادلة $\text{أس}^2 + \text{ب س} + \text{جـ} = \text{صفر}$

حل وحيد هو $\text{س} = \frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}$.

٣- إذا كانت م < صفر ، فيكون للمعادلة $\text{أس}^2 + \text{ب س} + \text{جـ} = \text{صفر}$

حلين غير حقيقين (بمعنى أنه لا يوجد حلول حقيقية لهذه المعادلة)

مثال: حل المعادلات التالية باستخدام القانون العام:

1) $٢س^2 + س - ١٥ =$ صفر

2) $س^2 + ٢س + ٣ =$ صفر

3) $٢س^2 - ٢س = \frac{-١}{٢}$

الحل:- (1) $٢س^2 + س - ١٥ =$ صفر

لاحظ أن أ $= ٢$ ، ب $= ١$ ، جـ $= -١٥$.

وباستخدام القانون المميز نحصل على:-

$ب^2 - ٤أجـ = (١)^2 - ٤(٢)(-١٥) = ١ + ١٢٠ = ١٢١$

المميز موجب، إذاً للمعادلة جذران حقيقيان هما:-

$$س_١ = \frac{-١ + \sqrt{١٢١}}{٢(٢)} = \frac{-١ + ١١}{٤} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$$

$$س_٢ = \frac{-١ - \sqrt{١٢١}}{٢(٢)} = \frac{-١ - ١١}{٤} = \frac{-١٢}{٤} = -٣ .$$

(2) $س^2 + ٢س + ٣ =$ صفر . (أ $= ١$ ، ب $= ٢$ ، جـ $= ٣$)

باستخدام المميز نحصل على:

$ب^2 - ٤أجـ = (٢)^2 - ٤(١)(٣) = ٤ - ١٢ = -٨$

إذاً ، لا يوجد حلول حقيقية لأن المميز سالبة .

(٣) $2س^2 - 2س = -\frac{1}{2}$.

الحل: نعيد كتابة المعادلة على الصورة:-

$2س^2 - 2س + \frac{1}{2} =$ صفر

(لاحظ أن: $أ = 2$ ، $ب = -2$ ، $جـ = \frac{1}{2}$) .

وباستخدام المميز:-

$ب^2 - 4أجـ = (-2)^2 - 4(2)(\frac{1}{2})$

$= 4 - \frac{8}{2} = 4 - 4 =$ صفر

إذن: المعادلة لها حل حقيقي واحد هو:-

$س = \frac{-ب}{2أ} = \frac{-(-2)}{2(2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

$\boxed{س = \frac{1}{2}}$

ولو أردنا التأكد من صحة الحل، فإننا نقوم بتعويض $س = \frac{1}{2}$ في المعادلة الأصلية لنحصل على:-

$2س^2 - 2س = -\frac{1}{2}$

وعندما $س = \frac{1}{2}$:-

$2(\frac{1}{2})^2 - 2(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

$2(\frac{1}{4}) - 1 = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ ✓

* ملاحظة: لابد من كتابة المعادلة على الصورة

$$أ س^2 + ب س + جـ = صفر$$

قبل البدء بإيجاد قيم أ، ب، جـ وتطبيق القانون العام.

المتباينات الخطية بمجهول واحد:

* تعريف: المتباينة هي عبارة عن معادلة ولكن تأخذ أحد الإشارات التالية $<$ ، $>$ ، $\geq$ ، $\leq$ بدلاً من إشارة المساواة.

مثلاً: $2س + 11 > 5س - 1$ (متباينة خطية بمجهول واحد)

وكذلك $4س + 3 \leq 1$

هي أمثلة على متباينات خطية بمجهول واحد.

* وعملية حل المتباينات الخطية في المجهول س هو عبارة عن العدد س الذي يحقق طرفي المتباينة المعطاة.

ويجب ملاحظة أن إشارة المتباينة تتغير عند الضرب أو القسمة لعدد سالب، أما بقية العمليات كجمع وطرح عدد سالب أو موجب، وكذلك الضرب والقسمة لعدد موجب فتبقى كما هي دون أي تغيير والأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال ١: حل المتراجحة الخطية

٣س + ١١ ≤ ٥س − ١ .

الحل: نستخدم نفس طريقة حل المعادلات الخطية في مجهول حيث نقوم بتجميع الحدود التي تحتوي على المتغير في طرف والاعداد الحقيقية في الطرف الآخر يصبح لدينا:

٣س − ٥س ≤ −١ − ١١

−٢س ≤ −١٢

وبالقسمة على معامل س والذي يساوي −٢ نحصل على:

س ≥ ٦ (لاحظوا ان اشارة المتراجحة تغيرت عند القسمة على العدد −٢)

وبالتالي فإن مجموعة الحل هي: {س ∈ ح : س ≥ ٦} .

مثال ٢: اوجد مجموعة حل المتراجحة:

٤س + ٣ ≤ ١ ؟

الحل: ٤س ≤ ١ − ٣ (باضافة العدد −٣ للطرفين)

٤س ≤ −٢

س ≤ −٢/٤ (قسمة الطرفين على معامل س = ٤)

س ≤ −١/٢

مجموعة الحل = {س ∈ ح : س ≤ −١/٢} .

بعض من التمارين المختلفة على الباب الخامس :-

- اوجد حل كل من المعادلات التالية :-

١) -٤س - ٥ = -٦س + ٥

الحل: بتجميع الحدود التي تحتوي على المتغير س في طرف والحدود التي تحتوي على الاعداد الحقيقية في الطرف الآخر، نحصل على

-٤س + ٦س = ٥ + ٥

٢س = ١٠ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٥}$ من خلال القسمة على معامل س.

٢) ٣س - ٥ = ٢ص.

الحل: نضيف الحد ٥ للطرفين لنحصل على :-

٣س = ٢ص + ٥

بالقسمة على معامل س لكلا الطرفين :-

$\text{س} = \frac{٢\text{ص} + ٥}{٣}$.

وليس هذا الحل بالحل العام؟

(بمعنى أنه لدينا عدد لانهائي من الحلول حيث أن قيمة المتغير س تعتمد على قيمة المتغير ص).

٣) ٢س − ٣ص = ٧ —— (١) (أوجد حل المعادلتين)
٣س + ص = ٥ —— (٢)

الحل :-
١) بطريقة الحذف :-
نضرب المعادلة الثانية بالعدد ٣ فنحصل على

٢س − ٣ص = ٧
\+ ٩س + ٣ص = ١٥ مع الجمع

١١س = ٢٢ ومنه س = ٢٢/١١
س = ٢

بالتعويض في المعادلة الثانية :-
٣ × ٢ + ص = ٥ ⟸ ٦ + ص = ٥
⟸ ص = ٥ − ٦
ص = −١

٢) بطريقة التعويض :-
من المعادلة الثانية نحصل على :-
ص = ٥ − ٣س —— (٣)
نعوض المعادلة (٣) في المعادلة (١) لنحصل على :-
٢س − ٣(٥ − ٣س) = ٧
٢س − ١٥ + ٩س = ٧
١١س = ٧ + ١٥ ⟸ ١١س = ٢٢
س = ٢٢/١١ = ٢ .

بتعويض قيمة س = ٢ في المعادلة (٢) :

$$٣(٢) + \text{ص} = ٥ \Longleftarrow ٦ + \text{ص} = ٥$$

$$\text{ص} = ٥ - ٦$$

$$\boxed{\text{ص} = -١}$$

٤) $٣\text{س}^٢ + ٥\text{س} = \text{صفر}$.

الحل :- أخذ س كعامل مشترك :-

$$\text{س}\,(٣\text{س} + ٥) = \text{صفر}$$

إما $\boxed{\text{س} = \text{صفر}}$ أو $٣\text{س} + ٥ = \text{صفر}$

$$٣\text{س} = -٥$$

$$\boxed{\text{س} = \frac{-٥}{٣}}$$

٥) $٤\text{س}^٢ - ١٢\text{س} + ٩ = \text{صفر}$.

الحل: باستخدام القانون العام ، وأولاً نجد المميز :-

$$\text{ب}^٢ - ٤\text{أ}\text{جـ} = (-١٢)^٢ - ٤(٤)(٩)$$

$$= ١٤٤ - ١٤٤ = \text{صفر}$$

بما أن المميز = صفر ، إذن للمعادلة حل وحيد هو

$$\frac{-\text{ب} \mp \sqrt{\text{المميز}}}{٢\text{أ}} = \frac{+١٢ \mp \text{صفر}}{٢(٤)}$$

$$= \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$$

حل أسئلة الواجب الأول

١) $\text{لو}\,(١٠٠ \times ١٠^{-١}) = ؟$

يمكن تبسيط المقدار: $\text{لو}\,(١٠٠ \times ١٠^{-١}) = \text{لو}\,\left(\frac{١٠٠}{١٠}\right)$

$= \text{لو}\,١٠ = ١$.

أو استخدام خاصية: $\text{لو}\,(١٠٠ \times ١٠^{-١}) = \text{لو}\,١٠٠ + \text{لو}\,١٠^{-١}$

$= \text{لو}\,١٠^{٢} - \text{لو}\,١٠$

$= ٢\,\text{لو}\,١٠ - \text{لو}\,١٠$

$= ٢ - ١ = ١$

٢) $\sqrt{٢٥\,\text{س}^{-٢}\,\text{ص}^{٤}} = \sqrt{\frac{٢٥\,\text{ص}^{٤}}{\text{س}^{٢}}}$ لاحظوا أنه يجب التخلص من الأس السالب.

$= \frac{٥\,\text{ص}^{٢}}{\text{س}}$.

٣) $\text{س}^{٣} - ٥\,\text{س}^{-٢} + ٤$ (هذا مقدار جبري، ولكنه ليس كثير حدود بسبب وجود إشارة السالب عند أس الحد الثاني).
وقد تم تعريفه لاحقاً بالمقدار الكسري.

٤) $\frac{٢٥\,\text{س}^{٣} - ١٥\,\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س}}{-٥\,\text{س}}$ (وهنا مقدار جبري من ثلاث حدود ÷ مقدار جبري من حد واحد)

$\frac{٢٥\,\text{س}^{٣}}{-٥\,\text{س}} - \frac{١٥\,\text{س}^{٢}}{-٥\,\text{س}} + \frac{٥\,\text{س}}{-٥\,\text{س}}$ (التوزيع كل حد من حدود البسط ÷ المقام).

$-٥\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ١$

٥) $(\text{١٠٠} \times \text{٥})^{\text{صفر}}$ (أي عدد ثابت مرفوع للأس صفر وإجابته يساوي ١ .

$= 1$

٦) $\text{لو}_{\text{س}}\ \text{١٠٠} = \text{٢}$ باستخدام العلاقة بين اللوغاريتمات والأسس، نجد أن :

$\text{س}^{\text{٢}} = \text{١٠٠}$

$\text{س}^{\text{٢}} = \text{١٠}^{\text{٢}}$ (الأس متساوي فإن الأساس يجب أن يتساوى) .

$\boxed{\text{س} = \text{١٠}}$

٧) ش = {٢، ٣، ...، ١٠} .

م = {س | س : س عدد أولي} = {٢، ٣، ٥، ٧} ⇐ من ش

م' = {٤، ٦، ٨، ٩، ١٠} ⇐ أعداد غير أولية

٨) $\dfrac{\text{س}^{\text{٢}}\,\text{ص}^{\text{٣}}}{\text{س}^{-\text{١}}\,\text{ص}^{\text{٣}}} = \dfrac{\text{س}^{\text{٢}}\,\text{س}\,\text{ص}^{\text{٣}}}{\text{ص}^{\text{٣}}} = \text{س}^{\text{٣}}$.

٩) $(\text{٢} + \text{٣} \times -\text{٣})^{\text{٢}} = (\text{٢} + -\text{٩})^{\text{٢}} = (-\text{٧})^{\text{٢}} = \text{٤٩}$

١٠) $(\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٥ص}^{\text{٣}} - \text{٢ع}^{\text{٤}}) + (-\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٤ص}^{\text{٣}} + \text{٢ع}^{\text{٤}})$

نجمع الحدود المتشابهة بالطريقة العمودية :

$\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٥ص}^{\text{٣}} - \text{٢ع}^{\text{٤}}$

$+\ -\text{٣س}^{\text{٢}} + \text{٤ص}^{\text{٣}} + \text{٢ع}^{\text{٤}}$

$\text{صفر} - \text{ص}^{\text{٣}} + \text{صفر}$