

اسم المقرر

مبادئ الرياضيات (١)

د. أسامة حنفي محمود

الأستاذ المشارك بقسم الأساليب الكمية



جامعة الملك فيصل

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

محاضرة ١٤

المحددات والمصفوفات



أولاً- المحددات

المحدد من الرتبة الثانية يكون على الصورة التالية

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ويمكن الحصول على قيمة المحدد

$$= (a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$$



مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (5 \times 8) - (3 \times 7) \\ &= 40 - 21 = 19 \end{aligned}$$

الحل:

= قيمة المحدد



مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد =

$$= (-3 \times 4) - (-1 \times 6)$$

$$= -12 + 6 = -6$$



مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -12 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد

$$= (-12 \times -2) - (4 \times -3)$$

$$= 24 + 12 = 36$$



استخدام المحددات في حل المعادلات

باستخدام المحددات حل المعادلات التالية :

$$5x + 2y = 19$$

$$4x - y = 10$$

الحل : حتى يمكن إيجاد قيمتي x , y كلاً من x , y يتم حساب

Δ , Δ_x , Δ_y كما يلي :

Δ ويحتوى على معاملات x , y



$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (5 \times -1) - (2 \times 4) \\ = -5 - 8 = -13$$

Δ_x ويتم أستبدال معاملات x بقيم النواتج كما يلي:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = (19 \times -1) - (2 \times 10) \\ = -19 - 20 = -39$$



Δ_y ويتم أستبدال معاملات y بقيم النواتج كما يلي:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = (5 \times 10) - (19 \times 4) \\ = 50 - 76 = -26$$

وبالتالي يمكن الحصول على قيمة x, y كما يلي :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-39}{-13} = 3$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2$$



استخدام المحددات في حل المعادلات

باستخدام المحددات حل المعادلات التالية :

$$7x + 3y = 2$$

$$4x - 2y = -10$$

الحل : حتى يمكن إيجاد قيمتي x , y من x , y يتم حساب

Δ , Δ_x , Δ_y كما يلي :

Δ ويحتوى على معاملات x , y



$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (7 \times -2) - (3 \times 4) \\ = -14 - 12 = -26$$

Δ_x ويتم أستبدال معاملات x بقيم النواتج كما يلي:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = (2 \times -2) - (3 \times -10) \\ = -4 + 30 = 26$$



Δ_y ويتم أستبدال معاملات y بقيم النواتج كما يلي:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = (7 \times -10) - (2 \times 4) \\ = -70 - 8 = -78$$

وبالتالي يمكن الحصول على قيمة x, y كما يلي :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{26}{-26} = -1 \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-78}{-26} = 3$$



المحددات من الرتبة الثالثة

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{مثال أوجد قيمة المحدد}$$

حتى يمكن إيجاد قيمة هذا المحدد يتم استخدام عناصر الصف الأول
كما يلي: قيمة المحدد =

$$\begin{aligned} &= 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 2(36 - 8) + 5(54 + 3) + 7(48 + 12) \\ &= 2(28) + 5(57) + 7(60) \\ &= 56 + 285 + 420 = 761 \end{aligned}$$



ثانياً- المصفوفات

يتم التركيز على العمليات الجبرية للمصفوفات كما يلي :
إذا كان

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

1 - g^{-1}, h^{-1}

2 - $g + h$

3 - $2g + h$

4 - gh

5 - gg^{-1}

أوجد



الحل: يمكن الحصول على g^{-1}, h^{-1} بتبديل الصفوف لأعمدة والأعمدة إلى صفوف كما يلي:

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$h^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$$



٢- $g + h$ يتم جمع كل رقم مع الموجود في نفس مكانه من المصفوفة الأخرى كما يلي

$$g + h = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$$



الحل:

٣- $2g + h$ يتم ضرب كل عنصر في $2 \times g$ ثم جمع الناتج مع الموجود في نفس مكانه من المصفوفة h كما يلي

$$2g + h = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ -1 & 24 \end{bmatrix}$$



ضرب المصفوفات

٤- gh يتم ضرب عناصر الصفوف في المصفوفة g x عناصر أعمدة المصفوفة h ثم جمع الناتج كما يلي

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$gh = \begin{bmatrix} 5 \times 3 + 7 \times 7 & 5 \times -1 + 7 \times 12 \\ -4 \times 3 + 6 \times 7 & -4 \times -1 + 6 \times 12 \end{bmatrix}$$

$$gh = \begin{bmatrix} 64 & 79 \\ 30 & 76 \end{bmatrix}$$



مقلوب المصفوفة

٥- يرمز إلى مقلبو بالمصفوفة ك ب g^{-1} حيث أن
مقلوب المصفوفة = $\frac{1}{\Delta_g}$ x مصفوفة المرافقات المبدلة
المحدد

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_g = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = (5 \times 6) - (7 \times -4) \\ = 58$$



ويمكن الحصول على مصفوفة المرافقات المبدلة :
تبديل أماكن عناصر القطر الرئيسي
تبديل إشارات عناصر القطر الأخر

$$\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \text{مصفوفة المرافقات المبدلة}$$

$$g^{-1} = \frac{1}{58} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

مقلوب المصفوفة



وفى النهاية أتمنى للجميع كل التوفيق والنجاح أن شاء الله
وأخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين

د. أسامة حنفي محمود





مَشَقَّةٌ
بِحَمْدِ اللَّهِ

