الباب التاسع

مبادئ الاحتمالات

مقدمة:

تلعب الاحتمالات دوراً هاماً في حياتنا اليومية، لأننا نستخدمها في قياس عدم التأكد والاحتمالات أحد فروع الرياضيات الذي يهتم بدراسة التجارب العشوائية، وتسمى التجربة عشوائية إذا كانت نتائجها غير مؤكدة، أي لا نستطيع التنبؤ بها مسبقاً.

وتنقسم نتائج التجارب من وجهة نظر الاحتمالات إلى ثلاث أنواع هي:

أ- نتائج أو حوادث مؤكدة:

وهي نتائج أو حوادث لابد من وقوعها أو حدوثها.

فمثلاً:

إذا ألقيت تفاحة في الهواء، فإنها لابد وتسقط على الأرض.

وإذا كانت الحادثة مؤكدة الوقوع فإن احتمال وقوعها = 1

ب- نتائج أو حوادث مستحيلة:

وهي نتائج أو حوادث يستحيل وقوعها أو حدوثها.

فمثلاً:

سحب كرة حمراء من صندوق لا يحتوي إلا على كرات بيضاء

وإذا كانت الحادثة مستحيلة الوقوع فإن احتمال وقوعها = صفر

ج – نتائج أو حوادث محتملة (ممكنة / غير مؤكدة).

وهي نتائج التجارب العشوائية التي لا نستطيع التنبؤ بوقوعها مسبقاً، ولكننا نستطيع باستخدام تعريف الاحتمالات أن نحسب احتمال وقوعها.

وإذا كانت الحادثة محتملة فإن احتمال وقوعها ينحصر بين **صفر & 1**

تعريف الاحتمال:

إذا كان لدينا تجربة ما تقع بطرق عددها (n) طريقة وكان من بينها حدث معين (A) مثلاً، يقع بطرق عددها (X) طريقة [$n \geq X$]. فإن احتمال وقوع الحدث (A) ويرمز له بالرمز P(X) هو:

$$P(X)=\frac{X}{n}=\frac{\text{عدد مرات ظهور الحدث } (X)}{\text{عدد الحالات الكلية } (n)}$$

مبادئ الاحتمالات:

١) قاعدة أو   ٢) قاعدة و

١) قاعدة (أو) ⟵ اتحاد U

(قاعدة الجمع للحالات المانعة والغير مانعة)

زيد أو عبيد

A U B

مانــع	غير مانع
عندما لا يوجد تكرار (تقاطع) بين الحادثتين A و B أو $P(A \cup B) = P(A) + p(B)$	عندما يوجد تكرار بين الحادثتين A و B تقاطع أو $P(A \cup B) = P(A) + p(B) - P(A \cap B)$

مثال رقم (١ – ٨):

إذا ألقيت زهرة نرد مرة واحدة ، فما احتمال ظهور عدد فردي أو عدد أكبر من 5

A   B

حل مثال رقم (١ – ٨):

احتمال إلقاء النرد { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } 6 محاولات

A عدد فردي { 1 ، 3 ، 5 } 3 احتمالات

أو

B عدد أكبر من 5 { 6 } احتمال واحد فقط

لا يوجد تكرار مانع

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

مثال رقم (٢ – ٨):

إذا سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب، فما احتمال أن تكون الورقة المسحوبة عليها صورة البنت أو صورة الولد ؟

حل مثال رقم (٢ – ٨):

ورقة اللعب 52 ورقة

A صورة البنت (4) احتمالات

أو

B صورة الولد (4) احتمالات

لا تكرار

مانع

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52}$$

مثال رقم (٣ – ٨):

إذا ألقيت زهرة نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد فردي أو عدد يقبل القسمة على (3) هو ؟

حل مثال رقم (٣ – ٨):

احتمال إلقاء النرد { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } 6 محاولات

A عدد فردي { 1 ، 3 ، 5 } 3 احتمالات

أو

B عدد أكبر من 5 {3 ، 6} احتمالين

يوجد تكرار $\frac{1}{6}$

غير مانع

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{n} = \frac{4}{6}$$

مثال رقم (٤ – ٨):

إذا ألقيت زهرة نرد، ما احتمال:

١) ظهور عدد زوجي؟

٢) ظهور عدد أكبر من (2)؟

٣) ظهور عدد زوجي أو عدد اكبر من (2)؟

حل مثال رقم (٤ – ٨):

احتمال إلقاء النرد { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 } 6 محاولات

١) ظهور عدد زوجي:

{ 2 ، 4 ، 6 } 3 احتمالات $= \frac{3}{6}$

٢) ظهور عدد أكبر من (2):

{ 3 ، 4 ، 5 ، 6 } 4 احتمالات $= \frac{4}{6}$

٣) ظهور عدد زوجي أو عدد أكبر من (2):

A عدد زوجي { 2 ، 4 ، 3 } 3 احتمالات

أو

B عدد أكبر من 2 {3 ، 4 ، 5 ، 6 } 4 احتمالات

يوجد تكرار
غير مانع $\frac{2}{6}$

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

مثال رقم (٥ – ٨):

إذا ألقيت عملة معدنية مرة واحدة ، فما هو احتمال ظهور الصورة أو كتابة؟

ظهور الصورة $= \frac{1}{2}$

ظهور الكتابة $= \frac{1}{2}$

ظهور صورة أو كتابة $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

٢) قاعدة (و) ⟵ تقاطع ∩
قاعدة الضرب للاحتمالات المستقلة والغير مستقلة

تتميز باللفظ (و) (∩) والقاعدة الضرب

مستقلة غير مستقلة

أولاً: قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

يقال أن الحدثان A و B حدثان مستقلان إذا كان وقوع الحدث الأول لا يؤثر على وقوع الحدث الثاني.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

مثال رقم (٦ – ٨):
ما احتمال ظهور الصورة والكتابة في رميتين لعملة معدنية ؟

حل مثال رقم (٦ – ٨):
رمية أولى صورة A
لا تتأثر و مستقلان
رمية ثانية كتابة B

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مثال رقم (٧ – ٨):
ما احتمال ظهور واحد و واحد و واحد في ثلاث رميات لنرد ؟

حل مثال رقم (٧ – ٨): ضرب
I في الأولى
II في الثانية
III في الثالثة

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

ملاحظة: في حالة أعطي في المثال نسبتين: أي نسبة تمثل حادثة، ونسبة تمثل حادثة أخرى، فعليك أن تعرف أن هذه الأحداث مستقلة.

- لو طلب الاثنين، كلاهما، (و): أي أن تعوض الأول × الثاني.
- لو طلب ايهما أو أحدهما على الأقل: الناتج يكون {1 - الأول × الثاني}.

نجاح أحدهما على الأقل : 1 – فشل الأول × فشل الثاني
فشل أحدهما على الأقل : 1 – نجاح الأول × نجاح الثاني

مثال رقم (٨ – ٨):
إذا كان احتمال نجاح الطالب في مادة الاحصاء هو 0.8 ، وكان احتمال نجاح الطالب في مادة المحاسبة هو 0.7 ، اخذت أحدى الحادثتين فاحسب احتمال :
١) نجاح الطالب في المادتين ؟
٢) فشل الطالب في المادتين ؟
٣) نجاح الطالب في إحدى المادتين على الأقل ؟
٤) فشل الطالب في إحدى المادتين على الأقل ؟

حل مثال رقم (٨ – ٨):

إحصاء	محاسبة
نجاح 0.8	نجاح 0.7
فشل 0.2	فشل 0.3

١) نجاح الطالب في المادتين :

$= 0.8 \times 0.7 = 0.56$

٢) فشل الطالب في المادتين :

$= 0.2 \times 0.3 = 0.06$

٣) نجاح الطالب في إحدى المادتين على الأقل :

1 – (فشل الأول × فشل الثاني)

$1- (0.2 \times 0.3)$

$1 – 0.06 = 0.94$

٤) فشل الطالب في إحدى المادتين على الأقل :

1 – (نجاح الأول × نجاح الثاني)

$1- (0.8 \times 0.7)$

$1 – 0.56 = 0.44$

ثانياً : قاعدة الضرب للاحتمالات الغير مستقلة:

يقال أن الحدثان A و B حدثان غير مستقلان ، إذا كان وقوع الحدث الأول يؤثر في وقوع الحدث الثاني.

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B / A)$$

مؤثر

و

احتمال شرط

يعني وقوع B بشرط وقوع A أولاً

مثال رقم (٩ – ٨):

صندوق به خمسة كرات منها 4 بيضاء و 6 حمراء، إذا سحبت كرتان ما احتمال:

١) أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء، بدون إرجاع ؟
٢) أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء، مع الإرجاع ؟
٣) أن تكون الكرتان من نفس اللون، بدون إرجاع ؟
٤) أن تكون الكرتان من نفس اللون، مع الإرجاع ؟

حل مثال رقم (٩ – ٨):

١) كرتان بيضاء وحمراء ، بدون إرجاع:

$$\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{24}{90}$$

٢) كرتان بيضاء وحمراء، مع الإرجاع:

$$\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{24}{100}$$

٣) كرتان من نفس اللون، بدون إرجاع:

الثانية حمراء و الأولى حمراء أو الثانية بيضاء و الأولى بيضاء

$$\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{6}{10}=\frac{5}{9}$$

$$\frac{12}{90}+\frac{30}{90}=\frac{42}{90}$$

٤) كرتان من نفس اللون، مع إرجاع:

الثانية حمراء و الأولى حمراء أو الثانية بيضاء و الأولى بيضاء

$$\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}+\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}$$

$$=\frac{16}{100}+\frac{36}{100}=\frac{52}{100}$$

الباب العاشر
التوزيعات الاحتمالية

١- المتغير العشوائي:
يرافق نتائج التجربة العشوائية مقدار يسمى "المتغير العشوائي" وهذا المقدار يأخذ قيماً مختلفة حسب نتيجة التجربة العشوائية.

فمثلاً:
عند إلقاء زهرة طاولة (نرد) مرة واحدة، التجربة هنا عشوائية، ناتج التجربة هي الأرقام التي تظهر على السطح العلوي للزهرة.

المقدار: الذي يرافق نتائج هذه التجربة والذي يسمى المتغير العشوائي، ويرمز له بالرمز (X)
يمكن أن يكون: 1، 2 ، 3 ، .... ، 6
أي أن س يمكن أن تأخذ: 1، 2 ، 3 ، .... ، 6

(أ) المتغير العشوائي المنفصل:
يقال أن المتغير العشوائي "س" منفصلاً إذا كان يأخذ قيماً صحيحة فقط تنتمي إلى مجموعة محدودة أو معدودة.
مثل:
عدد أفراد الأسرة ، متغير منفصل لأنه يأخذ القيم : 1،2،3

(ب) المتغير العشوائي المستمر:
يقال أن المتغير العشوائي "س" مستمراً إذا كان يأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية في مدى تغيره، أو كان ينتمي إلى مجموعة غير محدودة أو معدودة.
مثل:
طول الطالب متغير مستمر لأنه يمكن أن يأخذ قيم صحيحة وكذلك قيم كسرية.

٢- التوزيع الاحتمالي
التوزيع الاحتمالي المنفصل:
يكون فقط في حالة الأحداث المستقلة والغير مستقلة.

إذا كانت (X) متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم

X_1 ، X_2 ، .... ، X_n

$P(X_1)$, $P(X_2)$ …….. $P(X_n)$

الباب الحادي عشر
بعض التوزيعات الاحتمالية

حالة الأحداث المستقلة:

أولاً: توزيع ذي الحدين:

إذا كان لدينا تجربة تتكرر (n) مرة ، وكان احتمال ظهور حدث ما مرة واحدة هو (P) واحتمال عدم ظهور الحدث مرة واحدة هو (q) [بشرط أن $P + q = 1$]

فان احتمال ظهور الحدث (X) مرة من بين الـ (n) مرة، يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$P (X) = {}^{n}C_{x} \; . P^{x} \; . q^{n-x}$$

$X = 0 \; , \; 1 \; , \; 2 \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; n$

وحتى يكون هذا التوزيع احتمالياً لابد أن يكون:

$$P (X) = {}^{n}C_{x} \; . P^{x} \; . q^{n-x} \quad = \; 1$$

ويلاحظ أن هذا التوزيع منفصل ، يستخدم في حالة الأحداث المستقلة ويتوقف على قيمة الاحتمال (P) .

خصائص التوزيع:

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي

$\mu = n \times p$ ميو

٢) التباين $\sigma^{2} = n \, . \, p \, . \, q$ سيجما تربيع

٣) الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{n \, .p \, .q}$ سيجما

وهذه الخصائص يمكن إيجادها مباشرة من المسألة، حتى قبل حساب التوزيع الاحتمالي.

ما هو احتمال في وجود نسبة و عدد:

شرح النظرية (بطريقة مبسطة)

أ) النسبة:

أبيض أو أسود

أبيض + أسود = **1** = **100%**

أبيض	أسود
20%	80%

ذكور	إناث
30%	70%

متزوج	أعزب
40%	60%

النسبة

نسبة مطلوبة **P**

نسبة غير مطلوبة **q**

ب) العدد :

عدد محاولات دراسة الظاهرة (n)

الاحتمالات الوارد حدوثها $X = 0 \, , \, 1 \, , \, 2 \, , \, \ldots\ldots\ldots n$

فانه يتبع ذات الحدين بالمعادلة (القانون) :

نسبة (احتمال)

$$\mathbf{P(X) = {}^{n}C_{x} \; . P^{n} \; . q^{n-x}}$$

حيث:

n هي عدد ممارسات دراسة الظاهرة.
X هي الاحتمالات الوارد حدوثها.
P هي النسبة المطلوب دراستها.
q هي النسبة الغير مطلوب دراستها.
C التوافيق.

بشطر أن:

١) أي احتمال $P(X) \geq 0$

٢) مجموع الاحتمالات $\sum P(X) = 1$

$$0 \leq P(X) \leq 1$$

أهم شيء على الإطلاق

طريقة تحديد القيمة العددية للاحتمال المطلوب (X)

مثال رقم (١ – ١٠):

لو أن عدد الاحتمالات $n = 7$

الاحتمالات الوارد حدوثها $X = 0 , 1 , 2, 3, 4 , 5 , 6 , 7$

١) التوزيع الاحتمالي :

$P(x =0), p(x =1), p(x =2), p(x =3), p(x =4), p(x =5), p(x =6), p(x =7) = 1$

٢) الجميع :

$p (x = n) \longrightarrow P(x = 7)$

٣) بالضبط (3) منهم:

$p (x = 3)$

٤) أقل من (2):

$p (x < 2) = p (x = 0) + p (x = 1)$

٥) أكبر من (5):

$P (x > 5) = p (x = 6) + p (x = 7)$

٦) على الأكثر (2): (أي أقل أو يساوي 2)

$P (x \le 2) = P (x = 0) + p (x = 1) + p (x = 2)$

٧) على الأقل (2): (أي أكثر أو تساوي 2)

$P(x \ge 2) = p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) + p(x=6) + p(x=7)$

ملاحظة: عندما يكون المطلوب كبير كما هو في المثال رقم (7) أعلاه، نستخدم قاعدة

المجموع – [البيان السهل]

$$\mathbf{1 - [p(x = 0) + p(x = 1)]}$$

مثال رقم (٢ – ١٠):
إذا كانت نسبة الطلاب المتزوجين (20%)، أخذت عينة من (3) طلاب فاحسب احتمال:

١) أن يكون جميع الطلاب عزاب ؟
٢) احتمال وجود (2) من الطلاب عزاب ؟
٣) احتمال وجود طالب واحد على الأكثر من المتزوجين ؟
٤) احتمال وجود طالب واحد على الأقل من المتزوجين ؟
٥) متوسط التوزيع التباين والانحراف المعياري لعدد الطلاب المتزوجين ؟

حل مثال رقم (٢ – ١٠):

النسبة

متزوج ← 0.2 = 20% ، P

عازب ← 0.8 = 80% ، q

العدد $n = 3$

الاحتمالات الوارد حدوثها $X = 0 , 1 , 2 , 3$

المعادلة:

$$\mathbf{P (X) = {}^{n}C_{x} \; .P^{x} \; .q^{n\_x}}$$

$$P (X) = {}^{3}C_{x} \; (0.8)^{x} \, (0.2)^{3-x}$$

١) احتمال جميع الطلاب عزاب:

$$P (X= 3) = {}^{3}C_{3} \; (0.8)^{3} \; (0.2)^{0}$$

$$= 0,512$$

٢) احتمال وجود (2) طلاب من العزاب :

$$P (X= 2) = {}^{3}C_{2} \; (0.8)^{2} \; (0.2)^{1}$$

$$= 0,384$$

٣) احتمال وجود طالب واحد على الأكثر من المتزوجين :

$$P(X) = {}^3C_x \ (0.2)^x \ (0.8)^{3-x}$$

$$P(X \le 1) = p(x=0) + p(x=1)$$

$$= {}^3C_0 \ (0.2)^0 (0.8)^3 + {}^3C_1 \ (0.2)^1 \ (0.8)^2$$

$$= 0{,}512 + 0.384$$

$$= 0.896$$

٤) احتمال وجود طالب واحد على الأقل من المتزوجين :

$$P(X \ge 1) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3)$$

$$= 1 - p(X=0)$$

$$= 1 - 0.512$$

$$= 0.488$$

ملاحظة : في هذه الحالة ، وبما أن لدينا ناتج $P(X=0)$ ، نستخدم قاعدة:

[البيان السهل] – المجموع

$$\mathbf{1 - [\, p(x=0) \,]}$$

٥) متوسط التوزيع، والتباين، والانحراف المعياري للمتزوجين:

ميو $\mu = n \times p$

$$= 3(0.2) = 0.6$$

سيجما تربيع $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$

$$= 3(0.2)(0.8) = 0.48$$

سيجما $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

$$= \sqrt{3(.02)(0.8)}$$

$$= 0.69$$

مثال رقم (٣ – ١٠):

إذا كانت نسبة الوحدات الفاخرة في إنتاج أحد المصانع هي $\frac{3}{5}$ ، اختيرت عينة من (4) وحدات، فاحسب احتمال :

١) عدم وجود أي وحدات من النوع الفاخر؟
٢) وجود وحدة واحدة من النوع الفاخر ؟
٣) وجود وحدة واحدة على الأكثر من النوع الفاخر ؟
٤) أن تكون جميع الوحدات من النوع المعيب ؟
٥) متوسط التوزيع والانحراف المعياري لعدد الوحدات الفاخرة ؟

حل مثال رقم (٣ – ١٠):

ما هو احتمال في وجود نسبة وعدد ← ذات الحدين.

النسبة

$\frac{3}{5}$ فاخر 0.6 P — معيب 0.4 q

العدد $n = 4$

الاحتمالات الوارد حدوثها $X = 0 , 1 , 2 , 3 , 4$

المعادلة :

$$P (X) = {}^{n}C_{x} \; .P^{x} \; .q^{n-x}$$

$$P (X) = {}^{4}C_{x} \; (0.6)^{x} \, (0.4)^{4-x}$$

١) احتمال عدم وجود أي وحدات فاخرة :

$$P (X= 0) = {}^{4}C_{0} \; (0.6)^{0} \; (0.4)^{4}$$

$$= 0,0256$$

ملاحظة: طريقة إيجاد المعادلة بالآلة الحاسبة:

اتبع الخطوات التالية:

^{y}x	0.4	×	^{y}x	0.6	×	0	nCr	4
أو			أو					
^			^					

٢) احتمال وجود وحدة واحدة فاخرة:

$$P\,(X=1) = {}^{4}C_{1}\ (0.6)^{1}\ (0.4)^{3}$$

$$= 0{,}1536$$

٣) احتمال وجود واحدة على الأكثر فاخرة:

$$P\,(X \leq 1) = p\,(x=0) + p\,(x=1)$$

$$= 0{,}0256 + 0.1536$$

$$= 0.1792$$

٤) احتمال وجود جميع الوحدات من النوع المعيب:

$$P\,(X) = {}^{4}C_{x}\ (0.4)^{x}\ (0.6)^{4-x}$$

$$P\,(X=0) = {}^{4}C_{0}\ (0.4)^{4}\ (0.6)^{0}$$

$$= 0{,}0256$$

٥) متوسط التوزيع ، والانحراف المعياري للمتزوجين:

ميو $\mu = n \times p$

$$= 4\,(0.6) = 2.4$$

سيجما $\sigma = \sqrt{n\ .p\ .q}$

$$= \sqrt{2.4 \times 0.4}$$

$$= 0.98$$

ثانياً: توزيع بواسون / ما هو احتمال في وجود:

أما معدل في وحدة الزمن ← توزيع بواسون
أو يطلب في المسألة، معدل يتبع توزيع بواسون

يسمى المعدل (λ) لمدا

والاحتمالات الممكنة $X = 0 , 1 , 2 , 3 \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{X\,!}$$

حيث :

X هي العدد الاحتمالي المطلوب

! مضروب العدد، مثال:

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$3! = 3 \times 2 \times 1$
$2! = 2 \times 1$
$1! = 1$
$0! = 1$

(عدد)$^{\text{صفر}}$ $= 1$

كيفية إيجاد (**!**) الضرب بالآلة:

5	SHIFT	x^{-1}	=	120

$e^{-\lambda}$ تعني e^{-2} e^{-3} e^{-4} حسب المعطى من المسألة،
$= 0.018$ ، 0.4978 ، 0.135

وبالآلة:

SHIFT	in	(-)	2	=

خصائص توزيع بوسون

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي $\mu = \lambda$

٢) التباين $\sigma^2 = \lambda$

٣) الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\lambda}$

مثال رقم (٤ – ١٠):

إذا كانت الحوادث الشهرية التي حدثت على إحدى الطرق السريعة تتبع توزيع بواسون بمعدل حادثين (2) ، فاحسب احتمال :

١) عدم حدوث أي حادثة ؟
٢) حدوث حادثتين (2) ؟
٣) حدوث حادث واحد على الأكثر ؟
٤) حدوث حادث واحد على الأقل ؟
٥) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري ؟

علماً بأن $e^{-2} = 0.135$ ، $e^{-3} = 0.25$

حل مثال رقم (٤ – ١٠):

$\lambda = 2 \quad , \quad X = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 \ldots\ldots \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^{x} . e^{-2}}{X!} = \frac{2^{x} . e^{-2}}{X!} = \frac{2^{2}(0.135)}{X!}$$

X هي عدد الحوادث

١) عدم وجود أي حادث:

$$P(x = 0) = \frac{2^{0}(0.135)}{0!} = 0.135$$

٢) حدوث حادثتين (2) :

$$P(x = 2) = \frac{2^{2}(0.135)}{2!} = 0.135$$

٣) حدوث حادثة واحدة على الأكثر:

$P(x \le 1) = p(0) + p(1)$

$$= 0.135 + \frac{2^{1}.(0.135)}{1!}$$

$$= 0.135 + 0.27 = 0.405$$

٤) حادثة واحدة على الأقل : (واحد فأكثر) :

$P(x \geq 1) = p(1) + p(2) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \infty$

مستحيل

$1 - p(0)$

$= 1 - 0.135 = 0.865$

٥) حدوث أكثر من حادثة :

$P(x > 1) = p(2) + p(3) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \infty$

مستحيل

$1 - [\ 0.135 + 0.27\ ]$

$= 1 - 0.405 = 0.595$

٦) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري :

$\mu = \lambda = 2$

التباين $\sigma^2 = \lambda = 2$

الانحراف $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{2} = 1.41$

مثال رقم (٥ – ١٠):

إذا كانت الزلازل تقع في دول جنوب شرق أسيا بمعدل زلزال واحد كل سنة ، فاحسب احتمال :

١) عدم حدوث أي زلزال ؟
٢) حدوث زلزالين على الأقل ؟
٣) حدوث زلزال واحد على الأكثر ؟
٤) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري خلال سنتين ؟

علماً بأن $e^{-1} = 0.368$

حل مثال رقم (٥ – ١٠):

$\lambda = 1 \quad , \quad X = 0, 1, 2, 3, 4 \dots\dots\dots \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^x . e^{-2}}{X!} = \frac{1^x . e^{-2}}{X!} = \frac{1^x (0.368)}{X!}$$

X هي عدد الزلازل

١) عدم حدوث أي زلزال:

$$P(x=0)=\frac{1^0(0.368)}{0!}=0.368$$

٢) حدوث زلزالين على الأقل : (أثنين فأكثر):

$$P(x\geq 2)=p(2)+ \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$$

مستحيل

$$1-p(0)+p(1)$$

$$1-[0.368+\frac{1^0.(0.368)}{0!}]=$$

$$1-[0.368+0.368]$$

$$1-0.736=0.264$$

٣) حدوث زلزال واحد على الأكثر:

$$P(x\leq 1)=p(0)+p(1)$$

$$0.368+0.368=0.736$$

٤) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري خلال سنتين:

بما أن : كل سنة : $\mu=\lambda=1$

إذاً : كل سنتين : $\mu=\lambda=2$

التباين $\sigma^2=\lambda=2$

الانحراف $\sigma=\sqrt{\lambda}=\sqrt{2}=1.41$

مثال رقم (٦ – ١٠):

إذا كـان معدل وصـول البـواخر إلـى ميناء جدة يتبـع توزيـع بواسـون بمعـدل (3)، بواخر، فاحسب احتمال :

١) عدم وصول أي باخرة ؟
٢) حدوث حادث واحد على الأكثر ؟
٣) حدوث حادث واحد على الأقل ؟
٤) حدوث أكثر من حادثة ؟
٥) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري ؟

علماً بأن $0.135 = e^{-2}$ ، $0.05 = e^{-3}$ ، $0.018 = e^{-4}$

حل مثال رقم (٦ – ١٠):

$\lambda = 3 \quad , \quad X = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots \infty$

$$P(x) = \frac{\lambda^x . e^{-2}}{X\,!} = \frac{3^x . e^{-3}}{X\,!} = \frac{3^x\,(0.05)}{X\,!}$$

X هي عدد الحوادث

١) عدم وجود أي حادث:

$$P(x = 0) = \frac{3^0\,(0.05)}{0\,!} = 0.05$$

٢) حدوث حادثة واحدة على الأكثر:

$P(x \le 1) = p(0) + p(1)$

$$= 0.05 + \frac{3^1\,(0.05)}{1\,!}$$

$= 0.05 + 0.15 = 0.20$

٣) حادثة واحدة على الأقل : (واحد فأكثر):

$P(x \ge 1) = p(1) + p(2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$

مستحيل

$1 - p(0)$

$= 1 - 0.05 = 0.95$

٤) حدوث أكثر من حادثة :

$P(x > 1) = p(2) + p(3) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \infty$

مستحيل

$1 - [\ 0.05\ +\ 0.15\ ]$

$= 1 - 0.2 = 0.8$

٥) متوسط التوزيع والتباين والانحراف المعياري:

$\mu = \lambda = 3$

التباين $\sigma^2 = \lambda = 3$

الانحراف $\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{3} = 1.73$

مثال رقم (٧ – ١٠):

إذا علمت أن $e^{-4} = 0.018$ و x متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون:

١) فإن متوسط التوزيع μ ؟

A 0	**B** 4	C 3	D 2

٢) التباين التوزيع ي σ^2 ؟

A 4	B - 4	C 1.67	D 0.018

٣) الانحراف المعياري ؟

A 2	B 4	C -4	D 0.018

٤) احتمال عدم حدوث أي حادث بالنسبة x ؟

A 0.018	B 2	C -4	D 13.5

حل مثال رقم (٧ – ١٠):

$\boxed{\lambda}$

$e^{-4} = 0.018$

$\lambda = 4$

$e^{-\lambda}$

$$\frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{X\ !}$$

$$= \frac{4^0 \times (0.018)}{0!} = 0.018$$

$\mu = \lambda = 4$

$\sigma^2 = \lambda = 4$

$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4}$

التوزيع الاحتمالي المتصل:

عند دراستنا للتوزيع الاحتمالي المنفصل، ذكرنا أن المتغير العشوائي المنفصل (X) يأخذ قيم صحيحة فقط، وأن هناك احتمالاً يرافق كل قيمة من قيم المتغير (X).

أما في حالة المتغير العشوائي المتصل، فإن (X) تأخذ جميع القيم الصحيحة والكسرية من مدى التغير.

فمثلاً:

X = (صفر ، 1) نجد أن (x) تأخذ عدد لا نهائي من القيم حيث (x) يمكن أن = 0, ….,1 ……,2……,3……9

- ما هو احتمال في وجود توزيع طبيعي ؟
- في وجود المعالم التالية ، متوسط التوزيع (μ) والانحراف المعياري (σ) ؟

[أوزان – أطوال – درجات – أعمار – مسافات .... الخ]

الاحتمال المطلوب

x

بالتحويل من رقم طبيعي لا نستطيع قياس مساحته (x) إلى رقم جديد قياسي (Z).

وهذا المتغير المستمر يمثل بيانياً بمنحنى :

وأن المساحة أسفل هذا المنحنى = 1

أي أن المساحة أسفل المنحنى = مجموع الاحتمالات للمتغير (X) = 1

ثالثاً: التوزيع الطبيعي (المعتدل):

مقدمة:

هو توزيع مستمر يأخذ شكل منحنى متماثل ذو قيمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لا نهاية.

وقد وجد أن معظم التوزيعات مثل الأطوال – الأعمار ... الخ، تأخذ شكلاً قريباً من المنحنى الطبيعي.

ملاحظة: ولصعوبة حل المسائل الإحصائية بطريقة التوزيع الطبيعي العادي (المعتدل)، لن يقرر في المنهج الحل بهذه الطريقة، بل باستخدام طريقة أبسط، وأكثر سهولة، وهي "طريقة التوزيع الطبيعي القياسي".

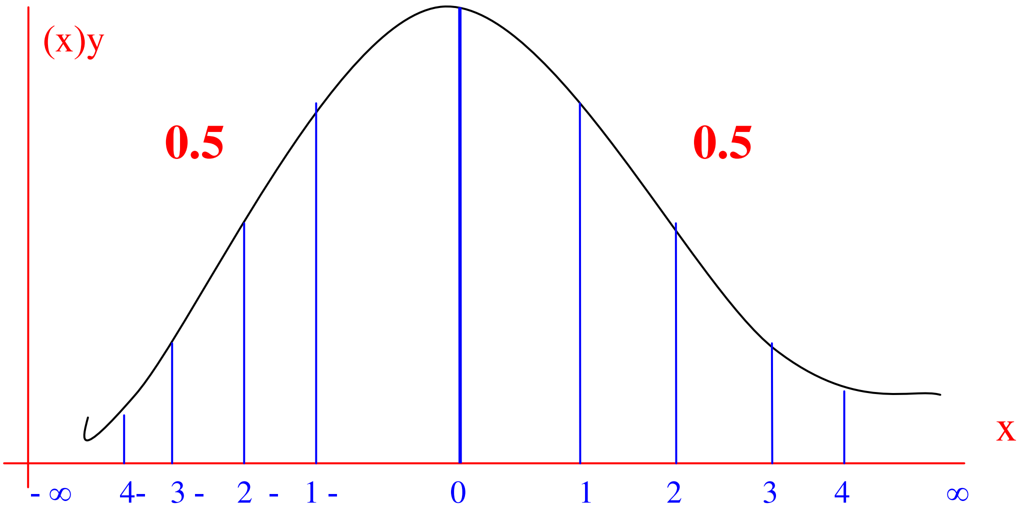
التوزيع الطبيعي القياسي:

بالتحويل من رقم طبيعي لا نستطيع قياس مساحته (x) إلى رقم جديد قياسي (Z).

البداية

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \pm 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

بالتحويل من رقم طبيعي لا نستطيع قياس مساحته (x) إلى رقم جديد قياسي (Z).



الشكل للتوزيع الطبيعي (القياسي)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \pm 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

البداية

أولاً / نترجم القياس إلى مساحة من الجدول.

طريقة تحديد المساحة الاحتمالية المطلوب تحديدها :

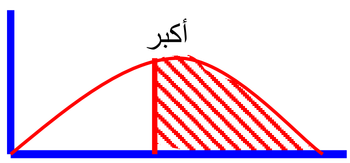
أولاً / بناءاً على الإشارات والاتجاه :

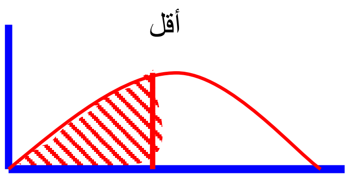
+	يمين	أكبر من	يمين
-	يسار	أقل من	يسار

أ) إذا كان هناك قيمة واحدة لـ (Z):

أكيد الإجابة فقط 0.5 (أو مساحة Z -0.5) (أو مساحة Z + 0.5)

١) إذا كانت Z = 0 ، أكيد الإجابة = 0.5





٢) إذا كانت Z = + عدد أكبر من يمين ، إذا كانت Z = - عدد أقل من يسار
يمين يمين يسار يسار

اتحاد

مساحة (Z) ـــ 0.5

إذا كانت Z = + 1.5 أكبر من يمين ، إذا كانت Z = - 1.5 أقل من يسار
يمين يمين يسار يسار

اتحاد

مساحة (1.5) ـــ 0.5

---

٣) إذا كانت Z = + عدد أقل من يسار ، إذا كانت Z = - عدد أكبر من يمين
يمين يسار يسار يمين

اختلاف

مساحة (Z) + 0.5

إذا كانت Z = + 1.64 أقل من يسار ، إذا كانت Z = - 1.64 أكبر من يمين
يمين يسار يسار يمين

اختلاف

مساحة (1.64) + 0.5

ب) إذا كان هناك قيمتين لـ (Z):

١) إذا كانت **Z1** = 0 ، **Z2** = ± عدد

تكون الإجابة عبارة عن مساحة الكشف فقط عن العدد

Z1 = 0   Z2 = 2   Z1 = -2   Z2 = 0

الإجابة مساحة الكشف لـ (2)

---

٢) Z1 = 0   Z2 = 2   Z1 = -2   Z2 = 0
يمين يمين يسار يسار

اتحاد

نطرح المساحة الكبيرة – المساحة الصغيرة

إذا كانت Z1 = + 1   Z2 = 2 ، إذا كانت Z1 = - 1.1   Z2 = -2

اتحاد

مساحة الكشف الكبيرة – مساحة الكشف الصغيرة

٣) إذا كانت $Z1 = +$ عدد ، إذا كانت $Z2 = -$ عدد

<u>اختلاف</u>

نجمع مساحة الكشف الأولى + مساحة الكشف الثانية

إذا كانت $Z1 = +1.5$ ، إذا كانت $Z2 = -2.5$

<u>اختلاف</u>

نجمع $1.5 + 2.5$

جدول التوزيع الطبيعي القياسي

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2342	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3168	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4014
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4279	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4758	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4754	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4811	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4952	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.5	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
4.0	0.4999									

مثال رقم (٨ – ١٠):

إذا كانت أعمار البطاريات تتبع توزيع طبيعي ومتوسط قدره (80) ساعة وانحراف معياري قدره (10) ساعات، أخذت بطارية عشوائياً ، فاحسب احتمال:

١) أن يزيد العمر عن 80 ساعة ؟
٢) أن يقل العمر عن 65 ساعة ؟
٣) أن يزيد العمر عن 105 ساعة ؟
٤) أن يقل العمر عن 95 ساعة ؟
٥) أن يزيد العمر عن 65 ساعة ؟
٦) أن يكون العمر ما بين 60 إلى 80 ساعة ؟
٧) أن يكون العمر بين 90 إلى 105 ساعة ؟
٨) أن يكون العمر بين 65 إلى 105 ساعة ؟

حل مثال رقم (٨ – ١٠):

المتوسط μ = 80 الانحراف المعياري σ = 10

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 80}{10}$$

١) احتمال أن يزيد العمر عن 80 ساعة: x = 80

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{80 - 80}{10} = 0$$

من جدول التوزيع الطبيعي

فقط = 0.5

٢) احتمال أن يقل العمر عن 65 ساعة: x = 65

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{65 - 80}{10} = 1.5$$

من جدول التوزيع الطبيعي

– يسار ، أقل يسار ، = اتحاد –

0.5 – 0.4332 = 0.0668

٣) احتمال أن يزيد العمر عن 105 ساعة: x = 105

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{105 - 80}{10} = 2.5$$

+ يمين ، يزيد يمين ، = اتحاد –

0.5 – 0.4938 = 0.0062

٤) احتمال أن يقل العمر عن 95 ساعة: x = 95

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{95-80}{10} = 1.5$$

+ يمين ، أقل يسار ، = اختلاف +

0.5 + 0.4332 = 0.9332

٥) احتمال أن يزيد العمر عن 65 ساعة: x = 65

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{65-80}{10} = -1.5$$

ـــ يسار ، يزيد يمين ، = اختلاف +

0.5 + 0.4332 = 0.9332

٦) احتمال أن يكون العمر مابين 60 إلى 80 ساعة: x2 = 80 ، x1 = 60

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{60-80}{10} = -2$$

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{80-80}{10} = 0$$

بما أن أحد الناتجين يساوي صفر ، إذاً نكتفي بالكشف عن مساحة الأخر وتكون هذا هو الناتج

مساحة الكشف (2)

= 0.4772

٧) احتمال أن يكون العمر مابين 90 إلى 105 ساعة : x2 = 105، x1 = 90

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{90-80}{10} = +1$$

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{105-80}{10} = +2.5$$

اتحاد الاشارات = سالب

مساحة الرقم الكبير - مساحة الرقم الصغير

2.5		1		
0. 4938	-	0.3413	=	0.1525

٨) احتمال أن يكون العمر مابين 65 إلى 105 ساعة : x2 = 105، x1 = 65

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{65 - 80}{10} = -1.5$$

$$Z = \frac{X - 80}{10} = \frac{105 - 80}{10} = +2.5$$

اختلاف الاشارات = موجب

مساحة الرقم الصغير + مساحة الرقم الكبير

1 2.5

0.9270 = 0.4332 + 0. 4938

مثال رقم (٩ – ١٠):

مدينة بها 5000 أسرة ، إذا كان استهلاكهم من المياه يتبع توزيع طبيعي عن وسط قدره 800 جالون ، وانحراف معياري قدره 200 جالون ، أخذت أسرة عشوائياً ، فاحسب احتمال :

١) أن يزيد الاستهلاك عن 800 جالون ؟
٢) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 500 جالون ؟
٣) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 1100 جالون ؟
٤) أن يتراوح الاستهلاك ما بين 800 إلى 1100 جالون ؟
٥) عدد الأسر التي تتراوح ما بين 600 إلى 1100 جالون ؟

حل مثال رقم (٩ – ١٠):

المتوسط μ = 800 الانحراف المعياري σ = 200

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 800}{200}$$

١) احتمال أن يزيد الاستهلاك عن 800 جالون: x = 800

$$Z = \frac{X - 800}{200} = \frac{800 - 800}{200} = 0$$

فقط = 0.5

٢) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 500 جالون: x = 500

$$Z = \frac{X - 800}{200} = \frac{500 - 800}{200} = -1.5$$

- يسار ، أقل يسار ، = اتحاد –

0.5 - 0.4332 = 0.0668

٣) أن يقل متوسط الاستهلاك عن 1100 جالون: x = 1100

$$Z = \frac{X - 800}{200} = \frac{1100 - 800}{200} = +1.5$$

+ يمين ، أقل يسار ، = اختلاف +

0.5 + 0.4332 = 0.9332

٤) أن يتراوح الاستهلاك مابين 800 إلى 1100 جالون: x1 = 800 ،x2 = 1100

$$Z_1 = \frac{X - 800}{200} = \frac{800 - 800}{200} = -0$$

$$Z_2 = \frac{X - 800}{200} = \frac{1100 - 800}{200} = 1.5$$

مساحة الكشف (1.5)

= 0.4332

٥) عدد الأسر الذين يتراوح استهلاكهم ما بين 600 إلى 1100 :

أولاً العدد الإجمالي = 5000

ثانياً النسبـــــــــــة = الاحتمال

x1 = 600 ، x2 = 1100

$$Z_1 = \frac{X - 800}{200} = \frac{600 - 800}{200} = -1$$

$$Z_2 = \frac{X - 800}{200} = \frac{1100 - 800}{200} = +1.5$$

مساحة الرقم الصغير + مساحة الرقم الكبير

1   1.5

0.7745 = 0.3413 + 0. 4332

عددهم = النسبـــة × العدد الإجمالي

= 0.7745 × 5000 = 3872 أسرة.

ملاحظة: عندما يطلب عدد:

١) نوجد النسبة (الاحتمال).

٢) نضرب النسبة في العدد الإجمالي تساوي العدد المطلوب.

الباب الثاني عشر
العينات وتوزيعات المعاينة

(١) مقدمة:

يتكون المجتمع الإحصائي من مجموعة من المفردات التي يهمنا دراستها وهذا المجتمع له بعض المعالم أو الخصائص مثل متوسط المجتمع M وانحرافه المعياري σ ونسبة صفة معينة في المجتمع P

وبدلاً من دراسة جميع مفردات المجتمع ، فإننا نختار عينة ممثلة له ، ثم نقوم بدراسة مفردات العينة وحساب بعض المقاييس منها مثل : متوسط العينة X وانحرافها المعياري σ ونسبة صفة معينة في العينة n .

(٢) توزيعات المعاينة:

نفرض أن لدينا مجتمع حجمه (n) مفردة، اخترنا منه عينة حجمها (n) وحسبنا وسطها الحسابي وليكن (X_1) ، ثم عينة ثانية لها نفس الحجم (n) وحسبنا وسطها الحسابي وليكن (X_2) ، ثم عينة ثالثة لها نفس الحجم (n) وحسبنا وسطها الحسابي وليكن (X_3) ، وهكذا بالنسبة لجميع العينات التي يمكن سحبها من هذا المجتمع.

سيتوفر لدينا عدد كبير من **القيم للوسط الحسابي**، لا نتوقع أن تكون كلها متساوية، وعلى ذلك يمكن النظر إلى هذا المقياس (الوسط الحسابي) على أنه متغير عشوائي له **توزيع احتمالي** ويسمى هذا المجتمع الجديد: **مجتمع المتوسطات الحسابية أو توزيع المعاينة.**

مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات وبعض خصائصه

نظرية النهاية المركزية:

نظرية (١):

إذا كان لدينا مجتمع مفرداته (X) يتبع توزيعاً احتمالياً متوسطه (M)، وانحرافه المعياري، سحبنا منه عينات حجم كل منها (n) مفردة، وحسبنا الوسط الحسابي لكل عينة.

فإن الوسط الحسابي للعينات ($\bar{X}$) يتبع توزيعاً طبيعياً

متوسطه: $M = (X)\, M :$

وانحرافه المعياري: $$\sigma\,(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma}}$$

وهذا يتطلب تحويل المتوسط المطلوب (X) من توزيع طبيعي عادي إلى طبيعي قياسي بالتحويلة الآتية:

نظرية (١):

في وجود متوسط التوزيع μ ، والانحراف المعياري σ

الإجابة **Z**

عادي | سوبر

١) عندما لا توجد عينة.
٢) أو العينة تكون واحدة فقط.

نستخدم Z عادي

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

١) عندما يوجد عينة حجمها (n) ، وتكون أكبر من واحد.

نستخدم Z سوبر

$$Z = \frac{x - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

ثم نوجد المساحة بنفس الطريقة

مثال رقم (١ – ١١):

إذا كانـت أوزان طـلاب الجامعـة تتبـع توزيـع طبيعـي لمتوسـط قـدره 50 كجـم ، وانحراف معياري قدره 10 كجم ، أخذت عينة من 25 طالب ، فاحسب احتمال :

١) أن يزيد متوسط الوزن في العينة عن 48 كجم ؟
٢) أن يتراوح بين متوسط الأوزان ما بين 48 إلى 55 كجم ؟

حل مثال رقم (١ – ١١):

المتوسط μ = 50 الانحراف المعياري σ = 10

$$Z = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{X - 50}{\frac{10}{\sqrt{25}}} = \frac{X - 50}{2}$$

١) احتمال أن يزيد متوسط الوزن عن 48: x = 48

$$Z = \frac{X - 50}{2} = \frac{48 - 50}{2} = -1$$

- يسار ، يزيد يمين ، = اختلاف +

0.5 + 0.3413 = 0.8413

٢) احتمال أن يتراوح مابين 48 إلى 55 : x2 = 55 ، x1 = 48

$$Z_1 = \frac{X - 50}{2} = \frac{48 - 50}{2} = -1$$

$$Z_2 = \frac{X - 50}{2} = \frac{55 - 50}{2} = +2.5$$

مساحة الرقم الصغير	+	مساحة الرقم الكبير	
1		2.5	
0.3413	+	0. 4938	= 0.8351

مثال رقم (٢ – ١١):

إذا كانت أطوال الطلاب تتبع توزيع طبيعي، بمتوسط قدره 168 سم، وانحراف معياري قدرة 6 سم:

أولاً : اختير طالب عشوائي ، فاحسب احتمال :

١) أن يزيد طوله عن 168 سم ؟

٢) أن يتراوح ما بين 105 إلى 171 سم ؟

ثانياً : أخذت عينة من 36 طالب ، فاحسب احتمال :

١) أن يقل متوسط الطول عن 170 سم ؟

حل مثال رقم (٢ – ١١):

المتوسط = μ = 168 الانحراف المعياري σ = 6

$$Z = \frac{X - \mu}{6} = \frac{X - 168}{6}$$

أولاً:

١) احتمال أن يزيد الطول عن 168 سم: x = 168

$$Z = \frac{X - 168}{6} = \frac{168 - 168}{6} = 0$$

فقط = 0.5

٢) احتمال أن يتراوح مابين 165 إلى 171 : x2 = 171 ، x1 = 165

$$Z_1 = \frac{X - 168}{6} = \frac{165 - 168}{6} = -0.5$$

$$Z = \frac{X - 168}{6} = \frac{171 - 168}{6} = +0.5$$

مساحة الرقم الصغير	+	مساحة الرقم الكبير	
0.5		0.5	
0.1915	+	0. 1915	= 0.3830

ثانياً :

١) أخذت عينة من 36 :

n = 36

$$Z = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{X - 168}{\frac{6}{\sqrt{36}}} = \frac{X - 168}{1}$$

أن يقل متوسط الطول عن 170 :

x = 170

$$Z = \frac{X - 800}{1} = \frac{170 - 168}{1} = -2$$

+ يمين ، أقل يسار ، = اختلاف +

$0.5 + 0.4772 = 0.9772$

التوزيع الاحتمالي للنسبة في العينة:

نظرية (٢):

ما هو احتمال في وجود نسبة وعدد

الإجابة ذات الحدين

عادي	سوبر
١- عندما يكون العدد أقل من 30.	١- عندما يكون العدد 30 أو أكثر.
نستخدم ذات الحدين عادي	نحولها من ذات الحدين إلى طبيعي

نسبة مطلوبة p — نسبة غير مطلوبة q

n

x = 0 , 1 , …….. n

$p(x) = {}^{n}C_{x} \, . \, P^{x} . \, q^{n-x}$

متوسط التوزيع:

عادي: $\mu = n \, . \, p$ — سوبر: $\mu = n \, . \, p$

التباين:

$\sigma^2 = n \, . \, p \, . \, q$

الانحراف:

عادي: $\sigma = \sqrt{n.p.q}$ — سوبر: $\sigma = \sqrt{n.p.q}$

سوبر: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

مثال رقم (٣ – ١١):
إذا كانت نسبة الإطارات التالفة 20 % ، أخذت عينة من 400 إطار، فاحسب احتمال وجود 70 إطار على الأكثر تالف :

ملحوظة:	على الأكثر	=	اقل من أو يساوي	يسار
	على الأقل	=	أكبر من أو يساوي	يمين

حل مثال رقم (٣ – ١١):

تالف = 20 % = 0.2 P ، سليم = 80 % = 0.8 q

$\mu = n \cdot p = 400 \times 0.2 = 80$

$$\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{400 \times 0.2 \times 0.8} = 8$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 80}{8}$$

70 إطار على الأكثر (أقل أو يساوي) : x = 70

$$Z = \frac{X - 80}{8} = \frac{70 - 80}{8} = -1$$

- يسار ، أقل يسار ، = اتحاد –

0.5 - 0.3413 = 0.1587

مثال رقم (٤ – ١١):
إذا كانت نسبة الصناديق المعيبة 0.01 % ، في أحد إنتاج المصانع ، أخذت عينة من 1000 صندوق ، فاحسب احتمال وجود 15 صندوق على الأقل معيب :

حل مثال رقم (٤ – ١١):

معيب = 0.01 p ، سليم = 0.99 q

$\mu = n \cdot p = 1000 \times 0.01 = 10$

$$\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{1000 \times 0.01 \times 0.99} = 3.15$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 10}{3.15}$$

15 صندوق على الأقل (أكثر أو يساوي) : x = 15

$$Z = \frac{X - 10}{3.15} = \frac{15 - 10}{3.15} = -1$$

+ يمين ، أكبر يمين ، = اتحاد –

0.5 - 0.4441 = 0.0559

الباب الثالث عشر

تقدير معالم المجتمع بفترات الثقة (العينات الكبيرة)

مقدمة:

الهدف من دراسة أي مجتمع هو إيجاد أو تقدير بعض معالمه أو خصائصه مثل متوسط المجتمع M وانحرافه المعياري σ ، ونسبة صفة معينة في المجتمع P . وهذه المعالم غالباً ما تكون مجهولة ونريد معرفة قيمتها.

التقدير واختبار الفروض للنسبة

أعمل تقدير ثقة قدر النسبة في المجتمع P بدرجة ثقة

إما 95 % = قيمة جدولية 1.96

أو 99 % = قيمة جدولية 2.58

العينات:

المعطى في السؤال يكون العينة (n) و النسبة في العينة (r)

بإحدى الطريقتين :

١) إما نسبة جاهزة:

أخذت عينة من 50 مصباح ووجد أن نسبة المصابيح التالفة في العينة هي 10%

أي أن:

n = 50

r = 0.1

٢) أو يكون المعطى عينة و عدد الشاهدات في العينة:

النسبة في العينة $r = \dfrac{\text{عدد الشاهدات}}{\text{العينة}}$

---

١) n العينة

٢) r النسبة في العينة

٣) انحراف النسبة في العينة $\sigma r = \sqrt{\dfrac{r(1-r)}{n}}$

$$P = r \pm \begin{matrix} \%\,95 \\ 1.96 \\ \text{أو} \\ 2.58 \\ \%\,99 \end{matrix} \times \sigma r$$

مثال رقم (١ – ١٢):

إذا علمت أن P = 0.3 و n = 25 و r = 0.15

- فأوجد Z المحسوبة في اختبار الفرض ، وإذا علمت أن الفئة الجدولية = 1.96

حل مثال رقم (١ – ١٢):

$$Z = \frac{r - p}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} = \frac{0.15 - 0.3}{\sqrt{\frac{0.3(1-0.3)}{25}}} = \frac{-0.15}{0.09} = -1.67$$

بما أن Z المحسوبة، أقل من Z الجدولية.

إذاً القرار قبول، نقبل H0 فرض العدم، ونرفض H1 فرض البديل.

ملاحظة:

عندما يكون المعطى في السؤال : النسبة في العينة P والعدد n والنسبة في العينة r

اختير الفرض فإن النسبة P = نسبة محددة

أو هل النسبة = فيـــه محددة على مستوى معنوية 5% أو 1%

1.96 2.58

١)

صياغة الفرض النسبة = P = H0 فرض العدم

صياغة الفرض النسبة ≠ P = H1 فرض البديل

٢)

إجراء الإحصاء Z المحسوبة Z المستخدمة في اختبار الفرض

$$\boxed{Z = \frac{r - p}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}}$$

٣) اتخاذ القرار

إذا كان Z المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية القرار رفض، نرفض H0 فرض العدم، ونقبل الفرض البديل H1

إذا كان Z المحسوبة أقل من القيمة الجدولية القرار قبل، نقبل H0 فرض العدم، ونرفض H1 الفرض البديل.

مثال رقم (٢ – ١٢):

إذا علمت أن النسبة في العينة $r = 0.25$ ، $n = 100$ ، والقيمة الجدولية = 2.58

قدر بدرجة ثقة لـ P

حل مثال رقم (٢ – ١٢):

$$\sigma r = \frac{\sqrt{r(1-r)}}{n} = \frac{\sqrt{0.25(1-0.25)}}{100} = 0.04$$

$$P = r \pm 2.58 \times \sigma r$$

$$P = 0.25 \pm 2.58\ (0.04)$$

$$P = 0.25 \pm 0.11$$

$$0.14 \leq P \leq 0.35$$

مثال رقم (٣ – ١٢):

إذا علمت في عينة من 50 مصباح، وجد أن عدد المصابيح المعيبة 10 مصابيح.

فأعمل قدرة ثقة للنسبة المعيب في الإنتاج بدرجة ثقة 99%

حل مثال رقم (٣ – ١٢):

$$P = r \pm 2.58 \times \sigma r$$

$$n = 50$$

عدد العينة المعيب 10

$$r = \frac{\text{عدد الشواهد}}{\text{العينة}} = \frac{10}{50} = 0.2$$

$$\sigma r = \frac{\sqrt{r(1-r)}}{n} = \frac{\sqrt{0.2(1-0.2)}}{50} = 0.06$$

$$P = r \pm 2.58 \times \sigma r$$

$$P = 0.2 \pm 2.58\ (0.06)$$

$$P = 0.2 \pm 0.15$$

الطرح

الجمع

$$0.05 \leq P \leq 0.35$$

مثال رقم (٤ – ١٢):
في عينة من 100 بطارية وجد أن نسبة البطاريات التي بها عيوب هو 20% ، فأعمل ثقة لنسبة البطارية التي بها عيوب بدرجة ثقة 95%

حل مثال رقم (٤ – ١٢):

$P = r \pm 1.96 \times \sigma r$

$n = 100$

نسبة العينة المعيب 20 %

$$r = \frac{\text{عدد الشواهد}}{\text{العينة}} = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$\sigma r = \frac{\sqrt{r(1-r)}}{n} = \frac{\sqrt{0.2(1-0.2)}}{100} = 0.04$$

$P = r \pm 1.96 \times \sigma r$

$P = 0.2 \pm 1.96\,(0.04)$

$P = 0.12 \pm 0.28$

$0.05 \leq P \leq 0.35$

تتراوح النسبة ما بين 0.12 إلى 0.28

الباب الرابع عشر
اختبار الفروض الإحصائية

مقدمة:

قد يدعي باحث أن متوسط دخل الأسرة الشهري في مدينة ما هو 6000 ريال.

وللتأكد من ذلك نختار عينة عشوائية من سكان هذه المدينة و نحسب الوسط الحسابي للدخل الشهري في العينة، ولنفرض أنه بلغ 6300 ريال.

فهل الفرق بين متوسط العينة (6300) ريال، وادعاء الباحث (6000) ريال يرجع إلى مجرد الصدفة أم أن متوسط الدخل في المدينة أكثر من 6000 ريال؟

للإجابة على هذا السؤال نتبع الخطوات الآتية، سواء بالنسبة لاختبار فرض معين حول متوسط المجتمع M أو اختبار فرض معين حول النسبة في المجتمع P.

أولاً : للمتوسط (μ) متوسط المجتمع العام

أولاً: التقدير:

قدر متوسط (يقصد متوسط المجتمع) بدرجة ثقة 95% 99% أي أن **μ** مجهولة

1.96 ← 95%، 2.58 ← 99%

ولإيجاد المتوسط **μ** يجب الحصول على الوسط الحسابي **X** والانحراف المعياري **σ**

الوسط الحسابي : $\bar{X} = \frac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f}$ للبيانات المبوبة.

الوسط الحسابي: $\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n}$ للبيانات الغير مبوبة

وانحرافه المعياري : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f} - (\bar{X})^2}$ للبيانات المبوبة.

وانحرافه المعياري : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{X})^2}$ للبيانات الغير المبوبة.

حيث n تمثل مجموع التكرار $\sum f$

95%

$$\mu = X \pm 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2.58

99%

أعلى بالجمع ≤ μ ≤ أدنى بالطرح

ملاحظة:

إذا طلب منك: اختبار الفرض القائل بأن متوسط المجتمع العام يساوي قيمة محددة، يقصد بمتوسط المجتمع العام (μ)، إذاً المتوسط معلوم.

1% 5%

أو : هل تقبل الادعاء بأن متوسط المجتمع العام يساوي قيمة محددة 1.96 أو 2.58 إذاً μ معلوم: أي يجب الحصول على الوسط الحسابي والانحراف المعياري.

١)

صياغة الفرض (صادق) القيمة المعطاة = μ = H0 فرض العدم

صياغة الفرض (كاذب) القيمة المعطاة ≠ μ = H1 فرض البديل

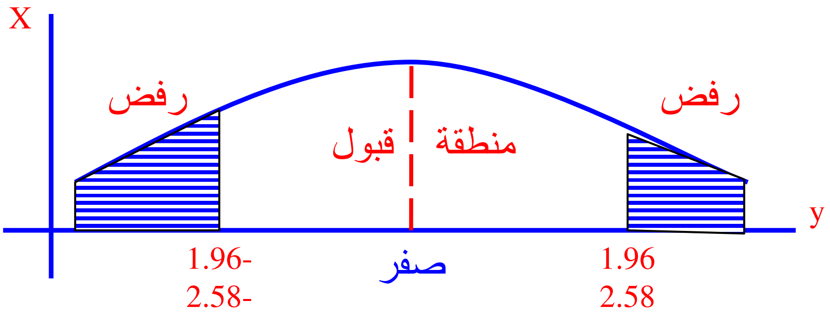
٢)

إجراء الإحصاء فإن Z السوبر $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ المحسوبة

٣) اتخاذ القرار

إذا كان Z المحسوبة أكبر من القيمة الجدولية القرار رفض، نرفض H0 فرض العدم، ونقبل الفرض البديل H1

إذا كان Z المحسوبة أقل من القيمة الجدولية القرار قبل، نقبل H0 فرض العدم، ونرفض H1 الفرض البديل.



مستوى المعنوية = 0.05

مستوى المعنوية = 0.01

مثال رقم (١ – ١٣):

الجدول التالي يوضح التوزيع التكراري لعينة من أرباح الشركات بملايين الريالات:

الأرباح	3-	5-	7-	9-	11-	المجموع
عدد الشركات	10	20	40	20	10	100

وإذا علمت أن $\sum xf = 800$ و $\sum x^2 f = 6880$ و $\sum f = 100$ و $n = 100$

١) قدر متوسط الأرباح للشركات بدرجة ثقة 95%

٢) أخذ الفرض القائل بأن متوسط أرباح مجموع الشركات هو 7 ملايين ريال على مستوى معين 1%

٣) هل تؤيد الادعاء بأن متوسط أرباح الشركات هو 7 ملاين ريال على مستوى معين 1%

حل مثال رقم (١ – ١٣):

فئات الأرباح	f تكرار الشركات	X مركز الفئة	X f	X^2 f
3-	10	4	40	160
5-	20	6	120	720
7-	40	8	320	2560
9-	20	10	200	2000
11-	10	12	120	1440
----------	100	-----------	800	6880

الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma xf}{\Sigma f} = \frac{800}{100} = 8$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f} - (x)^2} = \sqrt{\frac{6880}{100} - (8)^2} = 2.19$$

١) متوسط الأرباح للشركات بدرجة ثقة 95% أي 1.96

$$\mu = \bar{X} \pm 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu = 8 \pm 1.96 \times \frac{2.19}{\sqrt{100}}$$

$8 + 0.43 = 8.43$

8 ± 0.43

$7.57 \leq \mu \leq 8.43$

$8 - 0.43 = 7.57$

الحد الأدنى   الحد الأعلى

٢) أخذ الفرض القائل بأن متوسط أرباح الشركات (7) مليون ريال عند مستوى معين 1%

١- صياغة الفرض

فرض العدم $H0 = \mu = 7$

فرض البديل $H1 = \mu \neq 7$

٢- إجراء الإحصاء

$$Z = \frac{X - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{8-7}{\frac{2.19}{\sqrt{100}}} = \frac{1}{0.219} = 4.56$$

٣- اتخاذ القرار (الجدولية) 1% 2.58

Z المحسوبة تساوي 4.56 أكبر من الجدولية 2.58

القرار رفض، نرفض H0 فرض العدم، ونقبل H1 فرض البديل على مستوى 1%

الاختبار الدوري الثاني

أولاً: اختر جواباً واحد فقط مما يلي باستخدام القلم الرصاص:

رقم السؤال	أ	ب	ج	د

رقم السؤال	أ	ب	ج	د
١- إذا كان الحدثان A,B لايؤثر وقوع أحدهما على الأخر فإنهما حدثان	مؤكدان	مستقلان	متماثلان	مانعان
٢- توزيع احتمالي للاحداث النادرة	المنتظم	ذوالحدين	بواسون	الطبيعي
٣- احتمال ظهور رقم يقبل القسمة على 2 و 3 عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{6}$
٤- احتمال وقوع حادثين مانعين معا يساوي	1	0	0.5	غير ذلك
٥- التوزيع الطبيعي القياسي من التوزيعات الاحتمالية	الملتوية	المنفصلة	المتماثلة	غير ذلك
إذا كان احتمال نجاح طالب ما في أحد المواد هو 0.7 فإذا اخترنا ثلاث طلاب عشوائيا فإن:				
٦- احتمال نجاح طالب واحد	0.234	0.189	0.342	0.654
٧- احتمال رسوب جميع الطلاب	0.227	0.723	0.342	0.027
٨- احتمال نجاح طالب على الأكثر	0.216	0.234	0.189	0.027
٩- متوسط عدد الطلاب الراسبين	3.4	2.6	2.1	0.9
١٠- الانحراف المعياري لعدد الطلاب الناجحين	0.79	0.97	1.97	0.63
إذا أرادت الجامعة تكوين فريق من طالبين لتمثيلها في احدى المسابقات من بين 3 طلاب تخصصاتهم علمية و 4 طلاب تخصصاتهم أدبية فإن:				
١١- احتمال أن يكون تخصص الطالبين أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
١٢- احتمال أن يكون تخصص الأول علمي والثاني أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
١٣- احتمال أن يكون تخصص أحدهما علمي والثاني أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
١٤- احتمال أن يكون تخصص واحد منهما على الاقل أدبي	$\frac{6}{42}$	$\frac{36}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
إذا كان الدخل اليومي للعاملين في أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 80 ريال وانحراف معياري 20 ريال ، فإذا اختير أحد العمال عشوائياً فإن:				
١٥- احتمال أن يزيد دخله عن 60 ريال هو	0.8413	0.1587	0.1359	0.3456
١٦- 68 % تقريبا من العاملين تتراوح أجورهم بين	130,150ريال	60,100ريال	50, 70ريال	30, 100ريال
١٧- احتمال أن يزيد دخله عن 100 ريال	0.8413	0.1587	0.1359	0.3456
١٨- إذا كان عدد العاملين في هذا المصنع هو 200 عامل فإن عدد العاملين الذين يزيد دخله عن 60 ريال	160	168	179	186

بعض القيم الجدولية من التوزيع الطبيعي القياسي		
	$P(0 < Z < 2) = 0.4772$ $P(0 < Z < 1) = 0.3413$	$P(0 < Z < 1.5) = 0.4332$ $P(0 < Z < 3) = 0.4987$ $P(0 < Z < 1.96) = 0.4750$

ثانياً: أختر جواباً واحداً فقط:

رقم السؤال	أ	ب	ج	د

ألقيت زهرة نرد مرة واحدة :				
١- ما هو احتمال ظهور عدد فردي	5/6	3/6	3/7	8/10
٢- ما هو احتمال ظهور عدد أكبر من 2	1/12	5/6	4/6	2/6
٣- ما هو احتمال ظهور عدد فردي أو عدد أكبر من 2	5/6	9/36	2/4	3/5
إذا كان احتمال إصابة الطائرة لأحد أهداف العدو هو $\frac{3}{4}$ ، فإذا أغارت ثلاث طائرات على أهداف العدو/ ما هو:				
٤- احتمال أن يصيب الهدف طائرة واحدة	36/64	25/64	16/64	9/64
٥- احتمال أن لا يصيب الهدف أي طائرة	1/64	25/64	15/64	10/64
٦- احتمال أن يصيب الهدف طائرة واحدة على الأكثر	10/64	40/64	30/64	20/64
٧- متوسط عدد الطائرات التي تصيب الهدف	22/4	14/4	9/4	5/4
٨- الانحراف المعياري لعدد الطائرات التي تصيب الهدف	3/4	3/7	3/8	3/10
إذا كانت أطوال مجموعة من الشباب يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 170 سم وانحراف معياري 5سم ، تم اختيار شاب عشوائياً ، أوجد :				
٩- احتمال أن يقل طوله عن 172 سم	0.6560	0.6554	0.6500	0.6540
١٠- احتمال أن يزيد طوله عن 180 سم	0.0528	0.0428	0.0228	0.0328
١١- احتمال أن ينحصر طوله بين 175سم، 185 سم	0.1574	0.1480	0.1580	0.1474

بعض القيم الجدولية من التوزيع الطبيعي القياسي		
	$P(0 \le Z \le 0.4) = 0.1554$ $P(0 \le Z \le 3) = 0.4987$ $P(0 \le Z \le 0.65) = 0.2422$	$P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$ $P(0 \le Z \le 0.44) = 0.1700$ $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$

مع تمنياتي للجميع بدوام التوفيق والنجاح ،،، H.A

القوانين المستخدمة

الباب الثالث

مقاييس النزعة المركزية

١) الوسط الحسابي:

البيانات الغير مبوبة:

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n}$$

البيانات المبوبة:

$$\bar{X} = \frac{\sum xf}{\sum f}$$

٢) الوسيط:

البيانات الغير مبوبة:

$$\text{الوسيط } M = \frac{\text{مجموع المفردتان الوسطيان}}{2}$$

البيانات المبوبة:

$$M = L + \frac{\frac{n}{2} - fm}{fl} \times h$$

و L هي الفئة المقابلة لأعلى تكرار.

و n مجموع التكرارات.

و f m القيمة السابقة للتكرار المتجمع الصاعد لترتيب الوسيط.

و f L تكرار فئة الوسيط.

و h طول الفئة.

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{n}{2}$$

ويمكن إيجاد الوسيط بالقانون التالي:

$$M = L + \frac{C_1 - C_2}{C_3} \times h$$

L : الحد الأدنى لفئة الوسيط.

C_1 : ترتيب الوسيط.

C_2 : (ت.م.ص) التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط.

C_3 : التكرار الأصلي لفئة الوسيط.

h : طول الفئة.

٣) المنوال:

البيانات المبوبة :

$$D = L + \frac{d1}{d1 + d2} \times h$$

و L هي الفئة المنوالية المقابلة لأعلى تكرار.

و d_1 الفرق ، حاصل طرح أعلى تكرار ــ التكرار السابق له.

و d_2 الفرق ، حاصل طرح أعلى تكرار ــ التكرار اللاحق له.

و h طول الفئة أي مقدار الزيادة من فئة إلى أخرى.

القوانين المستخدمة

الباب الرابع
مقاييس التشتت

١) الانحراف المعياري

البيانات الغير مبوبة:

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

البيانات المبوبـــــة:

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 f}{\Sigma f} - (\bar{X})^2}$$

٢) معامل الاختلاف:

مقياس التشتت النسب

$$C.V = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\%$$

٣) معامل الالتواء:

معامل الالتواء الأول :

$$SK_1 = \frac{\bar{X} - D}{S}$$

معامل الالتواء الثاني :

$$SK_2 = \frac{3(\bar{X} - M)}{S}$$

القوانين المستخدمة

الباب الخامس
الارتباط والانحدار

١) معامل ارتباط بيرسون (الخطي)
البيانات الغير مبوبة
و البيانات المبوبــة

$$r = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{Sx . Sy}$$

٢) معادلة خط الانحدار

$$Y = b_0 + b_1 X$$

ويمكننا حساب b_1 و b_0 بالمعادلتين التاليتين:

معامل الانحدار ، الميــل :

$$b_1 = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \bar{X}\bar{Y}}{S^2 X}$$

ثابــت الانحدار ، المقطع :

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}$$

٣) معامل ارتباط سبيرمان (الرتب):

$$r = 1 - \frac{6 \times \Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

القوانين المستخدمة

الباب السابع
الأرقام القياسية

١) الرقم القياسي البسيط للأسعار:

$$I_s = \frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_2} \times 100$$

٢) الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات الأساس (لاسبير):

$$I_L = \frac{\Sigma P_1 . Q_0}{\Sigma P_1 . Q_0} \times 100$$

٣) الرقم القياسي للأسعار المرجح بكميات المقارنة (باتــش):

$$I_P = \frac{\Sigma P_1 . Q_1}{\Sigma P_0 . Q_1} \times 100$$

٤) الرقم القياسي الأمثل للأسعار (فيشر):

$$I_F = \sqrt{I_L + I_P}$$

فيشر = $\sqrt{\text{باتش} \times \text{لاسبير}}$

القوانين المستخدمة

الاحتمالات

١) توزيع ذات الحدين:

$$P(X) = {}^{n}C_{x} \cdot P^{x} \cdot q^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots,n$$

خصائص توزيع ذات الحدين:

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي

$$\mu = n \times p$$

٢) التباين

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

٣) الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

٢) توزيع بواسون:

$$P(x) = \frac{\lambda^2 . e^{-\lambda}}{X\ !}$$

حيث $x = 0,1,2, \ldots \infty$

X هي العدد الاحتمالي المطلوب

! مضروب العدد

خصائص توزيع بوسون

١) متوسط التوزيع = القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي

$$\sigma = \lambda$$

٢) التباين

$$\sigma = \lambda^2$$

٣) الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

٣) التوزيع الطبيعي:

١) عندما لا توجد عينة.

٢) أو العينة تكون واحدة فقط.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

نظرية (١):

في وجود متوسط التوزيع μ ، والانحراف المعياري σ

الإجابة **Z**

عادي	سوبر
عندما لا توجد عينة. أو العينة تكون واحدة فقط.	عندما يوجد عينة حجمها (n)، وتكون أكبر من واحد.
نستخدم Z عادي	نستخدم Z سوبر
$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$	$$Z = \frac{x - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

نظرية (٢):

ما هو احتمال في وجود نسبة وعدد

الإجابة **ذات الحدين**

عادي

عندما يكون العدد أقل من 30.

نستخدم ذات الحدين عادي

نسبة مطلوبة p

نسبة غير مطلوبة q

n

x = 0 , 1 , …….. n

$$p(x) = {}^{n}C_{x} \cdot P^{x} \cdot q^{n-x}$$

متوسط التوزيع:

$\mu = n \cdot p$

التباين:

$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$

الانحراف:

$$\sigma = \sqrt{n.p.q}$$

سوبر

عندما يكون العدد 30 أو أكثر.

نحولها من ذات الحدين إلى طبيعي

$\mu = n \cdot p$

$$\sigma = \sqrt{n.p.q}$$

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

القوانين المستخدمة

مبادئ الاحتمالات

١) قاعدة أو   ٢) قاعدة و

١) قاعدة (أو) ← اتحاد U

(قاعدة الجمع للحالات المانعة و الغير مانعة)

زيد أو عبيد

A U B

مانع | غير مانع

عندما لا يوجد تكرار (تقاطع) بين الحادثتين A و B

أو

$P (A \cup B) = P (A) + p (B)$

عندما يوجد تكرار بين الحادثتين A و B

تقاطع   أو

$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B)$

٢) قاعدة (و) ← تقاطع ∩

قاعدة الضرب للاحتمالات المستقلة والغير مستقلة

تتميز باللفظ (و) (∩) والقاعدة الضرب

مستقلة | غير مستقلة

أولاً : قاعدة الضرب للاحداث المستقلة:

يقال أن الحدثان A و B حدثان مستقلان إذا كان وقوع الحدث الأول لا يؤثر على وقوع الحدث الثاني.

$P (A \cap B) = P(A) . P(B)$

ثانياً : قاعدة الضرب للاحتمالات الغير مستقلة:

يقال أن الحدثان A و B حدثان غير مستقلان ، إذا كان وقوع الحدث الأول يؤثر في وقوع الحدث الثاني.

مؤثر

و

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B / A)$$

احتمال شرط

يعني وقوع B بشرط وقوع A أولاً

القوانين المستخدمة

العيـنــــات

العينات، التقدير واختبار الفروض:

لمتوسط (μ) المجتمع العام:

95%

$$\mu = x \pm 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

2.58

99%

أعلى بالجمع ≤ μ ≤ أدنى بالطرح

اختبار الفروض الإحصائية:

$$Z = \frac{r - p}{\sqrt{\dfrac{P\,(1 - P)}{n}}}$$

انحراف النسبة في العينة

$$\sigma r = \sqrt{\frac{r\,(1 - r)}{n}}$$

% 95

1.96

P = r ± أو **× σ r**

2.58

% 99

مراجع المذكرة

- د. جلال الصياد وآخرون، الإحصاء لطلاب الدراسات الاقتصادية والإدارية، دار حافظ للنشر، ٢٠٠٧م.
- أعضاء هيئة التدريس بقسم الإحصاء بجامعة الملك عبدالعزيز، مبادئ الإحصاء للتخصصات النظرية، خورازم، ١٤٢٩هـ.
- أعضاء هيئة التدريس بقسم كلية الاقتصاد والإدارة بجامعة الملك عبدالعزيز، التطبيقات الاقتصادية والإدارية لمادة مبادئ التحليل الإحصائي، ١٤٢٩هـ.
- د. محمد نوري، الإحصاء والقياس، ٢٠٠٧م.