بداية محاضرة يوم ١ من الأسبوع الثاني

الباب السادس (المصفوفات)

تعريف:- المصفوفة هي عبارة عن تنظيم الأعداد مرتبة على شكل صفوف أو أعمدة في جدول مستطيل الشكل بحيث يكون هذا المستطيل من م من الصفوف و ن من الأعمدة، ويرمز للمصفوفات بحروف عربية كبيرة تحتها خط مثل أ، ب، ج، .... وذلك لتمييز المصفوفة عن عناصرها.

تسمى الأعداد المكونة للمصفوفة بعناصر المصفوفة، ونكتب أي المصفوفة على الصورة العامة من الرتبة م × ن كما يلي:-

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \cdots & \text{أ}_{1\text{ن}} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} & \cdots & \text{أ}_{2\text{ن}} \\ \vdots & & & \\ \text{أ}_{\text{م}1} & \text{أ}_{\text{م}2} & \cdots & \text{أ}_{\text{م}\text{ن}} \end{bmatrix}$$

لاحظوا أن العنصر أ_{22} هو العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثاني، ويسمى هذا بدليل العنصر.

مثال:-

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة مكونة من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة و ٩ عناصر، والعنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثالث = -١

يقال بأن رتبة أي مصفوفة هي عدد الصفوف X عدد الأعمدة
فالمصفوفة السابقة أ هي من الرتبة ٣×٣ .

مثال :- ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٣- & ١ \end{bmatrix}$ ← صف واحد وثلاثة أعمدة

مصفوفة من الرتبة ١×٣ .

عمود واحد

مثال :- جـ = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٣- \\ ١ \end{bmatrix}$ ← ٣ صفوف

مصفوفة من الرتبة ٣×١

* أنواع المصفوفات :-

١) المصفوفة المستطيلة :- حيث عدد الصفوف ≠ عدد الأعمدة .

مثال :- أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١- & ٤ \end{bmatrix}$ من الرتبة ٢×٣
عدد عناصر = ٦

٢) المصفوفة المربعة : إذا كانت المصفوفة من الرتبة م×م (يعني عدد الصفوف = عدد الأعمدة) فنقول بأن المصفوفة مربعة الشكل.

مثال :- ب = $\begin{bmatrix} ١- & ١ \\ \text{صفر} & ٣ \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة رتبتها ٢×٢ وتحتوي ٤ عناصر .

٣) المصفوفة الصفرية :- وهي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار ونرمز لها بالرمز صفر ، مثال :- $\text{صفر}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}$

٤) المصفوفة القطرية :- هي المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها أصفاراً ما عدا العناصر الواقعة على القطر (وعلى الأقل أحد عناصر القطر لا يساوي صفراً).

مثال :- $\underline{أ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & 1 \\ \text{صفر} & 2 & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}_{3\times3}$ مصفوفة قطرية .

٥) مصفوفة الوحدة :- هي المصفوفة القطرية التي يكون فيها جميع عناصر القطر تساوي العدد واحد .

مثال :- $\underline{أ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & 1 \\ 1 & \text{صفر} \end{bmatrix}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة 2×2 .

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{صفر} & 1 \\ \text{صفر} & 1 & \text{صفر} \\ 1 & \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة 3×3

تعريف :- يقال أن المصفوفتين $\underline{أ}$ ، $\underline{ب}$ متساويتان إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :-

(١) رتبة المصفوفة $\underline{أ}$ = رتبة المصفوفة $\underline{ب}$.

(٢) العناصر المتناظرة في كلا المصفوفتين متساوية .

عند العنصر $أ_{هـ و} = ب_{هـ و}$ حيث هـ = ١، ٢، ــــ م
و = ١، ٢، ــــ ن

مثال :- اوجد قيمة س ، ص حيث

$$\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & س \\ ٢ & ص \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} س = ١ \\ ص = ٣- \end{matrix}$$

- العمليات الجبرية على المصفوفات :-

١) جمع مصفوفتين ، ٢) طرح مصفوفتين ، ٣) ضرب مصفوفة لعدد ثابت
٤) ضرب مصفوفتين .

① جمع مصفوفتين :- اذا كان أ = [أهو] ، ب = [ب هو]
من الرتبة م × ن فإن مجموعهما هو المصفوفة
[أهو + ب هو] من الرتبة م × ن .

شرط التساوي بالرتب

يعني أ + ب = [أهو] + [ب هو] = [أهو + ب هو] .

مثال :- اذا كانت

$$أ = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١- & صفر \end{bmatrix}_{٢×٣} ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣- \\ ٣ & ١- & ١ \end{bmatrix}_{٢×٣}$$

أوجد ١) أ + ب
٢) ب + أ
٣) أ + أ

الحل :- أ + ب =

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣- \\ ٣ & ١- & ١ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١- & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٥+٣ & ٤+٢ & ٣-+١ \\ ٣+٥- & ١+١- & \text{صفر}+١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٨ & ٦ & ٢- \\ ٢- & ٢- & ١ \end{bmatrix} \quad ٢\times٣$$

ب + أ =

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١- & \text{صفر} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & ٤ & ٣- \\ ٣ & ١- & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣+٥ & ٢+٤ & ١+٣- \\ ٥-+٣ & ١-+١- & \text{صفر}+١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٨ & ٦ & ٢- \\ ٢- & ٢- & ١ \end{bmatrix}$$

فنقول بأن عملية الجمع على مصفوفتين عملية ابدالية .

أ + ب = ب + أ .

أ + أ =

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١- & \text{صفر} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١- & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٢ \\ ١٠- & ٢- & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

ومن الواضح نلاحظ أن أ + أ = ٢ أ .

مثال :- اوجد أ + أ + أ + أ = ٤ أ = ٤ ×

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥- & ١- & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١٢ & ٨ & ٤ \\ ٢٠- & ٤- & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

٢) طرح مصفوفتين:

إذا كانت أ = [أ هو] ، ب = [ب هو] من الرتبة ٢×٣ فإن

$$\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = [\text{أ}_{\text{هو}}] - [\text{ب}_{\text{هو}}] = [\text{أ}_{\text{هو}} - \text{ب}_{\text{هو}}]$$

مثال: إذا كانت

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} ، \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

أوجد:

١) أ − ب

٢) ب − أ

الحل:

$$\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣ - ١ & ٥ - ٢ \\ ١ - ٣ & -٢ - \text{صفر} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & \text{صفر} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -٢ & -٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

نستنتج أن $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} \neq \underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}$.

$\underline{\text{أ}} - \underline{\text{ب}} = -\left(\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}\right)$.

نلاحظ من الأمثلة السابقة أن عملية الجمع والطرح تتم من خلال العناصر المتناظرة بينها ولا يمكن جمع أو طرح مصفوفتين من رتبتين مختلفتين .

مثال :- اوجد ناتج مايلي :-

١) $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}}$ حيث $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

٢) $\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

٣) $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{أ}}$

الحل : ١) $\underline{\text{أ}} + \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

٢) $\underline{\text{ب}} - \underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 5 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

٣) $\underline{\text{أ}} - \underline{\text{أ}} = \underline{\text{صفر}}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

نهاية محاضرة يوم السبت الموافق ١١ .