محاضرة يوم السبت من الأسبوع العاشر

الباب السابع : المحددات

كيفية ايجاد النظير الضربي لمصفوفة :-

إذا كانت لدينا المصفوفة أ ووجدنا مصفوفة أخرى ولتكن ب حيث

$$\text{أ} \times \text{ب} = \text{ب} \times \text{أ} = \text{مصفوفة الوحدة}$$

عندئذٍ نقول بأن ب هي النظير الضربي للمصفوفة أ .

ويرمز للنظير الضربي للمصفوفة أ بالرمز أ^{-1} .

ولإيجاد النظير الضربي لمصفوفة مربعة من الرتبة ٢، فإنه يمكن استخدام الصيغة التالية :-

نقول إذا كانت

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \end{bmatrix}$$

فإن

$$\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \begin{bmatrix} \text{أ}_{22} & -\text{أ}_{12} \\ -\text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \end{bmatrix} .$$

مثال١ :- اوجد النظير الضربي للمصفوفة

$$\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix} .$$

الحل: الخطوة الأولى: اوجد قيمة المحدد للمصفوفة أ :

$$|\underline{\text{أ}}| = ٤ \times \text{صفر} - (١ \times ١-)$$

$$= \text{صفر} - (١-) = ١ .$$

$$\underline{\text{أ}}^{١-} = \frac{١}{١} \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} = ١ \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$$

للتأكد من صحة الحل :

هل $\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{أ}}^{١-}$ = مصفوفة الوحدة

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ ٤ & ١- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١- & ٤ \\ \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} ٤\times١- + ١\times٤ & ١-\times١- + \text{صفر}\times٤ \\ ٤\times\text{صفر} + ١\times١ & ١-\times\text{صفر} + \text{صفر}\times١ \end{bmatrix}$$

مثال ٣ :- أوجد النظير الضربي للمصفوفة

$$ب = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix} \; ؟$$

الحل :-

١) نجد محدد المصفوفة ب :-

$$|ب| = (١ \times ٣) - (١- \times ٢)$$

$$= ٣ - (٢-) = ٣ + ٢ = ٥$$

$$ب^{١-} = \frac{١}{٥} \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{٢-}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix}$$

وللتأكد من صحة الحل :-

هل ب × ب$^{١-}$ = مصفوفة الوحدة

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ١- & ٣ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{٣}{٥} & \frac{٢-}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ١ \end{bmatrix}$$

$$\frac{٥}{٥} \quad \begin{bmatrix} \frac{١}{٥} \times ٢ + \frac{٣}{٥} \times ١ & \frac{١}{٥} \times ٢ + \frac{٢-}{٥} \times ١ \\ \frac{١}{٥} \times ٣ + \frac{٣}{٥} \times ١- & \frac{١}{٥} \times ٣ + \frac{٢-}{٥} \times ١- \end{bmatrix} \stackrel{؟}{=} \begin{bmatrix} ١ & صفر \\ صفر & ١ \end{bmatrix}$$

$\frac{صفر}{٥}$ $\quad$ $\frac{٥}{٥}$ $\quad$ $\frac{صفر}{٥}$

- طريقة كرامر لحل نظام من معادلات خطية بمتغيرين :-

لنفرض أن لدينا النظام التالي من المعادلات بالصورة العامة :-

$$\text{أ}_{11}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{12}\,\text{س}_2 = \text{ج}_1$$
$$\text{أ}_{21}\,\text{س}_1 + \text{أ}_{22}\,\text{س}_2 = \text{ج}_2 \ .$$

(١) سنعرف محدد المعاملات Δ (دلتا) كما يلي :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} \end{vmatrix}$$ ، بفرض أن $\Delta \neq$ صفر .

حيث نلاحظ أن العمود الأول هو معاملات س_1 والعمود الثاني هو معاملات س_2 .

(٢) سنحدد مصفوفة جديدة من خلال استبدال عناصر العمود الأول (معاملات س_1) في Δ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} \text{ج}_1 \\ \text{ج}_2 \end{vmatrix}$ ونجد محدد هذه المصفوفة ونرمز له بالرمز $\Delta \text{س}_1$:

$$\Delta \text{س}_1 = \begin{vmatrix} \text{ج}_1 & \text{أ}_{12} \\ \text{ج}_2 & \text{أ}_{22} \end{vmatrix}$$

وكذلك سنستبدل عناصر العمود الثاني (معاملات س_2) في Δ بالحدود المطلقة $\begin{vmatrix} \text{ج}_1 \\ \text{ج}_2 \end{vmatrix}$ ونجد محدد هذه المصفوفة ونرمز له بالرمز $\Delta \text{س}_2$.

$$\Delta_{\text{س}_2} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_{21} & \text{ب}_2 \end{vmatrix} .$$

③ لإيجاد قيمة س_1 نقسم $\Delta_{\text{س}_1}$ على Δ ، وقيمة س_2 نحصل عليها من خلال قسمة $\Delta_{\text{س}_2}$ على Δ بمعنى :-

$$\text{س}_1 = \frac{\Delta_{\text{س}_1}}{\Delta} \quad ، \quad \text{س}_2 = \frac{\Delta_{\text{س}_2}}{\Delta} .$$

مثال :- باستخدام طريقة كرامر ، أوجد حل النظام التالي من المعادلات الخطية :-

$$3\text{س}_1 + 4\text{س}_2 = 2$$
$$2\text{س}_1 + 5\text{س}_2 = 3$$

(الصورة القياسية : المتغيرات في طرف والثوابت في الطرف الآخر).

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3\times5 - 2\times4 = 15 - 8 = 7 .$$

$$\Delta_{\text{س}_1} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5 - 3\times4 = 10 - 12 = -2$$

$$\Delta_{\text{س}_2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\times3 - 2\times2 = 9 - 4 = 5 .$$

$$\text{س}_1 = \frac{\Delta_{\text{س}_1}}{\Delta} = \frac{-2}{7} \quad ، \quad \text{س}_2 = \frac{\Delta_{\text{س}_2}}{\Delta} = \frac{5}{7} .$$

مثال :- حل النظام التالي باستخدام قاعدة كرامر

$$4\text{س}_1 - 2\text{س}_2 - 10 = \text{صفر}$$
$$3\text{س}_1 - 5\text{س}_2 - 11 = \text{صفر}$$

الحل: لابد من اعادة كتابة هذا النظام ع الصورة القياسية :-

$$4\text{س}_1 - 2\text{س}_2 = 10$$
$$3\text{س}_1 - 5\text{س}_2 = 11$$

1) نجد محدد المعاملات :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (4 \times -5) - (3 \times -2)$$
$$= -20 - (-6) = -20 + 6 = \underline{-14} \neq 0$$

2) نجد $\Delta\text{س}_1$:

$$\Delta\text{س}_1 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = (10 \times -5) - (11 \times -2)$$
$$= -50 - (-22) = -50 + 22$$
$$= \underline{-28} .$$

3) نجد $\Delta\text{س}_2$:-

$$\Delta\text{س}_2 = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = (4 \times 11) - (3 \times 10)$$
$$= 44 - 30 = 14$$

4) $\text{س}_1 = \dfrac{-28}{-14} \Rightarrow \boxed{\text{س}_1 = 2}$ ، $\text{س}_2 = \dfrac{14}{-14} \Rightarrow \boxed{\text{س}_2 = -1}$

وللتأكد من صحة الحل :-

١٠ = ٢س٢ - ٤س١

١١ = ٥س٢ - ٣س١

(س١ = ٢ ، س٢ = -١)

المعادلة الأولى :-

١٠ = ٢ + ٨ = (-٢) - ٨ = (-١ × ٢) - (٢ × ٤)

المعادلة الثانية :

١١ = ٥ + ٦ = (-٥) - ٦ = (-١ × ٥) - (٢ × ٣)

فقط للتذكير أنه يمكن إعادة كتابة النظام السابق بالصورة :-

٥ = س٢ - ٢س١

١١ = ٥س٢ - ٣س١

نلتقي في الفصل السابع من المحددات