بداية محاضرة يوم السبت من الأسبوع الحادي عشر

متابعة الباب الثامن : المتواليات

* يمكن تصنيف المتواليات الى صنفين :-

١) المتواليات الحسابية :

$$\ldots\ldots ، أ + ٣د ، أ + ٢د ، أ + د ، أ$$

وكان اساس هذه المتوالية هو العدد د ، والحد الأول = أ .

- ويمكن ايجاد قيمة الحد النوني ($ح_ن$) في متوالية حسابية بالصيغة التالية :-

$$ح_ن = أ + (ن - ١)د \quad ، \text{ حيث } ن \in ط .$$

- ويمكن ايجاد قيمة مجموع ن من الحدود ($ح_ن$) في متوالية حسابية حسب الصيغة التالية :-

$$مجـ_ن = \frac{ن}{٢} [٢أ + (ن - ١)د] .$$

- وايضاً يمكن ايجاد مجموع ن من حدود متوالية حسابية إذا علم حدها الأول والأخير بالصيغة التالية :-

$$مجـ_ن = \frac{ن}{٢} [أ + ل] .$$

٢) المتواليات الهندسية :-

$$أ ، أ د ، أ د^{٢} ، أ د^{٣} ، \ldots\ldots$$

حيث كان اساس هذه المتوالية هو العدد د وحدها الأول = أ .

- يمكن ايجاد قيمة الحد النوني ($ح_ن$) في متوالية هندسية من خلال الصيغة التالية :-

$$ح_ن = أ د^{ن-١} \quad ، \text{ حيث ن : عدد طبيعي .}$$

- ولإيجاد مجموع n من الحدود لمتوالية هندسية (S_n)، فإنه يمكنه استخدام الصيغة :-

$$S_n = \frac{أ(د^n - 1)}{د - 1} \quad \text{حيث } د \neq 1 .$$

أيضاً يمكنه إعادة كتابة هذا القانون بالصيغة :-

$$S_n = \frac{أ(1 - د^n)}{1 - د}$$

- وأخيراً يمكنه إيجاد عدد لانهائي من حدود متوالية هندسية ولكن المتوالية الهندسية اللانهائية من خلال الصيغة التالية :-

$$S_\infty = \frac{أ}{1 - د} \quad ، \text{حيث } |د| < 1 .$$

S_∞ ← المجموع اللانهائي

القيمة المطلقة للأساس أقل من 1

مثال : أوجد $ح_5$، S_5، S_∞ للمتوالية الهندسية ٩، ٣، ١، ...

$ح_5$ ← الحد الخامس
S_5 ← مجموع أول 5 حدود
S_∞ ← مجموع الحد اللانهائي

الحل: $أ = 9$

$$د = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

أو $د = \frac{1}{3}$

$$ح_٥ = أ_١ \frac{1 - ر^{ن}}{1 - ر^{٥}}$$

$$= ٩ \left(\frac{١}{٣}\right)^{٥-١}$$

$$= ٩ \left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = \frac{١}{٨١} \times ٩ = \frac{٩}{٨١} = \frac{١}{٩}$$

لاحظ أن المتوالية الهندسية يصبح شكلها بإضافة الحد الرابع والخامس على النحو الآتي:-

$$٩، ٣، ١، \frac{١}{٣}، \frac{١}{٩}، \frac{١}{٢٧}، \ldots$$

بقسمة الحد الخامس على الحد الرابع، ينتج أن:

$$\frac{١}{٩} \div \frac{١}{٣} = \frac{١}{٩} \times \frac{٣}{١} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$$

$$ح_٥ = \frac{أ_١ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

$$= \frac{٩ \left(\left(\frac{١}{٣}\right)^{٥} - ١\right)}{\frac{١}{٣} - ١}$$

$$= \frac{٩ \left(\frac{١}{٢٤٣} - ١\right)}{\frac{١}{٣} - \frac{٣}{٣} \times ١} = \frac{٩ \left(\frac{١}{٢٤٣} - \frac{٢٤٣}{٢٤٣} \times ١\right)}{-\frac{٢}{٣}}$$

$$= \frac{٩ \left(\frac{-٢٤٢}{٢٤٣}\right)}{-\frac{٢}{٣}}$$

$$= ٩ \left(\frac{\text{ج}^{٤}\text{ج}^{-}}{\text{ج}^{٤}\text{ج}^{٢}} \right)^{-\frac{٣}{\text{ج}}} =$$

$$= \frac{\text{ج}^{٤}\text{ج}^{-} \times \text{ج}^{٢} \times ٩^{١}}{\text{ج}^{٤}\text{ج}^{٣} \times \text{ج}^{١}} = \frac{١\text{ج}^{١}}{٩}$$

$$٩^{-٨}$$

الحل الأخير :-

$$\infty^{-٨} = \frac{١}{١-\text{د}} \quad ، \quad |\text{د}| < ١$$

لاحظوا أن: $|\frac{١}{٣}| < ١$ (والشرط يتحقق)

$$\infty^{-٨} = \frac{٩}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{٩}{\frac{٣}{٣} - \frac{١}{٣}} = \frac{٩}{\frac{٢}{٣}}$$

(توحيد المقامات)

$$= \frac{٩}{\frac{٢}{٣}}$$

$$= ٩ \div \frac{٢}{٣} = ٩ \times \frac{٣}{٢} = \frac{٢٧}{٢}$$

مثال : اوجد الحد الثامن ومجموع أول ثمانية حدود من المتوالية ٤، ٨، ١٦، ... .

الحل : لاحظ أن حاصل الحد الثاني ÷ الحد الأول يعطي :

٨ ÷ ٤ = ٢

وكذلك حاصل الحد الثالث ÷ الحد الثاني يعطي :

١٦ - ٨ = ٢

∴ لدينا متوالية هندسية حدها الأول أ = ٤ وأساسها = ٢

المطلوب الأول :- ح٨

ح ن = أ د ^ ن - ١

ح٨ = ٤ (٢) ^ ٨ - ١

= ٤ (٢) ^ ٧ = ٤ (٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢)

= ٤ (١٢٨) = ٥١٢

المطلوب الثاني :- ك٨

ك ن = أ (د ^ ن - ١) / د - ١

= ٤ (٢ ^ ٨ - ١) / ٢ - ١ = ٤ (٢٥٦ - ١) / ١ = ٤ (٢٥٥)

= ١٠٢٠ .

وباستخدام الصيغة الأولى :-

$$S_N = \frac{a_1(1 - r^N)}{1 - r}$$

$$S_8 = \frac{4(1 - 2^8)}{1 - 2} = \frac{4(1 - 256)}{-1}$$

$$= \frac{4(-255)}{-1} = 1020 -$$

لاحظوا أنه لا يمكن استخدام الصيغة

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

في هذا المثال لأن $|r| > 1$ حيث أن قيمة

$r = 2$ $(|2| \not< 1)$.

نلقاكم محاضرة يوم السبت
من الأسبوع الحادي العشر من
الباب الثامن.