

## تفاضل وتكامل

طريقة التكامل:

مشتق  
الجزء  
مشتق  
الجزء  
$$d(u \cdot v) = u \, dv + v \, du$$

تكامل  
$$\Rightarrow \int d(u \cdot v) = \int u \, dv + \int v \, du$$

$$u \cdot v = \int u \, dv + \int v \, du$$

$$\Rightarrow \int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

ملاحظة: التكامل بالتجزئ يستخدم لحساب تكامل حاصل ضرب اثنيتين حيث احدهما وتكامل الاخرى وغالباً فنشقر الى اليمين التي تنتهي بمعرفه تكامل الاخرى

مثال:  
$$\int x \sin x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x - \int 0 \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

تفاضل تكامل

$$\begin{array}{r} \sin x + x \\ -\cos x \leftarrow -1 \\ -\sin x \leftarrow +0 \end{array}$$

$$\int x \sin x \, dx$$

$\downarrow$        $\downarrow$   
 $u$        $dv$

$$dv = \sin x \, dx \quad , \quad u = x$$

نکالو  $\downarrow$                       نکالو  $\downarrow$

$$v = \int \sin x \, dx = -\cos x \quad , \quad du = dx \quad \frac{du}{dx} = 1$$

$$\therefore \int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int (1 - \cos x) \, dx =$$

$\downarrow$        $\downarrow$                        $\downarrow$        $\downarrow$   
 $u$        $dv$                        $v$        $du$

$$= -x \cos x + \sin x + C$$

تذکیر :-

$$\boxed{1} \quad \frac{d}{dx} \left[ e^{f(x)} \right] = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$\nearrow$        $\leftarrow$                        $\nearrow$   
 $f(x)$        $f'(x)$                        $f(x)$

$$\boxed{2} \quad \int e^{f(x)} \cdot f'(x) \, dx = e^{f(x)} + C$$

$\nearrow$        $\leftarrow$                        $\nearrow$   
 $f(x)$        $f'(x)$                        $f(x)$

$$\boxed{3} \quad \frac{d}{dx} \left[ e^{ax} \right] = e^{ax} \cdot a = a e^{ax}$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} \int e^{ax} \cdot a \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

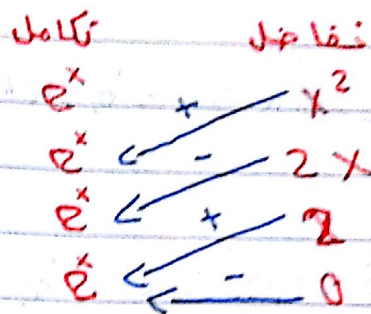
$$\int x^2 e^x \, dx = \frac{1}{2} \int 2x x^2 e^x = \frac{1}{2} x^2 e^x + C$$

$$\int x^2 e^x dx$$

مثال: احسب

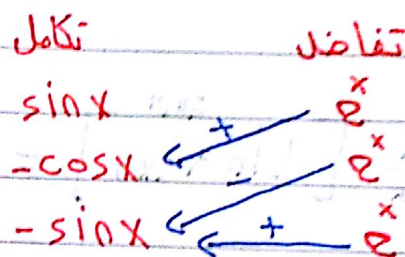
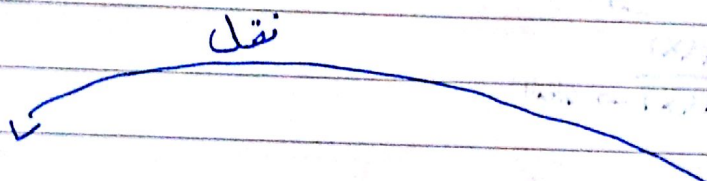
$$\int x^2 e^x = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - \int 0 dx$$

$$x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$



$$\int e^x \sin x dx$$

مثال: احسب



$$\int e^x \sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x + \int e^x \sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\Rightarrow 2 \int e^x \sin x = -e^x \cos x + e^x \sin x$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = -\frac{1}{2} [-e^x \cos x + e^x \sin x]$$

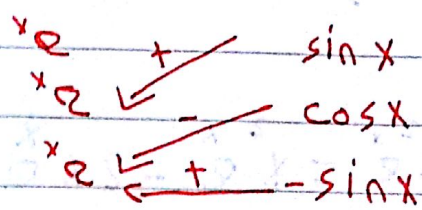
لوعكسنا

نقل

تكامل

نفاخذ

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx - \int e^x \sin x \, dx$$



$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x \, dx = -\frac{1}{2} [e^x \sin x - e^x \cos x] + C$$

$$\textcircled{1} \frac{d}{dx} [\text{Lin}^{\text{الدالة}} F(x)] = \frac{F'(x)^{\text{مشتقة الدالة}}}{F(x)^{\text{الدالة}}}$$

تذكير

$$\textcircled{2} \int \frac{\text{مشتقة المقام}}{\text{المقام}} \, dx = \text{Lin} | \text{المقام} | + C$$

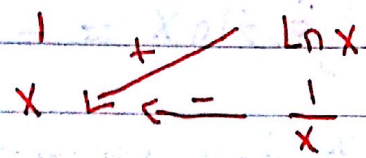
$$\int \ln x \, dx$$

مثال: ا حسب

$$= \int \ln x \cdot 1 \, dx$$

تكامل

نفاخذ



$$x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - x + C$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad \left. \vphantom{\int \sin ax \, dx} \right\} \text{ملاحظة}$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

أمثلة :- ا حسب قيمه انتكاملات التالية

$$\textcircled{1} \int e^{3x} \cdot \cos 2x \, dx$$

$$\therefore \int e^{3x} \cos 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x - \frac{9}{4} \int e^{3x} \cos 2x$$

$$\Rightarrow \int e^{3x} \cos 2x + \frac{9}{4} \int e^{3x} \cos 2x = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x$$

$$\left(1 + \frac{9}{4}\right) \int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x$$

$$\Rightarrow \frac{13}{4} \int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x$$

$$\Rightarrow \int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{4}{13} \left[ \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \cos 2x \right]$$

تكامل	تفاضل
$\cos 2x$	$e^{3x}$
$\frac{1}{2} \sin 2x$	$3e^{3x}$
$-\frac{1}{4} \cos 2x$	$9e^{3x}$

لو عكسنا متحصل على نفس الشيء

تكامل	تفاضل
$e^{3x}$	$\cos 2x$
$\frac{1}{3} e^{3x}$	$-2 \sin 2x$
$\frac{1}{9} e^{3x}$	$-4 \cos 2x$

ونكحل بنفس الطريقة السابقة :-

$$\textcircled{1} \frac{d}{dx} \left[ \tan^{-1} f(x) \right] = \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \tan^{-1} f(x) + C$$

$$\int \frac{\text{مشتق الدالة}}{1 + [u(x)]^2} dx = \tan^{-1} |u(x)| + C$$

$$(3) \frac{d}{dx} [\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(4) \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C$$

مثال: حسب قيمة التكامل

$$\int \tan^{-1} x dx = \int 1 \cdot \tan^{-1} x dx$$

تكامل      نفاذ

$$\begin{array}{l} 1 \\ + \\ x \end{array} \tan^{-1} x$$

$$\begin{array}{l} x \\ - \\ \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

$$\therefore \int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

$$\textcircled{3} \int x^4 e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^4 e^{2x} - 4 \cdot \frac{1}{2} x^3 e^{2x} + \frac{12}{8} x^2 e^{2x} - \frac{24}{16} x e^{2x} + \frac{24}{32} e^{2x}$$

$$- \int 0 dx$$

$$= \frac{1}{2} x^4 e^{2x} - x^3 e^{2x} + \frac{3}{2} x^2 e^{2x} - \frac{3}{2} x e^{2x} + \frac{3}{4} e^{2x} + C$$

تفاضل

كامل

$$\begin{array}{r} x^4 \\ + \\ 4x^3 \\ + \\ 12x^2 \\ - \\ 24x \\ + \\ 24 \\ - \\ 0 \end{array}$$

←

تذكير :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$\int \cos^m x dx \quad \& \quad \int \sin^m x dx$$

← قاعدة الحساب

$$\textcircled{1} \int \sin^m x dx = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x dx$$

$$\textcircled{2} \int \cos^m x dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x dx$$

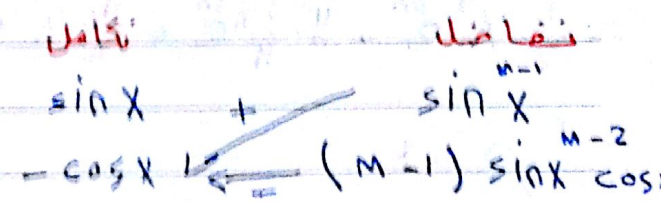
لا موش

$$\sin^m x \equiv [\sin x]^m$$

م = n

الاثبات

$$\textcircled{1} \int \sin^m x \, dx = \int \sin^{m-1} x \sin x$$



$$= -\sin^{m-1} x \cos x + \int (m-1) \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\int \sin^m x \, dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^m x \, dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x - (m-1) \int \sin^m x \, dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^m x \, dx + (m-1) \int \sin^m x \, dx = -\sin^{m-1} x \cos x + (m-1) \int \sin^{m-2} x$$

$m \int \sin^m x \, dx - \int \sin^m x \, dx$

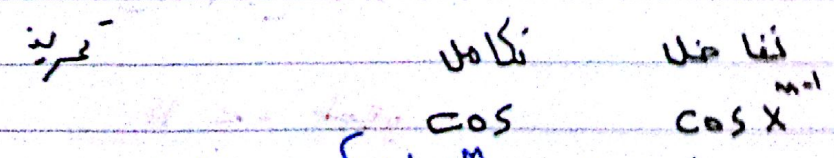
نقسم بس m

$$\Rightarrow \int \sin^m x \, dx = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{(m-1)}{m} \int \sin^{m-2} x$$

وهذا المطلوب

اثبات ٢ بنفس الطريقة حيث

$$\int \cos^m x \, dx = \int \cos^{m-1} x \cos x$$



ملاحظة: هذه الطريقة القاعدية التكرارية لـ  $\int \sin^m x$  و  $\int \cos^m x$



ملاحظة: بتطبيق القاعدة التكرارية لـ  $\int \sin^m x \, dx$  عدة مرات فنحصل بأن

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \quad \text{أو} \quad \int \sin^0 x \, dx = \int 1 \, dx = x + C$$

وأيضاً تكرر بتطبيق قاعدة  $\int \cos^m x \, dx$  فنحصل بأن

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C \quad \text{أو} \quad \int \cos^0 x \, dx = \int 1 \, dx = x + C$$

والأمثلة التالية توضح ذلك.

طبيعي

$$\text{علاقة تكرار الحساب} \equiv \int \cos^m x \, dx, \int \sin^m x \, dx$$

$$\textcircled{1} \int \sin^m x \, dx = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \, dx$$

$$\textcircled{2} \int \cos^m x \, dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x \, dx$$

أمثلة: احسب التكاملات التالية:

$$\textcircled{1} \int \sin^4 x \, dx =$$

$$\rightarrow \int \sin^4 x \, dx \stackrel{m=4}{=} -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx \rightarrow \textcircled{1}$$

$$\rightarrow \int \sin^2 x \, dx \stackrel{m=2}{=} -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int \sin^0 x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + C \rightarrow \textcircled{2}$$

$$\int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \left[ -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x \right] + C$$

$$\int \sin x = -\cos$$

$$(2) \int \sin^5 x \, dx$$

$$\rightarrow \int \sin^5 x \, dx = -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x + \frac{4}{5} \int \sin^3 x \, dx \rightarrow (*)$$

$$\rightarrow \int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} \int \sin x \, dx$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} \cos x + C \rightarrow (**)$$

$$\int \sin^5 x \, dx = -\frac{1}{5} \sin^4 x \cos x + \frac{4}{5} \left[ -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x \right] + C$$

$$(3) \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx$$

$$\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} \int \cos^3 x \, dx \rightarrow *$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \int \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x + C \rightarrow **$$

$$\therefore \int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} \left[ \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x \right] + C$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \, dx = \left[ \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} \left( \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x \right) \right]_0^{\pi/2}$$

$$\begin{array}{l} \sin \pi/2 = 1 \\ \cos \pi/2 = 0 \\ \sin 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \end{array}$$

$$\left( 0 + \frac{4}{5} \left( 0 + \frac{2}{3} \times 1 \right) \right) - \left( 0 + \frac{4}{5} (0 + 0) \right)$$

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

$$\sin^{-1} x = \arcsin x$$

$$\cos^{-1} x = \arccos x$$

1.  $\sin^{-1} x = \arcsin x$

$\sin ax \cdot \cos bx$

- ①  $\int \sin x \cos bx \, dx$       ②  $\int \sin ax \cdot \sin bx \, dx$       ③  $\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$$

- ①  $\int \sin^3 3x \cdot \cos 5x \, dx$

$$= \frac{1}{2} \int [\sin(-2x) + \sin(8x)] \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin 8x \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{16} \cos 8x + C$$

- ②  $\int \sin^2 x \sin 3x \, dx$

$$\frac{1}{2} \int [\cos(-2x) - \cos(4x)] \, dx$$

$$\frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \cos 4x \, dx$$

$$\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$$

- ③  $\int \cos 3x \cos 2x \, dx$

تذكري :-

$$\textcircled{1} \int \sin^m x \, dx = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \, dx$$

$$\textcircled{2} \int \cos^m x \, dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x \, dx$$

ملاحظة :- في بعض الحالات

م اعد ان صيغة موجبه

يمكن حساب التكاملات  $\int \sin^m x \, dx$  و  $\int \cos^m x \, dx$  بطريقتين افرسا

اذا كان  $m$  فرديا نفضل  $\sin x$  او  $\cos x$  ونستقدم القانون

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{و} \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\int \sin^{2k+1} x \, dx = \int \sin^{2k} x \cdot \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \sin x \, dx$$

$$\int \cos^{2k+1} x \, dx \Rightarrow \int \cos^{2k} x \cdot \frac{\cos x}{\text{الفرق}} \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^k \cos x \, dx$$

اذا كان  $m$  زوجي موجب ( $m = 2k$ ) نستقدم

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

نظير

قانون

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

ضعف

الزاوية

$$\int \cos^{2k} x \, dx = \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^k dx$$

$$\int \sin^{2k} x \, dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k dx$$

حساب التكاملات التي على الصورة :-

$$\int \sin^m x \cos^n x dx \quad \text{حيث } m, n \text{ اعداداً موجبة}$$

لدينا ثلاث حالات :

1] إذا كان  $\sin x$  فردياً فإنه نزل  $\sin x$  ونستخدم القانون  
 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  أي أنه

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cdot \sin x \cos^n x dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cdot \sin x \cos^n x dx$$

2] إذا كان  $\cos x$  فردياً فإنه نزل  $\cos x$  ونستخدم العلاقة  
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  أي أنه

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cdot \cos x dx$$

$$= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x dx$$

3] إذا كان  $\sin x$  زوجياً و  $\cos x$  زوجياً نستخدم علاقة ضعف الزاوية

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int \sin^{2k} x \cos^{2l} x dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \cdot \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^l dx$$

امثلة: اوجد التكاملات التالية:

$$\textcircled{1} \int \sin^5 x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \sin^4 x \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

الاساس القوي  
استخدم  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  ونزل  $\sin x$

$$= \int (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \cos^2 x \, dx$$

$$\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cdot \sin x \cos^2 x \, dx$$

$$\int \sin \cos^2 x \sin x - 2 \int \cos^4 x \sin x \, dx + \int \cos^6 x \sin x \, dx$$

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + 2 \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C$$

$$\int (العدد)^n \cdot dy = \frac{(العدد)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$2) \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx$$

التمهل  $\cos x$  و استءضم  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\rightarrow (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x$$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int \sin^2 x \cos x \, dx - \int \sin^4 x \cos x \, dx$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

$$3) \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot (\cos^2 x)^2 \, dx$$

الاس زو بيم قوا ايننا صغف الزاوية

$$= \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \cdot \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x) (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx$$

$$\frac{1}{8} \int 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 2\cos^2 2x - \cos^3 2x \, dx$$

$$\frac{1}{8} \left[ \int 1 \, dx + \int \cos 2x \, dx - \int \cos^2 2x \, dx - \int \cos^3 2x \, dx \right]$$

$$\frac{1}{8} \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x \sin 2x - \frac{1}{4} x - \frac{1}{6} \cos^2 2x \sin 2x - \frac{2}{6} \sin^3 2x \right] + C$$

نفس الكامليا \* \* , y

$$\frac{dy}{2} = dx \iff dy = 2 dx \iff y = 2x$$

$$* = \int \cos^2 2x dx = \int \cos^2 y \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \int \cos^2 y dy$$

$$\begin{aligned} & \overset{m=2}{=} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \cos y \sin y + \frac{1}{2} \int \cos^0 y dy \right] \\ & = \frac{1}{4} \cos y \sin y + \frac{1}{4} y \end{aligned}$$

$$** \int \cos^3 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos^3 y dy$$

$$\begin{aligned} & \overset{m=3}{=} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} \cos^2 y \sin y + \frac{2}{3} \int \cos y dy \right] \\ & = \frac{1}{6} \cos^2 y \sin y + \frac{2}{6} \sin y + C \end{aligned}$$

الرجوع الى الجواب التالي



طريقة تكرار المساب التكاملي  $\int \sec^m x dx$  حيث  $m$  عدد صحيح موجب

صيغة  $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$  ①

$$\int \sec^m x dx = \frac{1}{m-1} \sec^{m-2} x \tan x + \frac{m-2}{m-1} \int \sec^{m-2} x dx \quad (m \geq 2) \quad \text{②}$$

اضرب البسط والعدد في  $\sec + \tan$  اثبات ① :  $\int \sec x dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

$$\int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

اثبات ② :  $\int \sec^m x dx = \int \sec^{m-2} x \sec^2 x dx$

تفاضل:  $\sec^{m-2} x$   
تكامل:  $\sec^2 x$

تكامل بالتجزئة

مثال 1: احسب  $\int \sec^4 x dx$

$$\int \sec^4 x dx = \frac{1}{3} \sec^2 x \tan x + \frac{2}{3} \int \sec^2 x dx$$

$$\frac{1}{3} \sec^2 x \tan x + \frac{2}{3} \tan x + C$$

$$\int \sec^2 x = \tan x$$

$$\int \sec x \tan x = \sec x$$

$$\int \sec^m x \tan^n x \, dx$$

صاحب التكاملات على الصورة

صين  $n, m$  اعداد صحيحة موجبة

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

تذكير :-

لدينا ثلاث حالات :-

الحالة الاولى :- اذا كان اس  $\sec x$  زوجي فانه -

نحول  $\sec^2 x$  ونستخدم القاعدة

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad (\sec^2)^k$$

$$* \int \sec^{2k+2} x \tan^n x \, dx = \int \sec^{2k} x \cdot \sec^2 x (\tan^n x) \, dx$$

$$= \int (1 + \tan^2 x)^k \cdot \sec^2 x \tan^n x \, dx$$

(2) اذا كان اس  $\sec x$  فردي و اس  $\tan x$  فردي

نحول  $\sec x \cdot \tan x$  ونستخدم القاعدة

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$* \int \sec^{2k+1} x \tan^{2j+1} x \, dx = \int \sec^{2k} x \tan^{2j} x \cdot \underbrace{\sec x \tan x}_{\text{متوزع}}$$

$$\int \sec^{2k} x (\sec^2 x - 1)^j \cdot \sec x \tan x \, dx$$

③ إذا كان ~~...~~  $\tan x$  زوجياً

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

نستخدم القاعدة  
لنساعد على تكاملات في

$$\int \sec^m x \tan^{2k} x dx = \int \sec^m x (\sec^2 x - 1)^k dx$$

أمثلة أصعب التكميلات التالية:

①  $\int \sec^4 x \tan^3 x dx$  استخدم  $\sec$  زوجياً  
المرة الأولى

$$= \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \tan^3 x dx$$

$$\int (1 + \tan^2 x) \cdot \sec^2 x \tan^3 x dx$$

$$\int \tan^3 x \cdot \sec^2 x dx + \int \tan^5 x \sec^2 x dx$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{6} + C$$