# الفصل الثالث

## مشتقات الدوال الجبرية

### ١) متوسط التغير :

**إذا كانت** $y = f(x)$ **دالة وكانت** $x_1$ ، $x_2$ **نقطتين في مجال الدالة فإن المقدار** $x_2 - x_1$ **يسمى التغير في x ويرمز له بالرمز** $\Delta x = x_2 - x_1$ **ويقرأ (دلتا x )**

**كما يسمى المقدار** $f(x_2) - f(x_1)$ **التغير في الدالة ويرمز له بالرمز**

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

**كما يسمى الكسر :**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

**متوسط التغير في الدالة عندما تتغير x من** $x_1$ **إلى** $x_2$

**مثال : إذا كانت** $f(x) = x^2 + 3$:

**فأوجد متوسط التغير في هذه الدالة عندما تتغير x من 1 إلى 2**

**الحل :** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(2) - f(1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{7 - 4}{2 - 1} = 3$$

**تمرين 1) إذا كانت** $f(x)=3x^2-2x+1$ **فأوجد متوسط التغير في هذه الدالة عندما تتغير x من -1 إلى 0**

**٢) إذا كانت** $f(x)=\sqrt{x}+2$ **فأوجد متوسط التغير في هذه الدالة عندما**

**تتغير x من 2 إلى 3**

**مفهوم المشتقة :**

**إن مشتقة الدالة** $f(x)$ **ونرمز لها بالرمز** $f'(x)$ **عند النقطة** $(a,f(a))$ **هي :** $f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

**بشرط أن تكون النهاية موجودة**

**أي أن المشتقة هي نهاية متوسط التغير عندما** $\Delta_x\to 0$ **لهذا فهي تسمى معدل التغير في الدالة .**

**مثال : إذا كانت** $f(x)=x$ **أوجد** $f'(1)$

**الحل :** $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=1$

**مثال : إذا كانت** $f(x)=x^2$ **فأوجد** $f'(1)$

**الحل :** $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

**تمرين : إذا كانت** $f(x)=x^3-2x$ **فأوجد** $f'(x)$

## ٣) جبر الاشتقاق

**يمكن حساب المشتقات بالاعتماد على بعض نظريات الاشتقاق التي نلخصها كمايلي :**

**ملاحظة : رموز المشتقة للدالة** $y=f(x)$

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=D_xf(x)=D_xy$$

**a) إذا كانت** $f(x)=mx+b$ **فإن :** $f'(x)=m$

**مثال : أوجد مشتقة الدالة** $f(x)=3x+2$

**الحل :** $f'(x)=3$

**تمرين : أوجد مشتقة الدالة** $f(x)=\frac{-2}{5}x-2$

**b) إذا كانت** $f(x)=c$ **فإن :** $f'(x)=0$

**مثال : أوجد مشتقة** $f(x)=5$ ، $f(x)=-3$

**الحل :**

$f'(x)=0$

**تمرين : أوجد مشتقة ما يلي :** $f(x)=\sqrt{7}$ ، $f(x)=\frac{-3}{4}x+6$

**c) إذا كان** $n\in Q$ **عدد نسبي** ، $f(x)=x^{n}$

**فإن :** $f'(x)=nx^{n-1}$

**وحتى تكون المشتقة معرفة يجب أن تكون** $x\neq 0$ **عندما** $n\leq 0$

**مثال : أوجد مشتقة ما يلي :** $f(x)=x^3$ ، $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ،

$f(x)=\sqrt[3]{x^5}$ ، $f(x)=5x^3+2x^2-3$

**تمرين : أوجد مشتقة ما يلي :**

$f(x)=x^5$

$f(x)=\sqrt[5]{x^3}$

$f(x)=\frac{3}{x^4}$

**d) المشتقة لمجموع عدة دوال بالنسبة للمتغير المستقل يساوي مجموع المشتقات لهذه الدوال بالنسبة لنفس المتغير المستقل .**

**أي أن : إذا كانت الدوال التالية** $f(x)$ ، $g(x)$ **فإن :**

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

**وكذلك في عملية الطرح**

**مثال : أوجد مشتقة ما يلي :** $f(x)=5x^4-3x^2+2x$

**الحل :**

**e) المشتقة لحاصل ضرب دالتين = مشتقة الدالة الأولى x الدالة الثانية**
**+ مشتقة الدالة الثانية x الدالة الأولى**
**ملاحظة الضرب عملية إبدالية**

**مثال : أوجد مشتقة الدالة** $f(x)=(x^2-3)(5x+1)$

**f) المشتقة لخارج قسمة دالتين = (مشتقة البسط x المقام – مشتقة المقام x البسط ) ÷ مربع المقام**

**مثال : أوجد مشتقة الدالة** $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2+2}$

**تمرين : أوجد مشتقة الدوال التالية :**

$$1)f(x)=(x^2-2x)(x-1)$$
$$2)f(x)=(x^3+x)(-2x)$$
$$3)f(x)=\frac{x^3-5x}{x+1}$$
$$4)f(x)=\frac{x}{x^2-4}$$

**g) مشتقة مقلوب الدالة**

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=-\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{f(x)^2}$$

**مثال : إذا كانت** $f(x)=\dfrac{1}{x}$ **أوجد** $f'(x)$

**الحل : بتطبيق القاعدة** $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

**أو طريقة ثانية**

$$f'(x) = x^{-1}$$

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

**تمرين : أوجد مشتقة الدالة التالية :** $f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 + 5}$

**h) قاعدة السلسلة :**

**إذا كانت** $u = g(x)$ ، $y = f(u)$ **فإن :**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

**مثال : أوجد المشتقة للدالة** $y = (3x^2 + 2x - 4)^3$

**الحل:**

**m) إذا كانت :** $y = 3u^2 + 5u + 2$ **وكانت** $x = 7u - 2$

**فأوجد** $\frac{dy}{du}$ ، $\frac{dx}{du}$

**ثم أوجد** $\frac{dy}{dx}$

**الحل :**

**تمرين : 1) إذا كانت** $f(x)=(-2x^5+3x)^3$ **فأوجد** $f'(x)$

**2) إذا كانت** $y=2u^3-3u+1$ **وكانت** $x=5u^2-3$ **فأوجد** $\frac{dy}{dx}$

**٣) أوجد** $\frac{dy}{dx}$ **إذا كانت** $y=\sqrt{u}$ ، $u=x+2$

**٤) الاشتقاق الضمني**

**قد يحدث في بعض الأحيان أن تكون العلاقة بين المتغير المستقل x والمتغير التابع y غي صريحة ، وفي هذه الحالة تكون الدالة على الصورة :**

$f(x,y)=c$ **حيث c مقدار ثابت**

**ولايجاد هذه المشتقة نجري عملية التفاضل بالنسبة ل x لجميع المتغيرات على طرفي المعادلة ويسمى هذا الاشتقاق بالضمني .**

**مثال : أوجد مشتقة الدالة** $x^2+y^2=10$

**الحل :**

**بطريقة أخرى نستطيع إيجاد المشتقة أولا بإيجاد قيمة y ثم نشتق بالنسبة لx**

$$y=\pm\sqrt{10-x^2}$$

**مثال : أوجد المشتقة للدالة التالية :** $4x^2 + xy - 3y^2 = 0$

**الحل :**

**تمرين : أوجد مشتقة الدالة التالية :** $2x^3 + xy^2 - y = 0$

**ملاحظة : إن مشتقة الدالة هي دالة أخرى . لهذا يمكن أن نشتق مرة ثانية فنحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية**

**مثال : أوجد المشتقة الثانية للدالة** $f(x) = x^3 - 2x$

**تمارين**

**١) أوجد المشتقة للدوال التالية :**

**a)** $y = \dfrac{x+3}{x-1}, x \neq 1$

**b)** $y = (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 5)$

**٢) أوجد** $\frac{dy}{dx}$ **إذا كانت :**

$$y = u^3 - 2u$$
$$u = x^2 - 5x + 6$$

**٣) إذا كانت** $y = f(x) = 3x^2 + 4x$ **فأوجد :**

**a)** $y'$ **عندما** $x = 0$

**b)** $f'(1)$

**c)** $\frac{dy}{dx}$ **عندما** $x = -1$

**٤) أوجد مشتقة الدوال التالية :**

**a)** $y = \frac{1}{2x+3}$

**b)** $y = \sqrt[3]{x^2+2}$

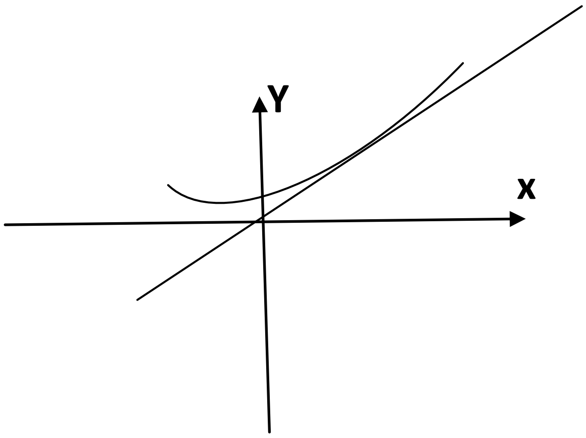
**c) أوجد** $\frac{dy}{dx}$ **إذا كانت : 1)** $x+y=5$ ، **2)** $x^2+3xy+y^2=4$

**٥) أوجد المشتقة الثانية للدالة :** $f(x)=\frac{3x+7}{2x-9}$

## تطبيقات التفاضل على سلوك المنحنيات

**سوف يكون الحديث في هذا البند على الدوال التي توجد مشتقاتها عند كافة النقاط في مجالها ولن نخوض في الصعوبات التي تنشأ في حالة عدم وجود المشتقة كما سنفرض دوما أن مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية .**

- **تفسير المشتقة الأولى هندسيا على أنها ميل المماس لمنحنى الدالة** $y=f(x)$ **عند النقطة** $(a,f(a))$ **إذا كانت مشتقة الدالة** $y=f(x)$ **عند النقطة** $x=a$




**مثال : إذا كانت :** $f(x)=x^2+2x$ **فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة** $f(x)$ **عند x=2**

**الحل :**

**مثال : إذا كانت** $g(x)=x^{2}-2x$ **فأوجد ميل المماس عند x=1**

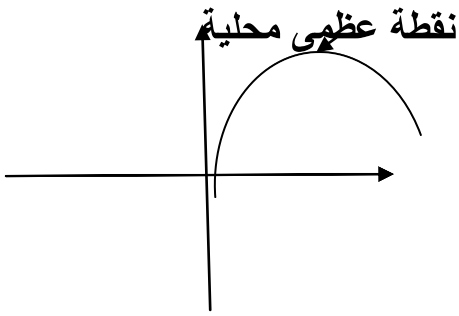
**الحل :**

**2) القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية ومجالات التزايد والتناقص**

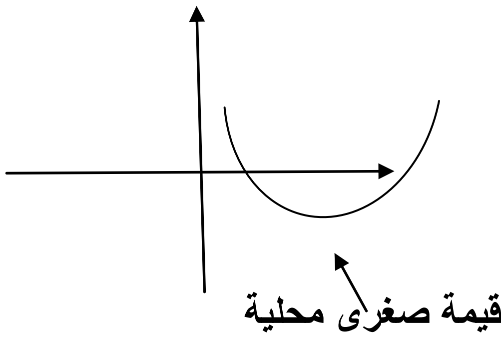
**تعريف :**

**إذا كانت c نقطة في مجال الدالة f فإن :**

**١) f(c) قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b) تحتوي على c بحيث أن :** $f(x)\le f(c)$ **لجميع قيم x في الفترة (a,b)**
**وتكون النقطة (c,f(c)) هي النقطة العظمى المحلية**




**٢) تعتبر f(c) قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة مفتوحة (a,b) تحتوي c بحيث أن** $f(x)\ge f(c)$ **لجميع قيم x**
**وتكون النقطة هي قيمة صغرى محلي**



**مثال : إذا كان** $f(x)=4x^2-2x+3$

**فما هي نقاط القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت ؟**

**الحل :**

**ملاحظة : 1) إذا كان التغير في سلوك الدالة عند النقطة** $(c,f(c))$ **من التزايد قبلها إلى التناقص بعدها فإننا نقول إن النقطة** $(c,f(c))$ **هي قيمة عظمى محلية**

**٢) وإذا كان التغير عند النقطة** $(c,f(c))$ **من التناقص قبلها إلى التزايد بعدها فهي نقطة صغرى محلية**

**حساب القيم العظمى والصغرى المحلية (أسلوب المشتقة الأولى) ومجالات التزايد والتناقص**

**نظرية :**

**١) إذا كانت** $f'(x)>0$ **لجميع قيم x في (a,b) فإن f تتزايد على الفترة [a,b]**

**٢) إذا كانت** $f'(x)<0$ **لجميع قيم x في (a,b) فإن f تتناقص على الفترة [a,b]**

**ملاحظة :**

**إذا غيرت** $f'(x)$ **إشارتها من موجب إلى سالب عند النقطة فإن هذه النقطة هي نقطة القيمة العظمى**

**أما إذا غيرت** $f'(x)$ **إشارتها من سالب إلى موجب فإن النقطة هي صغرى محلية**

**نظرية : إذا كانت الدالة f لها قيمة قصوى محلية (عظمى أو صغرى ) في فترة مفتوحة عند x=c فإن** $f'(x)=0$

**خطوات إيجاد النقاط القصوى ومجالات التزايد والتناقص باستخدام المشتقة الأولى**

**أولا : نوجد المشتقة الأولى** $f'(x)$

**ثانيا : نوجد أصفار المشتقة الأولى أي أن** $f'(x)=0$ **ولتكن c**

**ثالثا : نختبر إشارة** $f'(x)$ **على يمين ويسار النقطة x=c**

**رابعا : نحقق النظرية السابقة**

**لاحظ تحقيق الخطوات في المثال السابق**

**مثال : إذا كانت** $f(x)=3x^2+5x-2$ **فما نقاط القيم القصوى إن وجدت وما مجالات التزايد والتناقص ؟**

**الحل :**

**تمرين : أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى إن وجدت للدالة** $f(x)=-2x^2+3x$ **وأوجد مجالات التزايد والتناقص**

**حساب القيم العظمى والصغرى باستخدام المشتقة الثانية**

**نظرية : إذا كانت** $f'(c)=0$ **وكانت :**

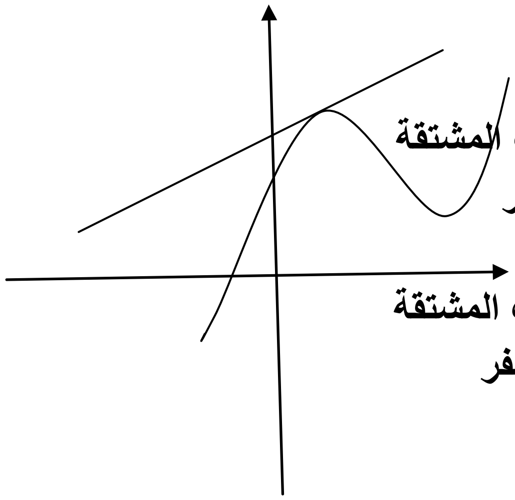
**١)** $f''(c)<0$ **فإن f لها قيمة عظمى محلية عند x=c**
**٢)** $f''(c)>0$ **فإن f لها قيمة صغرى محلية عند x=c**

**مثال : أوجد نقاط القيم العظمى أو الصغرى المحلية للدالة** $f(x)=5x^2-3x+2$

**تمرين : باستخدام أسلوب المشتقة الثانية أوجد نقاط القيم العظمى أو الصغرى للدالة :** $f(x)=-2x^2+3x-1$

## ٣) تقعر المنحنيات ونقاط الانقلاب

**من الشكل المجاور :**



**١) مقعرا لأعلى إذا كانت المشتقة الثانية أكبر من الصفر**

**٢) مقعرا لأسفل إذا كانت المشتقة الثانية أصغر من الصفر على الفترة المعطاة**

**تعريف نقاط الانقلاب :**

**هي النقاط التي عنها يحدث عملية تغيير في اتجاه المنحنى بشكل انقلابي**
**وبطريقة أخرى :**
**إذا كانت $f''(x)$ سالبة قبل نقطة محددة وموجبة بعدها أو العكس تسمى هذه النقطة نقطة الانقلاب**

**خطوات إيجاد نقاط الانقلاب ومجالات التقعر**

**أولا : نوجد المشتقة الأولى والثانية**

**ثانيا : نوجد أصفار المشتقة الثانية ولتكن x=e**

**ثالثا نختبر إشارة $f''(x)$ على يسار ويمين x=e**

**مثال : أوجد نقاط الانقلاب ومجالات التقعر للدالة** $f(x)=2x^3+3x^2-36x-27$

**الحل :**

**تمرين : أوجد نقاط الانقلاب ومجالات التقعر للدالة** $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 2$

## 4) رسم المنحنيات

**يمكننا استخدام خواص المشتقات من حيث المقدار والإشارة عند نقطة معينة لرسم منحنى الدالة**

**خطوات الرسم :**

**١) تحديد النقاط القصوى ونوع كل منها**
**٢) تحديد فترات التزايد وفترات التناقص**
**٣) تحديد نقاط الانقلاب وفترات التقعر للأعلى وللأسفل**
**٤) تحديد نقاط تقاطع المنحنى مع المحورين**

**مثال : أرسم منحنى الدالة** $f(x)2 = x^3 - 3x^2 + 4$

**الحل**

**تمارين عامة**

**١) عين المجالات التي تكون فيها الدالة** $y = x^3 - x$ **متزايدة**

**٢) عين المجالات التي تكون فيها الدالة** $y = 1 - x^2$ **متناقصة**

**٣) أوجد القيم العظمى والصغرى في حالة وجودها للدالة :** $y = (x-2)^2 + 1$

**٤) أوجد ميل المماس وميل العمودي لكل من المنحنيات التالية :**

**a)** $y = 3x^2 + 5$ **عند** $(0,5)$

**b)** $y = \dfrac{3x}{x-1}$ **عند** $(2,6)$

**٥) أوجد معادلة المماس على كل من منحنيات الدوال التالية :**

**a)** $y = 3 - x$ **عند** $(1, 2)$

**b)** $y = 8$ **عند** $(1, 8)$

**٦) أوجد مجالات التزايد والتناقص لما يلي :**

**a)** $y = 3x^2 - 4x + 1$

**b)** $y = 2 - 3x$

**٧) أوجد القيم العظمى والقيم الصغرى ثم أوجد مجالات التقعر وكذلك نقطة الانقلاب**

**a)** $y = -x^2$

**b)** $y = 3x^2 - 5x + 1$

**٨) أرسم منحنى الدالة :** $y = x^2 - 2x + 1$

## ٥) تطبيقات اقتصادية على الاشتقاق

### ١) دليل الطلب :

**تسمى سرعة تغير السعر P بالنسبة إلى كمية الطلب $q_d$ بدليل الطلب أي أن**

**دليل الطلب = $\frac{dp}{dq_d}$**

**مثال : يرتبط طلب وحدات من سلعة معينة ما $q_d$ بسعر البيع P بالمعادلة $p^2 + 20q_d - 100 = 0$ حيث تقدر P بالريال و $q_d$ بآلاف الوحدات**

**أوجد دليل الطلب :**

**الحل :**

**تمرين : إذا كانت معادلة الطلب هي : $p^2 + 5q_d + 200 = 0$ فأوجد دليل الطلب**

### ٢) دليل الإنتاج (التكلفة الحدية )

**تجد بعض الشركات أن الكلفة c لإنتاج q وحدات من إحدى السلع هي :**

$$c = f(q) = a + bq + \frac{e}{q} + mq^2$$

**حيث : a كلفة ثابتة إضافية لا تعتمد على عدد الوحدات المنتجة ، b تكاليف إنتاج وحدة واحدة بالريال**

**$b_q$ يمثل تكاليف q من الوحدات ، e عدد موجب فإن $\frac{e}{q}$ يتناقض مع تزايد q فيصبح أفضل اقتصاديا ولكن إذا زادت q كثيرا فإن الحد $mq^2$ المسمى بالكابح يزيد من قيمة التكاليف .**

**وبصورة عامة إذا كانت c(q) هي كلفة إنتاج q من الوحدات تسمى c دالة التكلفة لهذه السلعة . وإذا كانت f قابلة للاشتقاق كان $\frac{dc}{dq}$ هو سرعة تغير الكلفة بالنسبة للإنتاج وهذا يسمى بدليل الإنتاج .**

**دليل الانتاج = $\frac{dc}{dq}$ وتكون الكلفة أقل ما يمكن عندما يكون هذا الدليل يساوي صفر.**

**مثال : قدرت إحدى الشركات أن التكلفة c(q) لصنع q وحدات هي بالتقريب :**

$$c(q) = 100 + \frac{10}{q} + \frac{q^2}{200}$$

**فكم وحدة تصنع حتى تكون الكلفة أقل ما يمكن ؟**

**الحل :**

**تمرين : إذا كانت** $c(q) = 50 + \frac{5}{q} + \frac{q^2}{125}$ **فأوجد عدد الوحدات المصنعة حتى تكون الكلفة أقل ما يمكن .**

## ٣) الربح (الفائدة )

**إذا كانت شركة تنتج q وحدة من السلع فإن الربح والإيراد والتكاليف تعتمد على الكمية المنتجة من هذه السلعة حسب العلاقة التالية :**

**الربح = الإيراد - التكاليف**

$$D(q) = R(q) - C(q)$$

**ولجعل الربح أكبر ما يمكن نضع** $D'(q) = \frac{dD}{dq} = 0$

**أي أن** $R'(q) - C'(q) = 0$

**ومنها** $R'(q) = C'(q)$

**أي يكون الربح أكبر ما يمكن عندما تكون عدد الوحدات q عندما التكلفة الحدية تساوي الإيراد الحدي**

**مثال : جد القيمة العظمى للربح إذا كان الإيراد =** $40q - q^2$ **والتكلفة =** $10 + 5q + \frac{q^2}{4}$

**الحل :**

## ٤) مرونة الطلب

**إذا كانت** $y = f(x)$ **فإن مرونة هذه الدالة بالنسبة إلى x تساوي** $E = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$

**وبشكل خاص إذا كانت** $q_d = f(p)$ **دالة الطلب في السعر فإن :**

**مرونة الطلب هي :** $E_d = \frac{p}{q_d} \cdot \frac{dq_d}{dp}$

**مثال : إذا كان منحنى دالة الطلب على سلعة معينة هو** $P = 15 - 3q_d$ **فأوجد مرونة الطلب عندما** $q_d = \frac{1}{3}$

**الحل :**

**تمرين : إذا كان منحنى دالة الطلب على سلعة معينة هو** $P = 8 - 4q_d$ **فأوجد مرونة الطلب عندما** $q_d = \frac{1}{2}$

## ٥) الدخل الحدي (الإيراد الحدي )

**إذا كانت $P = g(x)$ تمثل السعر الذي تباع به كل وحدة من بضاعة ما .**
**تسمى p دالة الطلب إذا كانت x تمثل عدد الوحدات المباعة ويكون الدخل (الإيراد) الكلي T الناتج عن هذه المبيعات هو :**

$$T = Px = xg(x)$$

**الدخل الحدي أو الإيراد الحدي عند بيع الوحدة رقم n هو : $\frac{dT}{dx}$ عند $x = n$**

**مثال : إذا كان الدخل T الناتج عن بيع x من علب الزيتون معطى بالمعادلة : $T = \frac{x^2}{10} + 10x$ فأوجد الدخل الكلي الناتج عن بيع 200 علبة وأوجد الدخل الحدي الناتج عن بيع العلبة العاشرة**

**الحل :**

**تمرين : إذا كان الدخل T الناتج عن بيع x من علب الحليب معطى بالمعادلة : $T = \frac{x^2}{5} + 5x$ فأوجد الدخل الكلي الناتج عن بيع 100 علبة وأوجد الدخل الحدي الناتج عن بيع العلبة رقم ثلاثون**

## ٦) مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية

### ١) مشتقة الدالة اللوغاريتمية

**إذا كانت** $f(x) = \log_e x$ **فإن :** $f'(x) = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$

**أي أن :** $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} dx$$

**إذا كانت** $f(x)=\log_a x$ **فإن :** $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$

**مثال : إذا كانت** $f(x)=\log(1+x^2)$ **فأوجد** $f'(x)$

## ٢) مشتقة الدالة الأسية

**إذا كانت** $f(x)=e^x$ **فإن :** $f'(x)=e^x dx$

**مثال : إذا كانت** $f(x)=x\ln x$ **فأوجد** $f'(x)$

**مثال إذا كانت** $f(x)=x^3e^x$ **فأوجد** $f'(x)$

**تمرين : إذا كانت** $f(x)=e^{3x^2+5}$ **فأوجد** $f'(x)$

**ملاحظة : إذا كانت** $f(x)=e^{g(x)}$

**فإن :** $f'(x)=e^{g(x)}g'(x)$

## ٣) مشتقات الدوال المثلثية

**١) إذا كانت** $f(x)=\sin(x)$

**فإن :** $f'(x)=\cos(x)dx$

**٢) إذا كانت** $f(x)=\cos(x)$ **فإن :** $f'(x)=-\sin(x)dx$

**مثال : إذا كانت** $f(x) = (\sin x)^2$ **أوجد** $f'(x)$

**مثال : أوجد مشتقة** $f(x) = \cos(5x)$

**مثال : أوجد مشتقة** $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

**مثال : إذا كانت** $f(x) = \tan(x)$ **أوجد** $f'(x)$

# تمارين عامة

**١) أوجد مشتقات الدوال التالية :**

$$1)f(x) = x^3 + 5xe^x$$
$$2)f(x) = x^2 + \ln x$$
$$3)f(x) = x^2 \ln x - 5e^x$$
$$4)y = x^3 e^{-3x}$$
$$5)y = (x^2+5)^4 e^{3x}$$

**٢) أوجد مشتقات الدوال المثلثية التالية :**

$$1)f(x) = 3x \sin 5x - 2\cos x$$
$$2)f(x) = \cos(x^2 - 3x + 1)$$
$$3)f(x) = \cot(x)$$
$$4)f(x) = \sec(x)$$
$$5)f(x) = \sin^3(x)$$