جامعة الإمام عبدالرحمن بن فيصل
IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

وكالة التعليم الالكتروني و التعلم عن بعد

1439هـ-2017م

د. رائد الخصاونة

مقرر الرياضيات للإدارة

المستوى الثاني

الفصل الرابع

التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- **متوسط التغير:**

تعريف: إذا كانت $y = f(x)$ دالة, فان أي زيادة في المتغير المستقل x مقدارها Δx تحدث تغييرا في المتغير التابع y مقداره Δy. النسبة بين تغير في y الى التغير في x يسمى متوسط تغير الدالة. وبالرموز:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

لأي x_1 و x_2 في مجال الدالة

وحيث $x_2 = x_1 + \Delta x$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

❑ مثال (1): أوجد متوسط التغير للدالة $f(x) = x^2 + 2$ عندما تتغير x من 1 الى 1.5؟

الحل:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 1.5$$

$$f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$f(1.5) = (1.5)^2 + 2 = 2.25 + 2 = 4.25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4.25 - 3}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- مثال(2): أوجد متوسط التغير للدالة $f(x) = 3x + 2$ عندما تتغير x من 1 الى 2؟

الحل:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2$$

$$f(1) = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$f(2) = 3 \times 2 + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8-5}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- **مثال(3):** أوجد متوسط التغير للدالة $f(x) = x^3 + 5$ عندما تتغير x من 0 الى 2؟

الحل:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$

$$f(0) = 0^3 + 5 = 5$$

$$f(2) = 2^3 + 5 = 8 + 5 = 13$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{13 - 5}{2 - 0} = \frac{8}{2} = 4$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

المشتقة الأولى:

تعريف: نهاية متوسط التغير للدالة $f(x)$ عندما $\Delta x \to 0$ (إن وجدت) تسمى المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمزلها بأحد الرموز التالية:

$$\frac{d}{dx} f(x), \quad y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}$$

وبالرموز, يعبرعن مشتقة الدالة $f(x)$ كما يلي:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للاشتقاق (التفاضل).

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- مثال: إذا كانت $f(x) = x^2$, أوجد $f'(x)$ باستخدام التعريف العام للاشتقاق؟

الحل: أولا نلاحظ أن:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

ومن خلال استخدام التعريف العام للاشتقاق, نحصل على:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}$$

اخراج عامل مشترك

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x+\Delta x) = 2x$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

قوانين الاشتقاق:

1- مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفر دائما:

تعريف: إذا كانت $f(x) = c$ حيث c عدد ثابت, فإن $f'(x) = 0$.

مثال: أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$1)\ y = 5 \to y' = 0$$

$$2)\ y = -10 \to \frac{dy}{dx} = 0$$

$$3)\ y = \frac{3}{4} \to f'(x) = 0$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

2- مشتقة الدالة الخطية تساوي معامل المتغير x فقط:

تعريف: إذا كانت $f(x) = cx$ حيث c عدد ثابت, فإن $f'(x) = c$.

- **مثال:** أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$1)\ y = 5x \rightarrow y' = 5$$

$$2)\ y = -10x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -10$$

$$3)\ y = \frac{3}{4}x \rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

3- مشتقة الدالة $f(x) = x^n$:

تعريف: إذا كانت $f(x) = x^n$ حيث n عدد حقيقي, فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

❑ **مثال:** أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$1)\, y = x^2 \rightarrow y' = 2x$$

$$2)\, y = x^{-5} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$$

$$3)\, y = x^{-2} \rightarrow f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

$$4)\, y = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$5)\, y = x^{-\frac{3}{2}} \rightarrow y' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

❑ ملاحظات: (العلاقة بين الصورة الجذرية والصورة الأسية الكسرية لمقدارجبري)

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

فمثلا:

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}, \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$$

مثال: أوجد مشتقة الدوال التالية:

$1) f(x) = \sqrt[4]{x},$ $\qquad$ $2)\ y = \sqrt{x^3}$

الحل:

$$1)\ f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-\frac{4}{4}} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$$

$$2)\ y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

4- مشتقة الدالة $f(x) = cx^n$

تعريف: إذا كانت $f(x) = cx^n$, حيث n عدد حقيقي, فإن $f'(x) = ncx^{n-1}$

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

$$1)\, y = 3x^4$$

$$2)\, y = -2x^7$$

$$3)\, y = 16x^{\frac{1}{2}}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- الحل:

$$1)\; y = 3x^4 \rightarrow y' = 3 \times 4 \times x^{4-1} = 12x^3$$

$$2)\; y = -2x^7 \rightarrow y' = -2 \times 7 \times x^{7-1} = -14x^6$$

$$3)\; y = 16x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 16 \times x^{\frac{1}{2}-1} = 8x^{-\frac{1}{2}}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

5- مشتقة الدالة على الصورة

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث $n \neq 0$

تعريف: إذا كانت الدالة $f(x)$ والمكتوبة بالصورة اعلاه, فإن مشتقة تلك الدالة تعطى بالصورة التالية:

$$y' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- **مثال:** أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 15x^2 - 4x + 7$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- **مثال:** أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$y = -2x^{-2} - 4x^{3} + 2x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{x} - 10$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^{-2-1} - 12x^{3-1} + \frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= 4x^{-3} - 12x^{2} + \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

❑ مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = \frac{2}{5}x^5 - 4x - 2x^{\frac{7}{2}} + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{9}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2x^{5-1} - 4 - 7x^{\frac{7}{2}-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= 2x^4 - 4 - 7x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

6- مشتقة الدالة $y = [f(x)]^n$

تعريف: إذا كانت $y = [f(x)]^n$, حيث n عدد حقيقي, فإن

$$y' = n[f(x)]^{n-1} \times f'(x)$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدالة التالية:

$$y = (2x^2 + 5)^8$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8(2x^2 + 5)^7 . 4x = 32x(2x^2 + 5)^7$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدالة التالية:

$$y = \left(-3x^2 - 4x\right)^{-4}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -4\left(-3x^2 - 4x\right)^{-4-1} . (-6x - 4)$$

$$= (24x + 16)\left(-3x^2 - 4x\right)^{-5}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدالة التالية:

$$y = \left(-3x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[5]{x}\right)^3$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(-3x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[5]{x}\right)^{3-1} \cdot \left(-3 \times \frac{2}{3} \times x^{\frac{2}{3}-1} - \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}\right)$$

$$= \left(-3x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[5]{x}\right)^2 \left(-6x^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}}\right)$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

- مسائل وتمارين: أوجد مشتقة الدوال التالية

$$1)\ y = 4x^2 - 3x^4$$

$$2)\ y = -3x^{\frac{3}{4}} + 1$$

$$3)\ y = \sqrt{3}\left(x^5 - x^{-3}\right)$$

$$4)\ y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$$

$$5)\ y = (4x^2 + 5x - 2)^8$$

نهاية المحاضرة المسجلة الثامنة

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح