

مقرر الرياضيات للإدارة
المستوى الثاني

تابع الفصل الرابع

التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته



جامعة الإمام عبد الرحمن بن فيصل
IMAM ABDULRAHMAN BIN FAISAL UNIVERSITY

كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع
وكالة التعليم الإلكتروني والتعلم عن بعد

١٤٣٩هـ - ٢٠١٧م

د. رائد الخصاونة



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

□ تابع قوانين الاشتقاق:

٧- مشتقة حاصل ضرب دالتين:

تعريف: إذا كانت $y = f(x) \times g(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين

=

مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية × الدالة الأولى



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال 1: أوجد مشتقة الدالة التالية:

$$y = (x^2 + 1)(2x^3 - 2)$$

مشتقة الدالة
الاولى

مشتقة الدالة
الثانية

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x(2x^3 - 2) + 6x^2(x^2 + 1) \\ &= 4x^4 - 4x + 6x^4 + 6x^2 \\ &= 10x^4 + 6x^2 - 4x \end{aligned}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال 2: أوجد مشتقة الدالة التالية:

$$y = (-3x^{-2} - 5) \left(\frac{1}{2} x^2 \right)$$

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 6x^{-3} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) + x(-3x^{-2} - 5) \\ &= 3x^{-1} - 3x^{-1} - 5x \\ &= -5x \end{aligned}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال 3: أوجد مشتقة الدالة التالية:

مشتقة الدالة
الاولى

$$y = (3x - 5)^{\frac{1}{3}} (x^2 - 7)$$

مشتقة الدالة
الثانية

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3} (3x - 5)^{-\frac{2}{3}} (3) (x^2 - 7) + 2x (3x - 5)^{\frac{1}{3}} \\ &= (3x - 5)^{-\frac{2}{3}} (x^2 - 7) + 2x (3x - 5)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

٨- مشتقة حاصل قسمة دالتين:

تعريف: إذا كانت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين =

دالة المقام × مشتقة دالة البسط - دالة البسط × مشتقة دالة المقام

دالة المقام تربيع



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال 1: أوجد مشتقة الدالة التالية:

$$y = \frac{5x^3}{3-x}$$

مشتقة دالة البسط

مشتقة دالة المقام

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(3-x)(15x^2) - (5x^3)(-1)}{(3-x)^2} \\ &= \frac{45x^2 - 15x^3 + 5x^3}{(3-x)^2} = \frac{45x^2 - 10x^3}{(3-x)^2} \end{aligned}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال ٢: أوجد مشتقة الدالة التالية:

$$y = \frac{2x + 5}{3x - 4}$$

مشتقة دالة البسط

مشتقة دالة المقام

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(3x - 4)(2) - (2x + 5)(3)}{(3x - 4)^2} \\ &= \frac{6x - 8 - 6x - 15}{(3x - 4)^2} = \frac{-23}{(3x - 4)^2} \end{aligned}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال ٣: أوجد مشتقة الدالة التالية:

$$y = \frac{2x^{-\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(2x^{\frac{1}{2}})(-x^{-\frac{3}{2}}) - (2x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}})}{(2x^{\frac{1}{2}})^2} \\ &= \frac{-2x^{-1} - 2x^{-1}}{4x} = \frac{-4x^{-1}}{4x} = -\frac{x^{-1}}{x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

□ نتيجة: إذا كانت $y = \frac{c}{g(x)}$ حيث c عدد ثابت فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال: اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \frac{3}{x^2 - 2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(2x)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 2)^2}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

مثال: اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = \frac{-5}{x - 2}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(-5)(1)}{(x - 2)^2} = \frac{5}{(x - 2)^2}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

□ مثال: اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = \frac{1}{3x - x^3}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{- (1)(3 - 3x^2)}{(3x - x^3)^2} = \frac{-3 + 3x^2}{(3x - x^3)^2}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

9- (قانون السلسلة): إذا كانت $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

□ مثال: إذا كانت $y = u^2 + 5u$ ، $u = x + 3$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ ؟

الحل: $\frac{du}{dx} = 1$ ، $\frac{dy}{du} = 2u + 5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u + 5)(1) = 2(x + 3) + 5 = 2x + 11$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

□ مثال: إذا كانت $y = 5u^2 - 3$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ ؟

الحل:

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \frac{dy}{du} = 10u$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (10u)(2x) = 10(x^2 - 2)(2x) \\ &= 20x^3 - 40x \end{aligned}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

□ مثال: إذا كانت $y = -4u^2 - 1$ ، $u = \frac{1}{2}x$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ ؟

الحل:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dy}{du} = -8u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-8u) \left(\frac{1}{2}\right) = -4(u) = -4\left(\frac{1}{2}x\right) = -2x$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

المشتقات العليا: □

عندما نشتق الدالة $f(x)$ للمرة الثانية فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية ويرمز لها بأحد الرموز التالية:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, f''(x), y''$$

أما عندما نشتق الدالة $f(x)$ للمرة الثالثة فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثالثة ويرمز لها بأحد الرموز التالية:

$$\frac{d^3 y}{dx^3}, f'''(x), y'''$$

وهكذا



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

□ مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة

$$y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$$

الحل:

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

□ مثال: أوجد المشتقات الأربعة الأولى للدالة

$$y = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + x - 1$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 4x + 1$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 80x^3 + 36x^2 - 48x + 4$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 240x^2 + 72x - 48$$

$$\frac{dy^4}{dx^4} = 480x + 72$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

□ مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة

$$y = -2x^{-5} - 3x^3$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 10x^{-6} - 9x^2$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = -60x^{-7} - 18x$$

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 420x^{-8} - 18$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

□ مسائل وتمارين:

١. أوجد مشتقة الدوال التالية

$$i) y = 4x^2 - 3x^4$$

$$ii) y = (2x^5 - 1)(5x^3 + 7x)$$

$$iii) y = \sqrt{3}(x^5 - x^{-3})$$

$$iv) y = \frac{2x - 1}{2x + 1}$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

$$v) y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)$$

$$vi) y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$$

$$vii) y = \frac{1}{2x + 3}$$

$$viii) y = (4x^2 + 5x - 2)^8$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

٢. أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت:

$$i) y = u^3 - 2u \quad , \quad u = x^2 - 5x + 6$$

$$ii) y = u^2 - 2u^{-2} \quad , \quad u = x^2 + 2$$

$$iii) y = 5u \quad , \quad u = 3x + 7$$



الفصل الرابع: التفاضل (الاشتقاق) وتطبيقاته

3. أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال التالية:

$$i) y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

$$ii) y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$$

$$iii) y = \frac{-1}{2x}$$



نهاية المحاضرة المسجلة التاسعة

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح