المحاضرة الأولى

الأعداد الطبيعية

- مثل الأعداد (... , 3 , 2 ,1) وتسمى الأعداد الصحيحة الموجبة.
- ويمثل الرقم (1) وحدة قياس و (2) هو تكرار وحدة القياس مرتين وهكذا

الأعداد غير الصحيحة

- وهى الأعداد النسبية وهى عبارة عن النسبة بين عددين صحيحين ويكون المقام لا يساوى صفر.
- مثل: $\frac{2}{7}, \frac{-5}{3}, \frac{3}{9}, \frac{-3}{8}, \ldots$
- وأي عدد لا يمكن كتابتة على الصورة النسبية مثل $\sqrt{2}$ و $\sqrt[4]{6}$ يسمى عدد غير نسبي.

القيمة المطلقة

- :القيمة المطلقة لأى عدد هى قيمة العدد بدون النظر إلى الأشارة التى سبق العدد.
- هذا يعنى أن القيمة المطلقة هى عدد موجب دائماً.
- ويرمز للقيمة المطلقة للعدد x بــ $|x|$

مثال:

- أوجد القيمة المطلقة للمقادير التالية :

$$-5 \quad ,11 \ , \frac{-3}{4}, \frac{1}{9}$$

الحل

جمع المقادير الجبرية

لجمع المقادير فأننا نستخدم العلامة (+) لدلالة على عملية الجمع والتى تمثل عملية إضافة.

مثل:

$$2 + 5 = 7$$
$$7 + 4 = 11$$
$$2x + 3x = 5x$$

يشترط لجمع أى مقدران جبريان أن يكونا من نفس النوع

فمثلاً: $2x + 5y$

لا يمكن جمعهما ويظل المقدار كما هو.

مثال:

$$3a + 8b + 9a + 2b$$

= 12a+10b

مثال:

أوجد ناتج حاصل جمع المقادير التالية:

$$7x+5y+9xy \quad , \; 8x+2y$$

الحل

7x+5y+9xy

8x+2y

15x+7y+9xy

طرح المقادير الجبرية:

لطرح المقادير فأننا نستخدم العلامة (-) لدلالة على عملية الطرح والتى تمثل عملية صرف أو سحب.

مثال:

إذا كان لديك 10 ريالات وتم شراء حلويات بـ 6 ريالات فأن المتبقى معك يكون 4 ريالات.

يمكن التعبير عن ذلك رياضياً كما يلى:

$$10-6=4$$

أى أن المقدار المصروف أو المسحوب نضع أمامه أشارة سالب.

لذلك عند إجراء عملية الطرح يتم تغيير أشارة العدد أو المقدار الجبرى المراد طرحة ثم نطبق قاعدة الجمع.

مثال:

اوجد ناتج $5x-3x$ ؟

الحل: 2x

مثال:

أوجد ناتج $7y-12y$ ؟

الحل: 5y

نلاحظ أن أشارة المقدار الأكبر هى سالبة لذلك عند الطرح نضع الفرق بين المقداران مع أشارة المقدار الأكبر.

مثال

أوجد ناتج جمع المقادير التالية: $2x+7y \quad , \; -2x-6y \; , \; 8x-3y$

الحل:

نلاحظ أن عند جمع مقدارن جبريان متساويان فى القيمة ومختلفان فى الأشارة

فأن حاصل جمعهما يساوى صفر.

مثال:

اوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية: $2x+4y-3z,\quad -4x-5z+2y,\quad 6z+7x-8y$

الحل :

نلاحظ أن المقادير الثلاث السابقة غير مرتبة لذلك فأننا عند جمعها

لابد من ترتيبها مع مراعاه كتابة أى مقدار بنفس الأشارة التى هو عليها كما يلى:

2x+4y-3z

-4x+2y-5z

7x-8y+6z

5x-2y-2z

مثال:

أوجد ناتج $(4x+2y)-(2x+5y)$

الحل:

نلاحظ وجود أشارة سالب أمام القوس الثانى لذلك عنك فك القوس لابد من تغيير جميع اشارات المقادير التى بداخل القوس كما يلى:

(4x+2y) - (2x+5y) = 4x+2y-2x-5y

= 2x-3y

مثال:

أوجد ناتج $(3x^2-3x+2)-(x^2-3x+11)$

الحل:

$$\begin{aligned}&(3x^2-3x+2)-(x^2-3x+11)\\&=3x^2-3x+2-x^2+3x-11\\&=2x^2-9\end{aligned}$$

مثال:

أطرح المقدار $7x+2y$ من $6x+5y$

الحل:

(6x+5y) - (7x+2y)

= 6x+5y - 7x-2y

= -x+3y

= 3y-x

نلاحظ أن المقدار الذى ذكر بعد حرف " من " هو الذى يكتب اولاً.

مثال: أطرح المقدار $7a^2-5ab+8b^2$ من $3a^2+ab-5b^2$

الحل:

$$\left(3a^2+ab-5b^2\right)-\left(7a^2-5ab+8b^2\right)$$
$$=3a^2+ab-5b^2-7a^2+5ab-8b^2$$
$$=-4a^2+6ab-13b^2$$

إيجاد قيمة المقادير الجبرية

ويقصد به عملية التعويض بقيمة المتغيرات الموجود ه بالمقدار الجبرى لإيجاد قيمه هذا المقدار.

مثال:

إذا كان $x=2,\quad y=3\ , z=5$

أوجد قيمة المقدار $3x-7y+9z$ ؟

الحل:

3(2)-7(3)+9(5)

=6-21+45

=30

مثال :

أوجد قيمة المقدار $3a-4b+6c$

إذا كان $a=3\ ,\ b=-2\ ,\ c=-1$

الحل: 3(3)-4(-2)+6(-1)

=9+8-6=11

المحاضرة الثانية

ضرب المقادير الجبرية

عملية الضرب تعرف حسابياً على أنها عدد مرات تكرار الجمع لعدد معين.

فمثلاً $6+6+6+6+6=6\times5=30$

عند ضرب المقادير الجبرية لابد من مراعاة قاعدة الإشارات كما فى الجدول التالى:

+	=	+	×	+
−	=	−	×	+
−	=	+	×	−
+	=	−	×	−

أى أنه إذا اتحدت الإشارات تكون الإشارة " + " أما إذا اختلفت الإشارات تكون "− "

مثال:

$$3\times7=21$$
$$-2\times11=-22$$
$$-5\times-4=20$$
$$7\times4x=28x$$
$$2x\times-5y=-10xy$$

نلاحظ أن $x\ y$ **هى نفسها** $x\times y$ **وهى إيضاً** $x\,.\,y$

مثال:

أوجد ناتج $2(4x-3y)+3(7x+9y)-(x-4y)$ ؟

الحل: $2(4x-3y)+3(7x+9y)-(x-4y)$

$$=8x-6y+21x+27y-x+4y$$
$$=28x+25y$$

مثال:

أوجد ناتج $2a(3-4b)-4b(5-3a)$ ؟

الحل: **2a(3-4b) - 4b(5-3a)**

=6a-8ab-20b+12ab

= 6a+4ab-20b

قاعدة هامة:

إذا اتحدت الأساسات فأنة عند الضرب تجمع الأساس

مثال : إذا كان المقدار x^5 فأن x^5 ← أس ، x ← أساس

مثال:

أوجد ناتج $x^5 \times x^3$ ؟

الحل:

$$x^5 \times x^3 = x^{5+3} = x^8$$

قاعدة هامة:

أى مقدار أس صفر = ١

مثال:

أوجد ناتج $2^{-7} \times 2^5 \times 2^2$ ؟

الحل: $2^{-7} \times 2^5 \times 2^2 = 2^0 = 1$

مثال:

أوجد ناتج $2x(5-3x)+3(7x-1)-5x(3-4x)$ ؟

الحل:

2x(5-3x)+3(7x-1)-5x(3-4x)

$$= 10x - 6x^2 + 21x - 3 - 15x + 20x^2$$
$$= 14x^2 + 16x - 3$$

أوجد ناتج $(2x-y)(3x+4y)$ ؟

الحل:

$$(2x-y)(3x+4y)$$
$$= 6x^2 + 8xy - 3xy - 4y^2$$
$$= 6x^2 + 5xy - 4y^2$$

أوجد ناتج $(4m+n)^2$ ؟

الحل:

$$(4m+n)^2 = (4m+n)(4m+n)$$
$$= 16m^2 + 4mn + 4mn + n^2$$
$$= 16m^2 + 8mn + n^2$$

فى التمرين السابق كان من الممكن إيجاد الناتج مباشرة بتطبيق القاعدة التالية:

الحل = مربع المقدار الأول + ٢× الأول × الثانى + مربع الثان

المحاضرة الثالثة

اولا – المعادلات الخطية في مجهول واحد

مثال

حل المعادلة التالية $5x = 2x+12$

الحل

$$5x = 2x+12$$
$$5x - 2x = 12$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3} = 4$$

مثال حل المعادلة التالية

2(y+2)+5(3y-7) = 5(3y – 11) + 12

الحل: يتم فك الأقواس اولا كما يلي

2(y+2)+5(3y-7) = 5(3y – 11) + 12

2y+4+15y-35 = 15y – 55 + 12

2y+15y-15y = -55 + 12 – 4 + 35

2y = -12

$$y = \frac{-12}{2} = -6$$

مثال حل المعادلة التالية

$$\frac{3x+1}{5} = \frac{2x-1}{3}$$

الحل: في هذه الحاله حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أى أن

3(3x+1) = 5 (2x -1)

9x+3 = 10x – 5

9x-10x = - 5 -3

-x = - 8

x = 8

ثانيا- حل المعادلات الخطية في مجهولين

مثال حل المعادلات التالية :

$$5x+2y = 12$$

$$7x-3y = 11$$

الحل : يتم ضرب المعادلة $7x(1)$ والمعادلة $5x(2)$ وبطرح المعادلتين (4) من معادلة(3)

$$35x+14y = 84$$

$$-35x-15y = -55$$

$$29y = 29$$

$$y = \frac{29}{29} = 1$$

وبالتعويض في معادلة (١) عن قيمة $Y=1$ ينتج أن

$$5x + 2y = 12$$

$$5x + 2(1) = 12$$

$$5x + 2 = 12$$

$$5x = 12 - 2$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

أى أن الحل هو $x=2$ و$Y=1$

تمـــــــارين

حل المعادلات التالية

١- $9y - 3 = 4y + 7$

٢- $3(x - 5) + (x + 2) = 4(x-1) + 15$

٣- $\frac{4x - 1}{2} = \frac{x + 8}{3}$

المحاضرة الرابعــة

تطبيقّات تجاريةّ واقتصاديةّ

مثال :

انفقت مريم في معرض للكتب ١٢٠ ريال لشراء ٤ كتب ثقافية على حين انفق يوسف ٢٩٠ ريال لشراء ٤ كتب علمية و ٥ كتب ثقافية فاذا كانت الكتب الثقافية تباع بالسعر نفسه x والكتب العلمية تباع بالسعر نفسه y فما سعر الكتاب العلمي ؟

الحل: اولا – إيجاد سعر الكتاب الثقافى $x = \frac{120}{4} = 30$ ريال

ثانيا- إيجاد سعر الكتاب العلمي

$290 = 5x + 4y$

$290 = 5(30) + 4y$

$290 = 150 + 4y$

$290 - 150 = 4y$

$4y = 140$

$y = \frac{140}{4} = 35$ ريال

مثال:

اذا كانت دالة الطلب لأحد المنتجات تتحدد من خلال العلاقة التالية: $P=180-3x$

كما أن دالة العرض تتحدد من خلال: $P=5x+20$

المطلوب :

تحديد كمية وسعر التوازن؟

الحل

عند التوازن **دالة الطلب = دالة العرض**

$180-3x = 5x+20$

$180-20 = 5x+3x$

$160 = 8x$

$X = \frac{160}{8} = 20$

أى أن كمية التوازن هى ٢٠ وحدة.

لتحديد سعر التوازن يتم التعويض في أى من دالتى الطلب أو

العرض كما يلى: $P=180-3x = 180-3(20) = 180-60 = 120$ ***ريال***

المحاضرة الخامسة

تحليلّ المقاديرّ الجبريةّ

يقّصد بتحليلّ المقدار الجبري هو إيجّاد المكونات الأساسيةّ لهذا المقدار

طرق تحليلّ المقاديرّ الجبريةّ

هناك العديدّ من الطرق لتحليلّ المقدار الجبري منها :

• العامل المشترك - • الفرق بينّ المربعينّ - • الفرق بين المكعبينّ - • مجموع المكعبين - • تحليلّ المقدار الثلاثي

اولا- العامل المشترك

وهو يعّني المقدار الموجود في جميعّ عناصر المقدار الجبري

مثال : حلل المقدار $5xy + x^2$

الحل:

$$5xy + x^2 = x(5y+x)$$

ثانيا – الفرق بينّ المربعينّ

إذا كان لدينا مقدران مربعان وبينهما اشارة سالب يطلق على هذا المقدار الفرق بين المربعين مثل $x^2 - y^2$

يمّكن تحليلّ الفرق بينّ المربعينّ كما يلّي

= (الجذر التربيعّي الأول – الجذر التربيعّي الثانى) (الجذر التربيعّي الأول + الجذر التربيعّي الثانى)

أي أن $X^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

مثال : حلل المقدار $25x^2 - y^2$

الحل: $25x^2 - y^2 = (5x-y)(5x+y)$

ثالثا – الفرق بين المكعبين

• يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما اشارة سالب الفرق بين

المكعبين مثل $x^3 - y^3$ ***ويمكن تحليل هذا المقدار إلي قوسين***

أحدهما صغير والأخر كبير كما يلى

(جذر الأول-جذر الثاني) (مربع الأول +جذرالأول*جذر الثاني+مربع الثاني)

أى أن : $X^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

مثال : حلل المقدار $8a^3 - 125b^3$

الحل: $= (2a-5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)$

رابعا – مجموع المكعبين

يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما اشارة موجب مجموع المكعبين مثل : $x^3 + y^3$ ويمكن تحليل هذا المقدار إلي قوسين أحدهما صغير والأخر كبير كما يلى

(جذر الأول+جذر الثاني) (مربع الأول –جذرالأول*جذر الثاني+مربع الثاني)

أى أن : $X^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

مثال :

حلل المقدار $64x^3 + 125y^3$

الحل:

$$= (4x+5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$$

تمـــــــــــــــــارينٌ

١- $X^3 + 5x^2 - 7x^5$
٢- $25g^3h^2 + 75g^5h^7$
٣- $48L^3 - 75Ld^2$
٤- $18u^3v^3 - 50uv^5$
٥- $27a^3 - x^3$
٦- $X^3 - 64$
٧- $125 + 8r^3$
٨- $250x^2y^5 + 2x^5y^2$

المحاضرة السادسة

حل المعادلات من الدرجة الثانية فى مجهول واحد

تكون صورة المعادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد هى $ax^2+bx+c=0$

ويمكن حلها باستخدام التحليل أو باستخدام القانون كما يلى

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

مثال: حل المعادلة التالية

$$x^2-7x+10=0$$

الحل: يتم تحليل المقدار الثلاثي كما يلي

$$x^2-7x+10=0$$

$$(x-2)(x-5)=0$$

$$\begin{cases} x-2=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases}$$

مثال :

حل المعادلة التالية

$$x^2-2x=24$$

الحل: لابد أن نجعل المعادلة تساوى صفر $x^2-2x-24=0$

وبالتحليل

$$(x+4)(x-6)=0$$

$$\begin{cases} x+4=0 \;\longrightarrow x=-4 \\ x-6=0 \;\longrightarrow x=6 \end{cases}$$

تمـــــــارين

حل المعادلات التالية:

$$1-\quad x^2-10x+24=0$$

$$2-\quad x^2+4x=32$$

$$3-\quad 2x^2-17x+8=0$$

المحاضرة السابعه

الأسس واللوغاريتمات

سبق وان درسنا قاعدة هامة:

١. إذا اتحدت الأساسات فأنه عند الضرب تجمع الأسس

٢. عند القسمة إذا اتحدت الأساسات تطرح الأسس.

مثال: أختصر المقدار التالى: $\dfrac{z^5n^3z^4}{n^2z^2n^3}$

الحل:

$$\frac{z^5n^3z^4}{n^2z^2n^3}=\frac{z^9n^3}{z^2n^5}=z^{9-2}n^{3-5}=z^7n^{-2}$$

مثال: اختصر المقدار $\left(\dfrac{2ab^3}{3ba^2}\right)^3$

الحل:

$$\left(\frac{2ab^3}{3ba^2}\right)^3=\frac{2^3a^3b^9}{3^3b^3a^6}=\frac{8}{27}a^{3-6}b^{9-3}$$

$$=\frac{8}{27}a^{-3}b^6=\frac{8b^6}{27a^3}$$

مثال: اختصر المقدار $\sqrt[3]{27x^9}$

الحل:

$$\sqrt[3]{27x^9}=27^{\frac{1}{3}}x^{\frac{9}{3}}=3x^3$$

مثال: اختصر المقدار $\sqrt{\dfrac{75m^3n}{3mn^3}}$

الحل:

$$\sqrt{\frac{75m^3n}{3mn^3}}=\sqrt{25m^2n^{-2}}=5mn^{-1}=\frac{5m}{n}$$

اللوغاريتمات

هي قوة الأس المرفوع لأساس معين $10^3=1000$

لذلك يكون $\log_{10}1000=3$

الأس **الأساس**

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_5 a = 3$

الحل:

$$\log_5 a = 3$$
$$a = 5^3 = 125$$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_x 64 = 2$

الحل:

$$\log_x 64 = 2$$
$$64 = x^2$$
$$x = \sqrt{64} = 8$$

قوانين اللوغاريتمات ١- القوه

$$\log x^n = n \log x$$

مثال:

$$\log 5^4 = 4\log 5$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2$$

٢- الضرب

$$\log(x \times y) = \log x + \log y$$

مثال:

$$\log 20 = \log(5 \times 4) = \log 5 + \log 4$$

$$\log 42 = \log(6 \times 7) = \log 6 + \log 7$$

٣-القسمه

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

مثال

$$\log\left(\frac{35}{2}\right) = \log 35 - \log 2$$
$$= \log(7 \times 5) - \log 2$$
$$= \log 7 + \log 5 - \log 2$$

المحاضرة الثامنه

التباديل والتوافيق

اولاً : التباديل

وهى تشير إلى عدد طرق ترتيب الأشياء. ويرمز لها بالرمز p فأذا كان لدينا n من الأشياء نريد ترتيبها r من الترتيبات فأن

عدد طرق الترتيب هى $_{n}P_{r}$

- مثال: اوجد قيمة $_{5}P_{2}$

$$_{5}P_{2}=5\times4=20$$

- مثال: اوجد قيمة $_{6}P_{3}$

$$_{6}P_{3}=6\times5\times4=120$$

مثال: أتفقت ٦ فرق رياضية على تكوين دورى خاص بها احسب عدد المباريات التى يتم لعبها؟

الحل:

عدد المباريات

$$_{6}P_{2}=6\times5=30$$

- مثال:

بكم طريقة يمكن جلوس ٤ اشخاص على ٥ كراسى ؟

الحل: $_{5}P_{4}=5\times4\times3\times2=120$

ثانياً: التوافيق

وتشير إلى عدد طرق الاختيار. ويرمز لها بالرمز c

فأذا كان لدينا n من الأشياء ونريد أن نختار منها عدد r فإن

عدد طرق الاختيار هى ق . حيث أن $_{n}C_{r}$

- مثال: اوجد قيمة $5C2$

الحل: $5C2=\frac{5\times4}{2\times1}=\frac{20}{2}=10$

مثال:

إدارة بها ١٢ موظف نريد أن نختار منهم ٣ لتكوين لجنة أحسب عدد طرق الاختيار؟

الحل:

عدد طرق الاختيار

$$12C3 = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$$

مثال:

بفرض فى المثال السابق إذا نص على أن مدير الأدارة لابد من اختياره أحسب عدد طرق الاختيار ؟

الحل:

عدد طرق الاختيار =

$$11C2 = \frac{11\times10}{2\times1} = 55$$

تمـــــــــــــــــارين

١ ـ اتفقت ١٠ فرق رياضية على تكوين دورى فيما بينها أوجد عدد المباريات التى يمكن لعبها؟

٢ ـ إدارة بها ١٥ موظف نريد تكوين منهم لجنة مكونه من ثلاثة اوجد عدد طرق الاختيار ؟

٣ ـ فى السؤال السابق إذا كان لابد من وجود مدير الإدارة ضمن أعضاء اللجنة أحسب عدد طرق الاختيار ؟

المحاضرة التاسعة

نظرية ذات الحدين

مثال:

أوجد مفكوك $(x+3)^3$

قيمة

$$(x+3)^3 = 3C0(3)^0 x^3$$
$$+3C1(3)^1 x^2$$
$$+3C2(3)^2 x^1$$
$$+3C3(3)^3 x^0$$
$$(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

الحد العام لنظرية ذات الحدين هو قيمة

$$H_{r+1} = ncr(socondterm)^r (firstterm)^{n-r}$$

دائماً r أقل من رتبة الحد بمقدار واحد

مثال

أوجد مفكوك $(x+3)^9$

الحل $H_{r+1} = ncr(socandterm)^r (firstterm)^{n-r}$

نجد أننا نريد H_5 لذلك $r=4$ $n=9$

$$H_5 = 9c4(3)^4 (x)^5 = 126 \times 81x^5 = 10206x^5$$

الحد الأوسط

يتوقف الحد الأوسط على الأس اذا كان فردى أو زوجى:

الأس زوجى يكون رتبة الحد الأوسط = $\frac{n+2}{2}$

أما اذا كان لدينا الأس فردى يوجد حدان أوسطان رتبتهما هى

$\frac{n+1}{2}$ و $\frac{n+3}{2}$

مثال:

أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(x-2)^{10}$

الحل

رتبة الحد الوسط هى $\frac{10+2}{2}=6$

نجد أننا نريد H_6 لذلك $r=5$ $\quad n=10$

$$H_6 = 10C5(-2)^5(x)^5 = 252\times -32\times x^5$$
$$= -8064x^5$$

تمـــــــــــــــارين

- أوجد الحد السادس فى مفكوك $(x+4)^{12}$ ؟1

٢ - أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(5x+y)^8$ ؟

٣ - أوجد مفكوك المقدار $(5x-2y)^4$ ؟

المحاضرة العاشرة

الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

١- الداله الأسيه مثل $y = a^x$

٢- الداله اللوغاريتمية مثل $x = \log_a y$

٣- الدالة المثلثية مثل $(i) \quad y = \sin x$ و $(ii) \quad y = \cos x$

٤- الداله النسبية مثل $f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$

٥- الدوال الصريحه تكون في الصوره **(y=f(x)** مثل $y = 2x + 3$

٦- الدوال الضمنية تكون في الصوره **f(x,y)=k** مثل $x^2 + y^2 = 25$

٧- الدوال الزوجية **f(-x)= f(x)**

٨- الدوال الفردية **f(-x)= -f(x)**

اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات الاعتيادية

يعتبر العددان 10، e (حيث e عدد غير نسبي يساوي تقريباً 2.71828) من أكثر الأعداد استعمالاً كأساس للوغاريتمات.
واللوغاريتمات للأساس e تسمى اللوغاريتمات الطبيعية ويرمز لها $\ln x$.

أمثلة: $f(x) = \ln x^5 \,,\, f(x) = \ln(x^2 + 2x)$

تسمى اللوغاريتمات للأساس 10 باللوغاريتمات الاعتيادية ويرمز لها
بالرمز $\log x$ بدلا عن $\log_{10} x$.

أمثلة: $f(x) = \log x, \; f(x) = \log(x^2 - 1) \,,\, f(x) = \log(2x - 3)$

المحاضرة الحادية عشر

الاشتقاق

متوسط التغير:

إذا كانت y=f(x) فان أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها Δx تحدث تغير في المتغير التابع y قدره Δy . النسبة بين التغير في y إلى التغير في x تسمى متوسط التغير للدالة.

اذاً $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

لأي x_1 **و** x_2 **في مجال الدالة**

حيث $x_2=x_1+\Delta x$

مثال

اوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=3x+2$ **عندما تتغير x من 1 الى 2**

الحل

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=2$$

$$f(1)=3\times1+2=3+2=5$$

$$f(2)=3\times2+2=6+2=8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{8-5}{2-1}=\frac{3}{1}=3$$

جبر الاشتقاق:

١. إذا كانت $y=x^n$ **حيث** n **عدد حقيقي فان :** $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y=x^5$
II. $y=x^{-3}$
III. $y=x^{\frac{1}{2}}$

الحل:

I. $\frac{dy}{dx}=5x^4$

II. $\frac{dy}{dx}=-3x^{-4}$

III. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

---

٢. إذا كانت $y=c$ حيث c كمية ثابتة فان : $\frac{dy}{dx}=0$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y=5$

II. $y=-10$

III. $y=\frac{3}{4}$

الحل للمثال السابق $\frac{dy}{dx}=0$

---

٣. إذا كانت $y=cx^n$ حيث c عدد حقيقي فان : $\frac{dy}{dx}=n.c\,x^{n-1}$

مثال:أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y=3x^4$

II. $y=-2x^7$

III. $y=16x^{\frac{1}{2}}$

الحل:

I. $$\frac{dy}{dx}=12x^3$$

II. $$\frac{dy}{dx}=-14x^6$$

III. $$\frac{dy}{dx}=8x^{-\frac{1}{2}}$$

---

٤. إذا كانت

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

فان :

$$\frac{dy}{dx}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(n-1)ax^{n-2}+na_nx^{n-1}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت : $y=3x^4+5x^3-2x^2+7x+20$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=12x^3+15x^2-4x+7$$

---

٥. إذا كانت $y=[f(x)]^n$ فان : $\frac{dy}{dx}=n[f(x)]^{n-1}.\ f'(x)$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=(2x^2+5)^8$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=8(2x^2+5)^7.4x=32x(2x^2+5)^7$$

٦. إذا كانت $y=(f(x).g(x))$ فان : $\frac{dy}{dx}=f(x).g'(x)+g(x).f'(x)$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=(x-1)(3x-2)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=(x-1)(3)+(3x-2)(1)$$
$$=3x-3+3x-2$$
$$=6x-5$$

مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y=x^4+5x^3-4x+1$

الحل:

١- $y'=4x^3+15x^2-4$

٢- $y''=12x^2+30x$

٣- $y'''=24x+30$

المحاضرة الثانية عشر

التكامل

التكامل غير المحدد:

التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق ، وتسمى عملية ايجاد y إذا علمت y' بعملية التكامل . ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل. فإذا كانت f دالة للمتغير x، فتكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل $\int f(x)\,dx$ ، حيث الرمز $\int$ يدل على عملية التكامل غير المحدد وان dx تدل على أن هذه العملية تجرى بالنسبة للمتغير المستقل x .

قواعد التكامل:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \,, n \neq -1$ حيث C ثابت التكامل

2. $\int k\,dx = kx + c$ حيث k أي عدد حقيقي

3. $\int dx = x + c$

4. $\int [kf(x)]dx = k\int f(x)\,dx$ حيث k عدد حقيقي

5. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

6. $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

7. $\int e^x dx = e^x + c$

8. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + c \,, x \neq 0$

9. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

امثله على التكامل

1. $$\int 5dx = 5x + c$$

2. $$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

3. $$\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$$

4. $$\int (7x+3)dx = \frac{7x^2}{2} + 3x + c$$

6. $$\int (x^{\frac{1}{2}} + 4)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 4x + c$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 4x + c$$

المحاضرة الثالثة عشر

المتواليات

اولاً- المتواليات العددية

يطلق على متسلسلة الأعداد التي يكون الفرق فيها بين أى حد والحد السابق له مباشرة مقدار ثابت المتوالية العددية.

فمثلاً $2, 5, 8, \ldots$

يطلق عليها المتوالية العددية حيث أن

$$8-5=3$$
$$5-2=3$$

الفرق الثابت يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز d

الرموز المستخدمة:

a الحد الأول

d أساس المتوالية (الفرق الثابت)

L الحد الأخير

H_n الحد العام

S_n مجموع المتوالية

القوانين المستخدمة

الحد العام

$$H_n = a + (n-1)d$$

مجموع المتوالية يمكن إيجاده بطريقتين:

١- بمعلوميه الحد الأخير

$$S_n = \frac{n}{2}(a+L)$$

٢- بمعلوميه أساس المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

مثال

فى المتوالية التالية $3, 7, 11, ...$

أوجد:

١- حدد نوع المتوالية؟

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد الخامس ؟

٤- الحد التاسع ؟

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل

بما أن $7-3=4$ $\quad 11-7=4$

أذن الفرق مقدار ثابت

١- نوع المتوالية : متوالية عددية

٢- أساس المتوالية $d=4$

٣- الحد الخامس

$$H_n = a+(n-1)d$$
$$H_5 = a+4d$$
$$H_5 = 3+4(4) = 19$$

٤- الحد التاسع من المتوالية

$$H_9 = a+8d$$
$$H_9 = 3+4(8) = 35$$

٥-مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$
$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\times 3+9\times 4) = 5(6+36) = 210$$

المتوالية الهندسية

يطلق علي متسلسلة الأعداد التى يكون خارج قسمة أى حد فيها على الحد السابق له مباشرة مقدار ثابت بالمتوالية الهندسية.

الرموز المستخدمة

a الحد الأول

r أساس المتوالية

S_n مجموع n من الحدود

S_∞ مجموع المتوالية إلى ما لانهاية

القوانين المستخدمة

الحد العام

$$H_n = a \quad r^{n-1}$$

مجموع عدد معين من الحدود

$$S_n = \frac{a \quad (r^n - 1)}{r - 1}$$

مجموع المتوالية إلى مالانهاية

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

مثال: في المتوالية $4,8,16,...$ أوجد الحد العاشر
ومجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل:

نجد أن $\frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$

أذن المتوالية هندسية وأساسها $r = 2$

الحد العاشر

$$H_{10} = a \quad r^9$$
$$= 4(2)^9 = 2048$$

مثال متوالية هندسية حدها الأول 5 وأساسها 3- أوجد الحد السادس
ومجموع الثمان حدود الأولى منها؟

الحل:

$$a = 5 \qquad r = -3$$

الحد السادس

$$H_6 = ar^5$$
$$= 5(-3)^5 = -1215$$

مجموع الثمان حدود الأولى من المتوالية هو

$$S_n = \frac{a \quad (r^n - 1)}{r - 1}$$
$$S_8 = \frac{5((-3)^8 - 1)}{-3 - 1} = -8200$$

المحاضرة الرابعة عشر

المحددات و المصفوفات

أولاً- المحددات

المحدد من الرتبة الثانية يكون على الصورة التالية

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ويمكن الحصول على قيمة المحدد

$$= (a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد =

$$= (5 \times 8) - (3 \times 7)$$
$$= 40 - 21 = 19$$

استخدام المحددات في حل المعادلات

باستخدام المحددات حل المعادلات التالية :

$$5x + 2y = 19$$
$$4x - y = 10$$

الحل : حتى يمكن إيجاد قيمتى كلاً من x , y يتم حساب Δ , Δ_x , Δ_y كما يلى :

Δ ويحتوى على معاملات x , y

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (5 \times -1) - (2 \times 4)$$
$$= -5 - 8 = -13$$

Δ_x ويتم أستبدال معاملات x بقيم النواتج كما يلى:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = (19 \times -1) - (2 \times 10)$$
$$= -19 - 20 = -39$$

Δ_y ويتم أستبدال معاملات y بقيم النواتج كما يلى:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = (5 \times 10) - (19 \times 4)$$
$$= 50 - 76 = -26$$

وبالتالى يمكن الحصول على قيمة x, y كما يلي :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-39}{-13} = 3 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2$$

المحددات من الرتبة الثالثة

مثال أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

حتى يمكن إيجاد قيمة هذا المحدد يتم استخدام عناصر الصف الأول كما يلى: قيمة المحدد =

$$= 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2(36 - 8) + 5(54 + 3) + 7(48 + 12)$$

$$= 2(28) + 5(57) + 7(60)$$

ثانياً- المصفوفات

يتم التركيز على العمليات الجبرية للمصفوفات كما يلى :

إذا كان

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad , h\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

أوجد

$1 - g` \ , \ h`$

$2 \quad g + h$

$3 - \ 2g + h$

$4 - gh$

الحل: يمكن الحصول على $g`, h`$ بتبديل الصفوف لأعمدة والأعمدة إلى صفوف كما يلي:

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad , h\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

٢- $g + h$ يتم جمع كل رقم مع الموجود فى نفس مكانه من المصفوفة الأخرى كما يلى

$$g + h = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$$

الحل:

٣- $2g+h$ يتم ضرب كل عنصر فى $g\times 2$ ثم جمع الناتج مع الموجود فى نفس مكانه من المصفوفة h كما يلى

$$2g+h=\begin{bmatrix}10 & 14\\ -8 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 13\\ -1 & 24\end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

٤- gh يتم ضرب عناصر الصفوف فى المصفوفة g x عناصر أعمدة المصفوفة h ثم جمع الناتج كما يلي

$$g=\begin{bmatrix}5 & 7\\ -4 & 6\end{bmatrix} \qquad , h\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 12\end{bmatrix}$$

$$gh=\begin{bmatrix}5\times 3+7\times 7 & 5\times -1+7\times 12\\ -4\times 3+6\times 7 & -4\times -1+6\times 12\end{bmatrix}$$

$$gh=\begin{bmatrix}64 & 79\\ 30 & 76\end{bmatrix}$$

اتمنى لكم التوفيق والسداد