

## ملخص مبادئ الرياضيات ( ١ )

( محتويات المحاضرة كاملة )

د. أسامة حنفي

جامعة الملك فيصل ( إنتساب )

الفصل الدراسي الأولي عام ١٤٣٣ / ١٤٣٤ هـ

إعداد :

@ABOD\_05

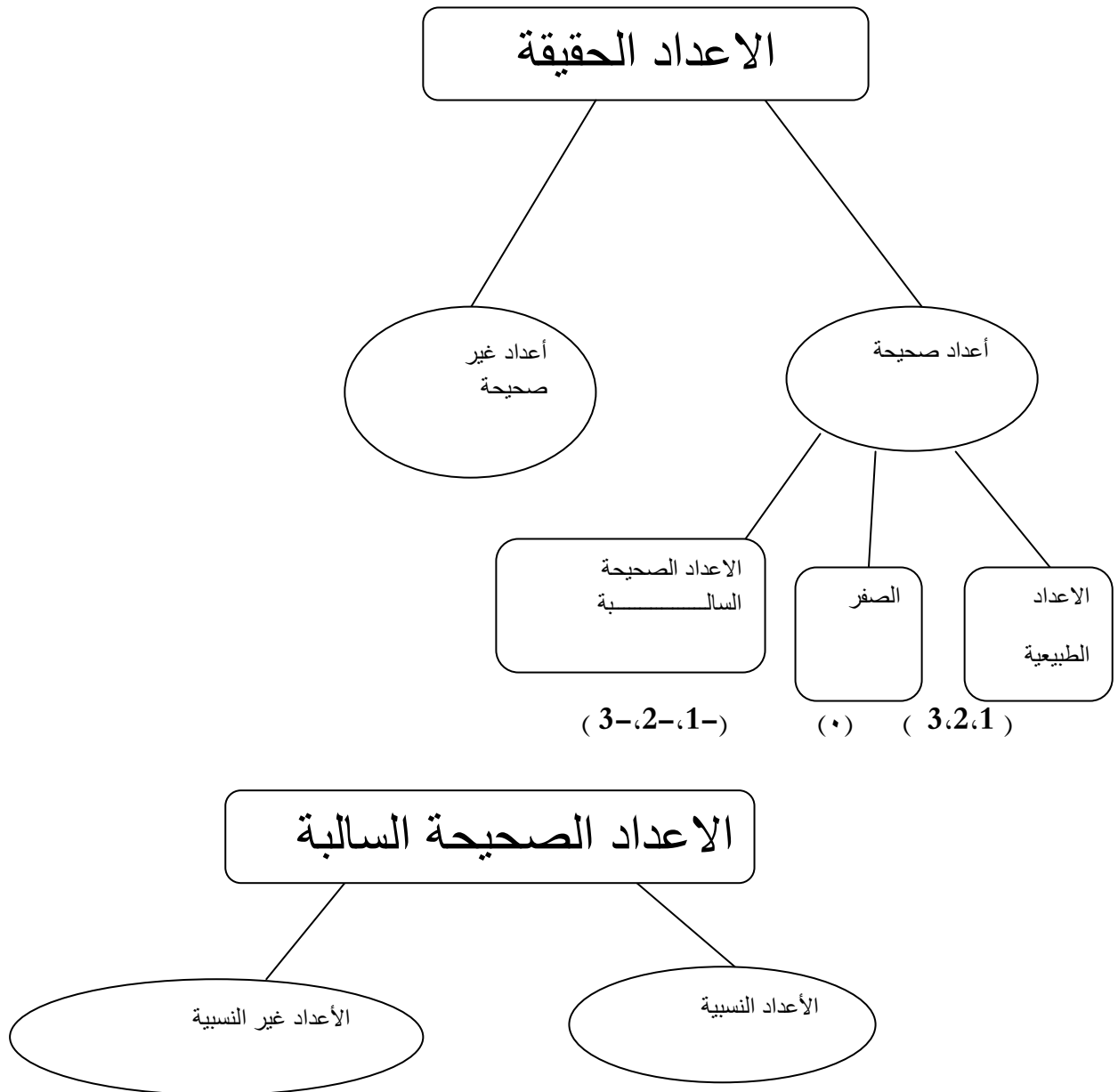
أهداء لطلاب الانتساب المطور بجامعة الملك فيصل

مع تمنياتي للجميع التوفيق والنجاح

- بسم الله الرحمن الرحيم -

## المحاضرة الأولى

### العمليات الجبرية



### الأعداد غير الصحيحة:

# وهي الأعداد القياسية وهي عبارة عن النسبة بين عددين صحيحين ويكون المقام لا يساوي صفر.

$$\# \text{ مثل } \frac{2}{7}, \frac{3-5}{9}$$

# وأي عدد لا يمكن كتابته على الصورة القياسية مثل  $\sqrt{2}$  و  $\sqrt[4]{6}$  يسمى عدد غير نسبي .

### القيمة المطلقة:

# القيمة المطلقة لأي عدد هي قيمة العدد بدون النظر إلى الإشارة التي تسبق العدد

# هذا يعني أن القيمة المطلقة هي عدد موجب دائما.

# ويرمز للقيمة المطلقة للعدد بـ  $|x|$

**مثال :** أوجد القيمة المطلقة للمقادير التالية :

$$-5, 11, \frac{-3}{4}, \frac{1}{9}$$

$$|-5| = 5, |11| = 11$$

### العمليات الجبرية ::

# يوجد في الجبر أربع عمليات أساسية وهي

# الجمع و الطرح والضرب و القسمة

جمع المقادير الجبرية :

لجمع المقادير فأنا نستخدم العلامة (+) لدلالة على عملية الجمع والتي تمثل عملية إضافة مثل :

$$2+5=7, \quad 7+4=11, \quad 2x + 3x = 5x$$

يشترط لجمع أي مقداران جبريان ان يكونا من نفس النوع

فمثلا :

$$2x+5y \text{ لا يمكن جمعهما و يظل المقدار كما هو .}$$

مثال:  $3a+8b+9a+2b = 12a + 10b$

مثال : أوجد ناتج حاصل جمع المقادير التالية:

$$7x+5y + 9xy , 8x+2y$$

الحل

يمكن ترتيب المقداران السابقان كما يلي:

$$\begin{array}{r} 7x + 5y + 9xy \\ + 8x + 2y \\ \hline 15x + 7y + 9xy \end{array}$$

نلاحظ من المثال أن كلا من  $x$  و  $y$  تختلف عن  $xy$  لذلك عند الجمع يتم التعامل مع كل مقدار على حدى .

طرح المقادير الجبرية :

لطرح المقادير فأنا نستخدم العلامة (-) لدلالة على عملية الطرح والتي تمثل عملية صرف أو سحب

مثال : إذا كان لديك عشر ريالاً وتم شراء حلويات بست ريالاً فأنا المتبقي معك يكون أربع ريالاً

يمكن التعبير عن ذلك رياضياً كما يلي

$$10 - 6 = 4$$

أي أن المقدار المصروف أو المسحوب نضع أمامه إشارة سالب .

لذلك عند إجراء عملية الطرح يتم تغيير إشارة العدد أو المقدار الجبري المراد طرحه ثم نطبق قاعدة الجمع.

مثال : أوجد ناتج  $5x - 3x$  ؟ الحل :  $2x$

مثال : أوجد ناتج  $7y - 12y$  ؟ الحل :  $5y$

نلاحظ إشارة المقدار الأكبر هي سالبة لذلك عند الطرح نضع الفرق بين المقداران مع إشارة المقدار الأكبر

مثال : أوجد ناتج جمع المقادير التالية :

$$2x+7y , -2x-6y , 8x-3y$$

الحل:

$$\begin{array}{r} 2x + 7y \\ -2x - 6y \\ \hline 8x - 3y \\ \hline 8x - 2y \end{array} \quad \begin{array}{r} 7y - 9y \\ = -2y \end{array}$$

نلاحظ عند جمع مقداران جبريان متساويان في القيمة ومختلفان في الإشارة فإن حاصل جمعهما يساوي صفر

**مثال:** أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:

$$2x+4y-3z, -4x+5z+2y, 6z+7x-8y$$

الحل:

نلاحظ أن المقادير الثلاثة السابقة غير مرتبة لذلك فإننا عند جمعها لابد من ترتيبها مع مراعاة كتابة أي مقدار بنفس الإشارة التي هو عليها كما يلي:

$$\begin{array}{r} 2x + 4y - 3z \\ -4x + 2y - 5z \\ +7x - 8y + 6z \\ \hline 5x - 2y - 2z \end{array}$$

**مثال:** أوجد ناتج  $(4x+2y) - (2x+5y)$

الحل: نلاحظ وجود إشارة سالب أمام القوس الثاني لذلك عند فك القوس لا بد من تغير جميع إشارات المقادير التي بداخل القوس كما يلي

$$= 4x+2y - 2x-5y = 2x-3y$$

**مثال:** أوجد ناتج  $(3x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x + 11)$

$$= 3x^2 - 3x + 2 - x^2 + 3x - 11 = 2x^2 - 9$$

**مثال:** أطرح المقدار  $7x+2y$  من  $6x+5y$

$$(6x+5y) - (7x+2y) = 6x+5y-7x-2y = -x+3y = 3y-x$$

• نلاحظ أن المقدار الذي ذكر بعد حرف " من " هو الذي كُتب أولا

مثال: أ طرح المقدار  $7a^2 - 5ab + 8b^2$  من  $3a^2 + ab - 5b^2$

$$\begin{aligned} \text{الحل:} &= 3a^2 + ab - 5b^2 - (7a^2 - 5ab + 8b^2) \\ &= 3a^2 + ab - 5b^2 - 7a^2 + 5ab - 8b^2 \\ &= -4a^2 + 6ab - 13b^2 \end{aligned}$$

### إيجاد قيمة المقادير الجبرية:

ويقصد به عملية التعويض بقيمة المتغيرات الموجودة بالمقدار الجبري لإيجاد قيمة هذا المقدار .

**مثال :** أوجد قيمة المقدار  $3x - 7y + 9z$  ؟ إذا كان  $x=2$  ,  $y=3$  ,  $z=5$

**الحل :** بالتعويض  $3(2) - 7(3) + 9(5) = 30$

**مثال :** أوجد قيمة المقدار  $3a - 4b + 6c$  ؟ إذا كان  $a=3$  ,  $b=-2$  ,  $c=-1$

**الحل :**  $3(3) - 4(-2) + 6(-1) = 11$

**مثال :** أوجد قيمة المقدار  $3xz + 5xy - 2zy$  ؟ إذا كان  $x=-1$  ,  $y=2$  ,  $z=-3$

**الحل :**  $3(-1)(3) + 5(-1)(2) - 2(3)(2) = 11$

تمارين ..

اولا اوجد ناتج العمليات التالية:

$$\begin{aligned} (1) & 8 - 6 + 3 = 11 - 6 = 5 \\ (2) & -3 + 8 - 11 = -14 + 8 = -6 \\ (3) & 5n + 7n - n = 11n \\ (4) & 6m + 3n - 7m - 2n = -m + n \\ (5) & 6a^2 + 3ab - 4b^2 - 8a^2 - 5ab - 5b^2 \\ & = -2a^2 - 2ab - 9b^2 \end{aligned}$$

ثانيا: أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:

$$5x + 2y - z , 2x + 3y - z , 2x - 5y + 7z \quad (1)$$

$$9x + 5z = \text{الحل}$$

$$4m-5n+6k, 10k-3m+4n, 2n-2m-k \quad (٢)$$

$$-m+n+15k = \text{الحل}$$

$$2n+L+m, 4n-m, 7m-3L \quad (٣)$$

$$6n-2L+7m = \text{الحل}$$

ثالثاً : أوجد ناتج العمليات التالية:

$$5x-4y \text{ أطرح } x^9-2y \text{ من } (١)$$

$$-4x-2y = \text{الحل}$$

$$4a-6b+2c \text{ أطرح } 3a-8b+c \text{ من } (٢)$$

$$a+2b+c = \text{الحل}$$

$$(7m-2n) - (3m-4n) \quad (٣)$$

$$4m - 6n = \text{الحل}$$

$$(3a-7b) - (2a+5b) - (3a+8b) \quad (٤)$$

$$4a - 4b = \text{الحل}$$

## المحاضرة الثانية

### ضرب المقادير الجبرية

عملية الضرب تعرف حسابيا على أنها عدد مرات تكرار الجمع لعدد معين .

$$6+6+6+6+6 = 6*5 = 30 \text{ فمثلا}$$

**مثال :** أى أنه إذا اتحدت الإشارات تكون الإشارة " + " أما إذا اختلفت الإشارات تكون -

$$7*3 = 21, -2*11=-22, -4*-5 = 20, 7*4x=28x, 2x*-5y = -10xy$$

نلاحظ أن  $x y$  هي نفسها  $x*y$  وهي أيضا  $x.y$

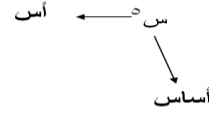
**مثال :** أوجد ناتج  $(x-4y) - 3(7x+9y) + 2(4x-3y)$  ؟

$$8x-6y+12x+27y-x+4y = 28x + 25y \text{ : الحل}$$

**مثال :** أوجد ناتج  $2a(3-4b) - 4b(5-3a)$  ؟

$$6a-8ab -20b+12ab = 6a-20b+4ab \text{ : الحل}$$

قاعدة هامة: إذا اتحدت الأساسات فإنه عند الضرب تجمع الأساس  
مثال: إذا كان المقدار  $x^5$  فإن



مثال: أوجد ناتج  $x^3 \times x^5$  ؟

الحل:  $x^5 + 3 = x^8$

مثال: أوجد ناتج  $y^4 * y^{-5} * y^3$  ؟

الحل:  $y^4 - 5 + 3 = y^2$

مثال: أوجد ناتج  $3^{-4} * 3^{-2} * x3^4$  ؟

الحل:  $3^{-2}$

قاعدة هامة: أي مقدار أس صفر  $= 1$

مثال: أوجد ناتج  $2^{-7} * 2^5 * 2^2$  ؟

الحل:  $2^0 = 1$

مثال: أوجد ناتج  $2x(5-3x) + 3(7x-1) - 5x(3-4x)$  ؟

الحل:

$$= 10x - 6x^2 + 21x - 3 - 15x + 20x^2$$

$$= 14x^2 + 16x - 3$$

مثال: أوجد ناتج  $5a(2a+4b) - 3(2a-2b) + 3b(3a-4b)$  ؟

الحل:  $= 10a^2 + 29ab - 6a + 6b - 12b^2$

مثال: أوجد ناتج  $(2x - y)(3x + 4y)$  ؟

الحل:  $6x^2 + 5xy - 4y^2 =$

مثال: أوجد ناتج  $(4a+b)(3a-2b)$  ؟

الحل:  $12a^2 - 5ab - 2b^2 =$

مثال: أوجد ناتج  $(4m+n)^2$  ؟

الحل:  $16m^2 + 8mn + n^2 =$

في التمرين السابق كان من الممكن إيجاد الناتج مباشرة بتطبيق القاعدة التالية:

الحل = مربع المقدار الأول +  $2 \times$  الأول  $\times$  الثاني + مربع الثاني

مثال: أوجد ناتج  $(2x-y)^2$  ؟

الحل:  $4x^2 - 4xy + y^2 =$

مثال: أوجد ناتج  $(2x-y)^2 + (3x+y)(2x-y)$  ؟

$$10x^2 - 5xy = \text{الحل}$$

تمارين : أولاً: أوجد ناتج ما يلي:

- $4(7x+2y)$  الحل  $28x+8y$
- $3(4a-b) - 2(a-b5) + 4(a+b)$  الحل  $14a+11b$
- $y^4 * y^{-2} * y^7 + u^{-4} * u^{-3} * u^7$  الحل :  $y^9 + u^0 = y^9 - 1$
- $3^{-5} * 3^4 * 2^{-4} * 2^5$  الحل  $3^{-1} * 2 = 3 \div 2 = 0.67$
- $7a(3+a) + 5(2a-8) - 2a(4-3a)$  الحل  $13a^2 + 23 - 40$

ثانياً- اوجد ناتج:

- 1-  $(c+3d)(2c-d)$   
 $2c^2 - cd + 6cd - 3d^2 = 2c^2 + 5cd - 3d^2$
- 2-  $(2g+t)^2 = 4g^2 + 4gt + t^2$
- 3-  $(3m-2n)^2 = 9m^2 - 12mn + 4n^2$
- 4-  $(x+2y)^2 + (2x-y)^2$   
 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 = 5x^2 + 5y^2$
- 5-  $(a+b)^2 + (5a-2b)(3a-b)$   
 $a^2 + 2ab + b^2 + 15a^2 - 5ab - 6ab + 2b^2$   
 $= 16a^2 - 9ab + 3b^2$

### المحاضرة الثالثة

### قسمة المقادير الجبرية

يقصد بالقسمة هي النسبة بين عددين

أنه إذا اتحدت الإشارات تكون الإشارة " + " أما إذا اختلفت الإشارات تكون " - "

فمثلاً:  $5 = 3 \div 15$

$$38 - = 2 \div 78 -$$

تذكر أن :

صفر

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \frac{\text{صفر}}{\text{أى مقدار}} = \text{صفر} \quad \infty = \frac{\text{صفر}}{\text{أى مقدار}}$$

لذلك يشترط لإجراء عملية القسمة أن المقام لا يساوى صفر.

**قاعدة هامة:** عند القسمة إذا اتحدت الأساسات تطرح الأسس

**مثال:**

$$\frac{y^4}{y^7} = y^{4-7} = y^{-3} \quad \frac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = x^4$$

**مثال:** اختصر المقدار الجبرى

$$\frac{14y^8x^5}{2y^6x^2}$$

**الحل :**

$$\frac{14y^8x^5}{2y^6x^2} = 7y^{8-6}x^{5-2} = 7y^2x^3$$

**مثال:**

$$\frac{72z^3L^9m^5}{6z^7L^3m^5}$$

**اختصر المقدار الجبرى**

**الحل:**

$$\frac{72z^3L^9m^5}{6z^7L^3m^5} = 12z^{3-7}L^{9-3}m^{5-5} = 12z^{-4}L^6$$

$$m^{5-5} = m^0 = 1 \quad \text{لاحظ أن}$$

مثال:  
اختصر المقدار الجبري  $\frac{54k^6r^8w^7}{24k^7r^4w^2}$

الحل:  

$$\frac{54k^6r^8w^7}{24k^7r^4w^2} = \frac{9}{4}k^{6-7}r^{8-4}w^{7-2}$$

$$= \frac{9}{4}k^{-1}r^4w^5 = \frac{9r^4w^5}{4k}$$

- إيجاد خارج قسمة مقدار جبري كثير الحدود على مقدار جبري ذو حد واحد  
 في هذه الحالة يتم استخدام القاعدة التالية

$$\frac{x + y + z}{d} = \frac{x}{d} + \frac{y}{d} + \frac{z}{d}$$

أى يتم توزيع المقام على جميع حدود البسط

ل: أوجد ناتج  $\frac{4q^3v^5 + 3q^2v^4}{q^2v^2}$

الحل:

$$\frac{4q^3v^5 + 3q^2v^4}{q^2v^2} = \frac{4q^3v^5}{q^2v^2} + \frac{3q^2v^4}{q^2v^2}$$

$$= 4qv^3 + 3v^2$$

أوجد ناتج  $\frac{4x^4y^2 + 12x^3y^4 - 18xy^2}{2xy}$

$$\frac{4x^4y^2 + 12x^3y^4 - 18xy^2}{2xy}$$

$$= \frac{4x^4y^2}{2xy} + \frac{12x^3y^4}{2xy} - \frac{18xy^2}{2xy}$$

$$= 2x^3y + 6x^2y^3 - 9y$$

- إيجاد خارج قسمة مقدار جبري كثير الحدود على مقدار جبري كثير الحدود

فى هذه الحالة يتم إجراء القسمة المطولة كما يتضح من المثال التالي:

إذا كان حاصل ضرب مقداران جبريان هو  $2x^2 - 9xy - 5y^2$

وكان أحد المقداران هو  $x - 5y$  أوجد المقدار الآخر ؟

الحل:

يتم إجراء عملية القسمة كما يلي

$$\begin{array}{r} 2x + y \\ x - 5y \overline{) 2x^2 - 9xy - 5y^2} \\ \underline{- 2x^2 + 10xy} \phantom{- 5y^2} \\ xy - 5y^2 \\ \underline{- xy + 5y^2} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

على ذلك يكون المقدار الآخر هو  $2x + y$

مثال: أوجد ناتج قسمة  $6N^3 - 13N^2t + 8Nt^2 - 3t^3$

علي  $2N - 3t$  ؟

الحل:

$$\begin{array}{r} 3N^2 - 2Nt + t^2 \\ 2N - 3t \overline{) 6N^3 - 13N^2t + 8Nt^2 - 3t^3} \\ \underline{- 6N^3 + 9N^2t} \phantom{- 3t^3} \\ -4N^2t + 8Nt^2 - 3t^3 \\ \underline{4N^2t - 6Nt^2} \phantom{- 3t^3} \\ 2Nt^2 - 3t^3 \\ \underline{- 2Nt^2 + 3t^3} \\ 0 \phantom{0} \end{array}$$

وعلي ذلك يكون الحل هو  $3N^2 - 2Nt + t^2$

مثال:

أوجد قيمة  $P$  التي تجعل المقدار  $x^3 - 3x^2 - 5x + P$

يقبل القسمة على  $x^2 - x + 3$  ؟

الحل: حتى يمكن إيجاد قيمة  $P$  لابد من إجراء عملية القسمة المطولة كما يلي:

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x + 3 \overline{) x^3 - 3x^2 + 5x + P} \\
 \underline{-x^3 + x^2 - 3x} \phantom{+ P} \\
 -2x^2 + 2x + P \\
 \underline{2x^2 - 2x + 6} \\
 0 \qquad 0
 \end{array}$$

نلاحظ حتى يكون المقدار  $x^3 - 3x^2 + 5x + P$

يقبل القسمة على  $x^2 - x + 3$

فلا بد أن يكون  $P + 6 = 0$

$$\therefore P = -6$$

تمارين

1-  $\frac{x^4 y^5 + x^3 y^3}{x^2 y} = \frac{x^4 y^5}{x^2 y} + \frac{x^3 y^3}{x^2 y} = x^2 y^4 + x y^2 = x^2 y^4 + x y^2$

2-  $\frac{m^2 v^5 - m^3 v^2}{m^2 v^2} = v^3 - m$

3-  $\frac{63a^2 bc^3 - 42a^3 b^2 c^3}{7abc} = \frac{63a^2 bc^3}{7abc} - \frac{42a^3 b^2 c^3}{7abc} = 9ac^2 - 6a^2 bc^2$

تمارين

ثانياً- إذا كان حاصل ضرب مقداران جبريان هو  $2x^2 + 9xy - 5y^2$  وكان أحد المقدران هو  $x + 5y$  أوجد المقدار الآخر ؟

$\frac{2x^2}{x} = 2x$   $\frac{-xy}{x} = -y$

$\begin{array}{r} 2x - y \\ \times x + 5y \\ \hline 2x^2 + 10xy \\ \underline{-xy - 5y^2} \\ 2x^2 + 9xy - 5y^2 \end{array}$

تمارين

$$\frac{2a^2}{2a} = a \quad \frac{-8ab}{2a} = -4b$$

ثالثاً- إذا كان حاصل ضرب مقداران جبريان هو  $2a^2 - 7ab - 4b^2$  وكان أحد المقداران هو  $2a + b$  أوجد المقدار الآخر ؟

$$\begin{array}{r} a - 4b \\ 2a + b \overline{) 2a^2 - 7ab - 4b^2} \\ \underline{2a^2 + ab} \phantom{- 4b^2} \\ -8ab - 4b^2 \\ \underline{-8ab - 4b^2} \\ 0 \end{array}$$

رابعاً- أوجد قيمة  $R$  التي تجعل المقدار  $x^2 + 8x + R$  يقبل القسمة على  $x + 3$  ؟

$$\begin{array}{r} x + 5 \\ x + 3 \overline{) x^2 + 8x + R} \\ \underline{x^2 + 3x} \phantom{+ R} \\ 5x + R \\ \underline{5x + 15} \\ R - 15 \end{array}$$

$R - 15 = 0$   
 $R = 15$

### المحاضرة الرابعة

### حل المعادلات الخطية

سنعرض أن شاء الله إلى حل المعادلات:

أولاً- المعادلات الخطية في مجهول واحد

ثانياً- المعادلات الخطية في مجهولين

## أولاً- المعادلات الخطية في مجهول واحد

**مثال:** حل المعادلة التالية  $5x = 2x + 12$  ؟

$$\text{الحل : } \quad x=4 \quad 3x=12 \quad 5x - 2x = 12$$

**مثال:** حل المعادلة التالية  $4x+5 = x-3$  ؟

$$\text{الحل : } \quad x = \frac{-8}{3} \quad 3x = -8 \quad 4x - x = -3 - 5$$

**مثال** حل المعادلة التالية

$$2(y + 2) + 5(3y - 7) = 5(3y - 11) + 12$$

**الحل:** يتم فك الأقواس أولاً كما يلي

$$2(y + 2) + 5(3y - 7) = 5(3y - 11) + 12$$

$$2y + 4 + 15y - 35 = 15y - 55 + 12$$

$$2y + 15y - 15y = -55 + 12 - 4 + 35$$

$$2y = -12$$

$$y = \frac{-12}{2} = -6$$



$$\frac{5x-1}{3} + \frac{4x-7}{2} = \frac{9x-11}{7}$$

**مثال:** حل المعادلة التالية

**الحل:** في هذه الحالة لابد من توحيد المقامات أولاً للطرف الأيمن

$$\frac{5x-1}{3} + \frac{4x-7}{2} = \frac{9x-11}{7}$$

$$\frac{2(5x-1) + 3(4x-7)}{6} = \frac{9x-11}{7}$$

$$\frac{10x-2+12x-21}{6} = \frac{9x-11}{7}$$

$$\frac{22x-23}{6} = \frac{9x-11}{7}$$



**مثال:** حل المعادلة التالية

$$\frac{3x+1}{5} = \frac{2x-1}{3}$$

**الحل:** في هذه الحالة حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$\frac{3x+1}{5} = \frac{2x-1}{3}$$

$$3(3x+1) = 5(2x-1)$$

$$9x+3 = 10x-5$$

$$9x-10x = -5-3$$

$$-x = -8$$

$$x = 8$$



ثم حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$\frac{22x - 23}{6} = \frac{9x - 11}{7}$$

$$7(22x - 23) = 6(9x - 11)$$

$$154x - 161 = 54x - 66$$

$$154x - 54x = -66 + 161$$

$$100x = 95$$

$$x = \frac{95}{100} = 0.95$$



ثانياً- حل المعادلات الخطية في مجهولين

مثال حل المعادلات التالية :

$$1 \leftarrow 5x + 2y = 12$$

$$2 \leftarrow 7x - 3y = 11$$

الحل : يتم ضرب المعادلة (١)  $7 \times$  والمعادلة (٢)  $5 \times$  ويطرح المعادلتين (٣) - (٤)

$$3 \leftarrow 35x + 14y = 84$$

$$4 \leftarrow -35x - 15y = -15$$

$$29y = 29 \quad y = 1$$

وبالتعويض في معادلة (١) عن قيمة  $y = 1$  ينتج أن

$$5x + 2(1) = 12$$

$$5x = 12 - 2$$

$$5x = 10 \quad x = 2$$

أي أن الحل هو  $x = 2$  و  $y = 1$

مثال حل المعادلات التالية :

$$1 \leftarrow 3x - 5y = 8$$

$$2 \leftarrow 8x + 2y = 6$$

الحل : يتم ضرب المعادلة (١)  $8x$  والمعادلة (٢)  $3x$  لتكون

$$24x - 40y = 64$$

$$\underline{24x + 6y = 18} \text{ وبطرح المعادلتين ينتج}$$

$$-46y = 46 \quad y = 1$$

وبالتعويض في معادلة (١) عن قيمة  $y = 1$  ينتج أن الحل هو  $x = 1$  و  $y = 1$

### تمارين

١ - حل المعادلة التالية

$$1 - 9y - 3 = 4y + 7$$

$$9y - 4y = 3 + 7$$

$$5y = 10$$

$$y = \frac{10}{5}$$

$$y = 2$$

$$2 - 3(x - 5) + 2(x + 2) = 4(x - 1) + 15$$

$$3x - 15 + 2x + 4 = 4x - 4 + 15$$

$$5x - 11 = 4x + 11$$

$$5x - 4x = 11 + 11$$

$$3 - \frac{4x-1}{2} = \frac{x+8}{3}$$

$$3(4x-1) = 2(x+8)$$

$$12x-3 = 2x+16$$

$$12x-2x = 16+3$$

$$10x = 19$$

$$x = \frac{19}{10} = 1.9$$

توحيد المقامات

$$4 - \frac{2x+1}{2} = \frac{x-1}{5} = \frac{7x-2}{4}$$

$$5(2x+1) + 2(x-1) = \frac{7x-2}{4}$$

$$\frac{10x+5+2x-2}{10} = \frac{7x-2}{4}$$

$$\frac{12x+3}{10} = \frac{7x-2}{4}$$

حل المعادلات التالية :

$$4(12x+3) = 10(7x-2)$$

$$48x+12 = 70x-20$$

$$20+12 = 70x-48x$$

$$32 = 22x$$

$$x = \frac{32}{22}$$

٥- حل المعادلات التالية

2X  $5x - y = 17 \rightarrow ①$   
 5X  $2x + y = 4 \rightarrow ②$

$10x - 2y = 34 \rightarrow ③$   
 $-10x + 5y = -20 \rightarrow ④$   
 $-7y = 14$   
 $y = \frac{14}{-7} = -2$

٦- حل المعادلات التالية

5X  $3x + 7y = 8 \rightarrow ①$   
 3X  $5x - 3y = 6 \rightarrow ②$

$15x + 35y = 40$   
 $-15x - 9y = -18$   
 $44y = 22$   
 $y = \frac{22}{44}$   
 $y = \frac{1}{2}$

$3x + 7y = 8$   
 $3x + 7(\frac{1}{2}) = 8$   
 $3x + 3.5 = 8$   
 $3x = 8 - 3.5$   
 $3x = 4.5$   
 $x = 1.5$

### المحاضرة الخامسة

### تطبيقات تجارية

### مثال:

اشترت هند دفترًا وعلبة ألوان بقيمة 7.5 ريالًا. فما ثمن الدفتر إذا كان ثمن علبة الألوان 4.25 ريالًا؟

### الحل:

ثمن الدفتر هو  $x$  لذلك يكون

$$x = 7.5 - 4.25 = 3.25 \text{ ريال}$$

### مثال:

اشترى محمد 5 علب من الجبن سعر العلبة 14 ريال. و 2 كيس أرز بسعر 40 ريال للكيس. أوجد ما دفعه محمد؟

### الحل:

$$\text{ما دفعة محمد} = 40 \times 2 + 14 \times 5 = 150 \text{ ريال}$$

### نقطة التوازن للسوق

هي النقطة التي يكون عنها دالة الطلب = دالة العرض

$$S(x) = D(x)$$

ويطلق على الكمية المطلوبة أو المعروضة عندها بكمية التوازن وأيضا السعر عند هذه النقطة يطلق عليه سعر

التوازن ورمزه  $p$

**مثال :** إذا كانت دالة الطلب لأحد المنتجات تتحدد خلال العلاقة التالية :

$$p = 180 - 3x$$

$$p = 5x + 20$$

كما أن دالة العرض تتحدد من خلال

المطلوب : تحديد كمية وسعر التوازن ؟

الحل : دالة الطلب = دالة العرض

$$180 - 3x = 5x + 20$$

$$180 - 20 = 5x + 3x$$

$$160 = 8x$$

$$X = 20$$

كمية التوازن 20 وحدة

لتحديد سعر التوازن يتم التعويض في أي دالة ( الطلب - العرض )

$$P=180-3x$$

$$P= 180-3(20)$$

$$P=180-60$$

$$P= 120$$

#### • نقطة التعادل

عند دراسة تحليل الإيرادات والتكاليف فأنا نحدد نقطة التعادل وهي النقطة التي تتساوى عندها

الإيرادات مع التكاليف

أي أن الإيراد الكلي = التكاليف الكلية

$$C(x) = R(x)$$

تشير  $x$  إلى عدد الوحدات المنتجة والمباعة

الإيراد الكلي  $R(x)$

ويحدد من خلال الإيراد الكلي = سعر البيع  $x$  عدد الوحدات

التكاليف الكلية  $C(x)$

التكاليف الكلية = التكاليف المتغيرة + التكاليف الثابتة

التكاليف المتغيرة = التكلفة المتغيرة للوحدة عدد الوحدات

تحديد الربح الأكبر

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

عند التعادل الربح الكلي = ٠

**مثال :** إذا كان التكلفة المتغيرة لإنتاج وحدة واحدة من أحد المنتجات هي ٥ ريال و التكاليف الثابتة هي

100000 ريال و سعر بيع الوحدة الواحدة هو 9 ريال.

أوجد : ١- عدد الوحدات الذي يحقق التعادل؟ ٢- عدد الوحدات الذي يحقق ربح قدره 20000 ريال ؟

الحل : تحديد دالة التكاليف الكلية:

التكاليف المتغيرة = التكلفة المتغيرة للوحدة  $x$  عدد الوحدات

التكاليف المتغيرة =  $5x$  التكاليف الثابتة = 100000

التكاليف الكلية هي  $C(x) = 5x + 100000$

$$R(x) = 9x$$

تحديد الإيراد الكلي = : سعر البيع  $x$  عدد الوحدات

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$= 9x - (5x + 100000)$$

$$= 9x + 5x - 100000$$

$$= 4x - 100000$$

عند التعادل الربح الكلي = صفر

$$= 4x - 100000 = 0$$

$$4x = 100000$$

$$x = 2500$$

$$P(x) = 20000 = \text{الربح الكلي}$$

عدد الوحدات الذي يحقق ربح قدرة 20000 ريال

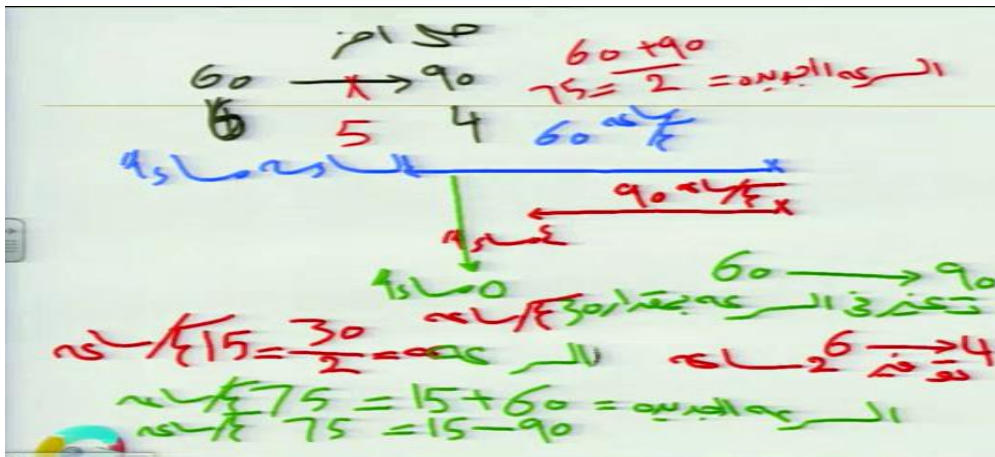
$$4x - 100000 = 20000$$

$$4x = 20000 + 100000 = 120000$$

$$x = 30000$$

تمارين : سار محمد بسيارة تبلغ سرعتها 60 كم / ساعة فوصل الى المكان المحدد ف الساعة السادسة مساءا وعندما سار بسرعة 90 كم / ساعة من نفس نقطة البداية وصل الى المكان المحدد نفسه الساعة الرابعة مساءا

فهل يمكنك معرفة السرعة التي يجب أن يصل بها الى نفس المكان المحدد ف تمام الساعة الخامسة مساء ؟



٢- اشترى محمود بضاعة بمبلغ 3450 ريال فباعها بمبلغ ٥٠٠٠ ريال حدد نسبة الربح التي حققها؟

الحل : مقدار الربح = ٣٤٥٠ - ٥٠٠٠ = ١٥٥٠ ريال

نسبة الربح = مقدار الربح / مقدار الشراء  $\times 100$

$$= \frac{1550}{3450} \times 100 = 44.92\%$$

٣- إذا كان سعر بيع الوحدة من احد المنتجات 40 ريال و التكلفة المتغيرة للوحدة 25 ريال والتكاليف الثابتة

هي 75000 ريال حدد عدد الوحدات التي تحقق التعادل و ماهي الابرار الناتجة من بيع

وانتاج 4000 وحدة؟ وما هي عدد الوحدات التي يجب بيعها لتحقيق ارباح قدرها 10000 ريال؟

الحل

الربح الكلي = الابرار الكلي - التكاليف الكلية

$$R(x) = 40x$$

$$C(x) = 25x + 75000 \quad = 40x - (25x + 75000) \quad = 40x - 25x - 75000$$

$$= 15x - 75000$$

عند التعادل الربح الكلي = صفر

$$15x - 75000 = 0 \quad 15x = 75000 \quad x = 5000$$

عند انتاج ٤٠٠٠ وحدة

$$P(x) = 15x - 75000 \quad = 15(4000) - 75000 \quad P = -1500$$

الربح الكلي = ١٠٠٠ ريال

$$15x - 75000 = 10000$$

$$15x = 10000 + 75000 \quad 15x = 85000 \quad x = 5,666$$

٤- اذا كانت دالة الطلب لأحد المنتجات تتحدد من خلال العلاقة التالية  $P = 145 - 4x$

$$P=2x+13$$

كما أن دالة العرض تتحدد من خلال

المطلوب : تحديد كمية وسعر التوازن؟

الحل :

$$145 - 4x = 2x + 13 \quad = 145 - 13 = 2x + 4x \quad = 132 = 6x \quad x = 22 \quad \text{عند التوازن}$$

سعر التوازن من خلال التعويض  $x=22$

$$145 - 4(22) = 57 \text{ S.R.}$$

### المحاضرة السادسة

### تحليل المقادير الجبرية

يقصد بتحليل المقدار الجبري هو إيجاد المكونات الأساسية لهذا المقدار

هناك العديد من الطرق لتحليل المقدار الجبري منها :

- العامل المشترك
- الفرق بين المربعين
- الفرق بين المكعبين
- مجموع المكعبين
- تحليل المقدار الثلاثي

أولاً - العامل المشترك

وهو يعني المقدار الموجود في جميع عناصر المقدار الجبري

مثال : حلل المقدار  $5xy + x^2$

الحل:

$$5xy + x^2 = x(5y+x)$$

$$9ab + 3bc$$

مثال : حلل المقدار

الحل:

$$9ab + 3bc = 3b ( 3a + c )$$

$$2y^2 - 8y + 18y^7$$

مثال : حلل المقدار

الحل:

$$= 2y(y-4+9y^6)$$

$$24x^3y - 15xy^3$$

مثال: حلل المقدار

$$= 3xy(8x^2-5y^2)$$

الحل:

ثانياً - الفرق بين المربعين

إذا كان لدينا مقدران مربعان وبينهما إشارة سالب يطلق علي هذا المقدار الفرق بين المربعين مثل  $x^2 - y^2$

يمكن تحليل الفرق بين المربعين كما يلي

$$= ( \text{الجذر التربيعي للأول} - \text{الجذر التربيعي للثاني} ) ( \text{الجذر التربيعي للأول} + \text{الجذر التربيعي للثاني} )$$

أى أن

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$25x^2 - y^2$$

مثال : حلل المقدار

الحل:

$$25x^2 - y^2 = (5x - y)(5x + y)$$

مثال : حلل المقدار  $64x^3 - 4xy^2$

الحل

$$= 64x^3 - 4xy^2 = 4x (16x^2 - y^2) = 4x (4x - y) (4x + y)$$

مثال :

حلل المقدار  $48x^2y - 75y^3$

الحل :

$$= 3y (16x^2 - 25y) = 3y (4x - 5y) (4x + 5y)$$

مثال :

حلل المقدار  $169x^5y - 144xy^5$

الحل :

$$= xy (169x^4 - 144y^4) = xy (13x^2 - 12y^2) (13x^2 + 12y^2)$$

### ثالثاً- الفرق بين المكعبين

يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما إشارة موجب الفرق بين المكعبين مثل :  $x^3 - y^3$  ويمكن

تحليل هذا المقدار إلي قوسين

أحدهما صغير والآخر كبير كما يلي

( جذر الأول - جذر الثاني ) ( مربع الأول + جذر الأول\*جذر الثاني + مربع الثاني )

أى أن :

$$x^3 - y^3 = (x - y) (x^2 + xy + y^2)$$

• مثال : حلل المقدار  $8a^3 - 125b^3$

الحل:

$$= (2a - 5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)$$

• مثال : حلل المقدار  $27x^3 - 216y^3$

الحل:

$$= (3x - 6y)(9x^2 + 18xy + 36y^2)$$

$$= 3(x - 2y)9(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

$$= 27(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

#### رابعاً- مجموع المكعبين

• يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما إشارة موجب مجموع المكعبين مثل :  $x^3 + y^3$  ويمكن

تحليل هذا المقدار إلي قوسين

أحدهما صغير والآخر كبير كما يلي

( جذر الأول + جذر الثاني ) ( مربع الأول - جذر الأول \* جذر الثاني + مربع الثاني )

أى أن :

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

• مثال : حلل المقدار  $64x^3 + 125y^3$

الحل:

$$= (4x + 5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$$

مثال:

حلل المقدار  $24bc^4 + 81b^4c$

الحل:

$$\begin{aligned} &= 3bc (8c^3 - 27b^3) \\ &= 3bc (2c+3b) (4c^2 - 6bc - 9b^2) \end{aligned}$$

حلل المقادير التالية:

|                        |     |                                        |
|------------------------|-----|----------------------------------------|
| $x^3 + 5x^2 - 7x^5$    | - ١ | الحل : $x^2 (x + 5 - 7x^3)$            |
| $25g^3h^2 + 75g^5h^7$  | - ٢ | الحل : $25g^3h^2 (1+3g^2h^5)$          |
| $48L^3 - 75Ld^2$       | - ٣ | الحل : $3L (4L - 5d) (4L+5d)$          |
| $18u^3v^3 - 50uv^5$    | - ٤ | الحل : $2uv (3u - 5v) (3u + 5v)$       |
| $27a^3 - x^3$          | - ٥ | الحل : $(3a-x) (9a^2+3ax+x^2)$         |
| $72c^5d^3 - 242c^3d^5$ | - ٦ | الحل : $2c^3d^3 (6c - 11d) (6c + 11d)$ |
| $X^3 - 64$             | - ٧ | الحل : $(x-4) (x^2+4x+16)$             |
| $125 + 8r^3$           | - ٨ | الحل : $(5+2r) (25-10r+4r^2)$          |
| $250x^2y^5 + 2x^5y^2$  | - ٩ | الحل : $2x^2y^2 (125y^3 + x^3)$        |

### المحاضرة السابعة

#### تابع تحليل المقادير الجبرية

#### خامساً- تحليل المقدار الثلاثي

يقصد بالمقدار الثلاثي الذي يكون علي الشكل التالي:

$$ax^2 + bx + c$$

ويتم تحليل المقدار الثلاثي إلى قوسين إلا أن تحليل المقدار الثلاثي يتوقف علي إشارة الحد الثالث أي هل هي موجبة أم سالبة ؟

وبالتالي نكون أمام حالتين وهما:

١ - إشارة الحد الثالث موجبة

٢ - إشارة الحد الثالث سالبة

### إشارة الحد الثالث موجبة

في هذه الحالة يتم تحليل المقدار الثالث إلى مقدران يكون:

١ - حاصل ضربهما = الحد الثالث

٢ - أشارتهما متشابهة نفس إشارة الحد الأوسط

٣ - مجموع حاصل ضرب الطرفين = الحد الأوسط

**مثال:** حلل المقدار  $x^2 + 5x + 6$  س

الحل:  $= (x+2)(x+3)$

نلاحظ أننا بحثنا عن عددين حاصل ضربهما ٦ ومجموعهما ٥

كما أن الاشارات متشابهة نفس إشارة الحد الاوسط موجب

**مثال:** حلل المقدار  $y^2 - 10y + 21$  ص

الحل:  $= (y - 3)(y - 7)$

نلاحظ أننا نبحت عن عددين حاصل ضربهما ٢١ ومجموعهما ١٠

كما أن الاشارات متشابهة نفس إشارة الحد الاوسط سالب

**مثال:** حلل المقدار  $w^2 - 9w + 20$

الحل:  $= (w-4)(w-5)$

نلاحظ أننا نبحث عن عددين حاصل ضربيهما ٢٠ ومجموعهما ٩

كما أن الاشارات متشابهة نفس اشارة الحد الاوسط سالب

**مثال:** حلل المقدار  $m^2 - 13m + 42$

الحل:  $(m-6)(m-7)$

نلاحظ أننا نبحث عن عددين حاصل ضربيهما ٤٢ ومجموعهما ١٣

كما أن الاشارات متشابهة نفس اشارة الحد الاوسط سالب

### أشارة الحد الثالث سالب

في هذه الحالة يتم تحليل المقدار الثالث إلى مقدران يكون:

١- حاصل ضربيهما = الحد الثالث

٢- أشارتهما مختلفة أى احدهما موجب والاخرى سالب وأشارة الاكبر نفس اشارة الحد الأوسط

٣- الفرق حاصل ضرب الطرفين = الحد الأوسط

**مثال:** حلل المقدار  $x^2 - x - 12$

الحل:  $(x-4)(x+3)$

نلاحظ أننا نبحث عن عددين حاصل ضربيهما ١٢ والفرق بينهما ١

كما أن الاشارات مختلفة والعدد الاكبر سالب مثل الأوسط والاخر موجب

**مثال:** حلل المقدار  $x^2 + 2x - 35$

الحل:  $(x+7)(x-5)$

نلاحظ أننا نبحت عن عددين حاصل ضربيهما ٣٥ والفرق بينهما ٢  
كما أن الاشارات مختلفة والعدد الاكبر موجب مثل الأوسط والآخر سالب

**مثال:** حلل المقدار  $x^3 + s^3 - 42s$

الحل  $= s (s^2 + s + 42)$

$= s (s-7) (s+6)$

نلاحظ أننا أخذنا س عامل مشترك اولاً ثم

نبحت عن عددين حاصل ضربيهما ٤٢ والفرق بينهما ١  
كما أن الاشارات مختلفة والعدد الاكبر موجب مثل الأوسط والآخر سالب

حلل المقادير التالية:

١-  $2x^2 + 13x + 15$  الحل :  $(2x+3) (x+5)$

٢-  $x^2 + 11x + 24$  الحل :  $(x + 3) (x + 8)$

٣-  $6q^2 - q - 15$  الحل :  $(3q-5) (2q + 3)$

٤-  $2a^2 + a^2 - 15a$  الحل :  $a (2a - 5) (a + 3)$

٥-  $y^2 + 12z + 35$  الحل :  $(z+5) (z+7)$

٦-  $k^2 - 4k - 12$  الحل :  $(k+2) (k-6)$

## المحاضرة الثامنة

### حل المعادلات من الدرجة الثانية فى مجهول واحد

تكون صورة المعادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد هي

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ويمكن حلها باستخدام التحليل أو باستخدام القانون كما يلي

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**مثال:** حل المعادلة التالية

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

الحل: يتم تحليل المقدار الثلاثي كما يلي

$$0 = (5 - x) (2 - x)$$

أي أن

$$2 = x \text{ ومنها } 0 = 2 - x$$

$$\text{أو } 5 = x \text{ ومنها } 0 = 5 - x$$

حل آخر باستخدام القانون

$$10 = c \quad 2 = b \quad 1 = a$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{7 + 3}{2} = 5$$

$$x = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

$$5 = 2 / (3+7) = x$$

$$2 = 2 / (3-7) = x$$

**مثال :** حل المعادلة التالية

$$X^2 - 2x - 24 = 0$$

الحل :

وبالتحليل  $(x + 4) (x - 6)$

$$6 = x \quad \text{أو} \quad 0 = 6 - x$$

$$4 = -x \quad \text{أو} \quad 0 = 4 + x$$

حل آخر باستخدام القانون

$$10 = c \quad 2 = b \quad 1 = a$$

$$\frac{(-24) \pm \sqrt{4 - 4(1)(-24)}}{2(1)} = x$$

$$2(1)$$

$$\frac{10 \pm 2}{2} = x$$

$$2$$

$$6 = 2 / (10+2) = x$$

$$4 = 2 / (3-10) = x$$

**مثال :** حل المعادلة  $12x^2 + 4x = 33$

$$12x^2 + 4x - 33 = 0 \quad \text{الحل :}$$

الحل باستخدام القانون

$$\begin{array}{r} 33- = c \quad 4 = b \quad 12 = a \\ \hline (33-) (12)4 -16 \quad \pm 4- = x \end{array}$$

$$(12)2$$

$$40 + 4- = x$$

$$24$$

$$1.5 = 24 / (40+4-) = x$$

$$1.833 - = 24 / (40-4-) = x$$

تمارين

حل المعادلات التالية:

$$x^2 - 10x + 24 = 0 \quad *$$

$$(x-6) (x-4)$$

$$4=x \text{ أو } 6=x$$

$$x^2 + 4x = 32 \quad *$$

$$2x + 4x - 32 = 0$$

$$(x-4) (x+8)$$

$$4 = x \text{ أو } 8- = x$$

$$2x^2 - 17x + 8 = 0^*$$

$$8 = c \quad 17- = b \quad 2 = a$$

$$\begin{array}{r} (4x^2x8) -289 \sqrt{\quad} \quad \pm 17 = x \end{array}$$

$$2x^2$$

$$\frac{15 + 17}{4} = x$$

$$4$$

$$8 = 4 / (15 + 17) = x$$

$$0.5 = 4 / (15 - 17) = x$$

### تطبيقات تجارية واقتصادية

**مثال :** إذا كانت دالة العرض لأحد المنتجات هي  $p(x) = S(x) = x^2 + 14$

وكانت دالة الطلب هي  $p = D(x) = 174 - 6x$

المطلوب : حدد كمية وسعر التوازن ؟

الحل :

عند التوازن . . دالة الطلب = دالة العرض  $p(x) = D(x) = S(x)$

$$174 - 6x = x^2 + 14$$

$$x^2 + 6x + 14 - 174 = 0$$

$$x^2 + 6x - 160 = 0$$

$$(x - 10)(x + 16) = 0$$

$$x + 16 = 0 \quad x - 10 = 0$$

$x = -16$  مرفوض  $x = 10$  كمية التوازن

تحديد سعر التوازن بالتعويض في دالة العرض  $p = x^2 + 14$

$$P = (10)^2 + 14 = 114$$

او بالتعويض في دالة الطلب  $p = 174 - 6x$

$$P = 174 - 6(10) = 114$$

متال:

إذا كان  $x$  تشير إلى عدد الوحدات المنتجة والتي يمكن ان تباع  
بسعر  $p = 100 - 0.6x$  وكانت دالة التكاليف الكلية هي

$$C(x) = 5x + 2000$$

اوجد:

عدد الوحدات التي تحقق التعادل؟

وما هو الربح او الخسارة عندما يكون عدد الوحدات المنتجة  
والمباعة 100 وحدة؟

وما هو عدد الوحدات اللازم لتحقيق ربح قدرة 1000 ريال؟

الحل :

إيجاد دالة الإيراد الكلي = سعر البيع  $x$  عدد الوحدات

$$R(x) = x(100 - 0.6x) = 100x - 0.6x^2$$

$$c(x) = 5x + 2000 \quad \text{دالة التكاليف الكلية}$$

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 100x - 0.6x^2 - (5x + 2000)$$

$$P(x) = 100x - 0.6x^2 - 5x - 2000$$

$$P(x) = -0.6x^2 + 95x - 2000$$

عند التعادل      الربح الكلي = صفر

$$P(x) = -0.6x^2 + 95x - 2000 = 0$$

$$a = -0.6 \quad b = 95 \quad c = -2000$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-95 \pm \sqrt{9025 - 4(-0.6)(-2000)}}{2(-0.6)}$$

$$x = \frac{-95 \pm 65}{-1.2}$$

$$x = \frac{-95 - 65}{-1.2} = 133.33 \quad \text{وحدة}$$

$$x = \frac{-95 + 65}{-1.2} = 25$$



• الربح او الخسارة عندما يكون عدد الوحدات المنتجة والمباعة ١٠٠ وحدة

$$P(x) = -0.6x^2 + 95x - 2000$$

$$P(x) = -0.6(100)^2 + 95(100) - 2000$$

$$P(100) = 1500$$

- عدد الوحدات اللازم لتحقيق ربح قدرة ١٠٠٠ ريال

$$P(x) = -0.6x^2 + 95x - 2000 = 1000$$

$$P(x) = -0.6x^2 + 95x - 3000 = 0$$

$$P(x) = -0.6x^2 + 95x - 3000 = 0$$

$$a = -0.6 \quad b = 95 \quad c = -3000$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-95 \pm \sqrt{9025 - 4(-0.6)(-3000)}}{2(-0.6)}$$

$$x = \frac{-95 \pm 42.72}{-1.2}$$

$$x = \frac{-95 - 42.72}{-1.2} = 114.76$$

$$x = \frac{-95 + 42.72}{-1.2} = 43.56$$

### المحاضرة التاسعة

#### الأسس

سبق وان درسنا قاعدة هامة:

١- إذا اتحدت الأساسات فأنة عند الضرب تجمع الأسس

٢- عند القسمة إذا اتحدت الأساسات تطرح الأسس

**مثال:** أختصر المقدار التالي:

$$\frac{z^5 n^3 z^4}{n^2 z^2 n^3} = \frac{z^9 n^3}{z^2 n^5} = z^{9-2} n^{3-5} = z^7 n^{-2}$$

قاعدة هامة :

$$(x^n)^m = x^{n \times m}$$

مثال :  $(2^5)^3 = 2^{5 \times 3} = 2^{15}$

مثال : اختصر

$$(x^5)^{-1} = x^{5 \times -1} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

مثال : اختصر المقدار  $\left(\frac{2ab^3}{3ba^2}\right)^3$

الحل :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2ab^3}{3ba^2}\right)^3 &= \frac{2^3 a^3 b^9}{3^3 b^3 a^6} = \frac{8}{27} a^{3-6} b^{9-3} \\ &= \frac{8}{27} a^{-3} b^6 = \frac{8b^6}{27a^3} \end{aligned}$$

مثال : اختصر المقدار  $\sqrt[3]{27x^9}$

الحل :

$$\sqrt[3]{27x^9} = 27^{\frac{1}{3}} x^{\frac{9}{3}} = 3x^3$$

مثال : اختصر المقدار  $\sqrt{\frac{75m^3n}{3mn^3}}$

الحل :

$$\sqrt{\frac{75m^3n}{3mn^3}} = \sqrt{25m^2n^{-2}} = 5mn^{-1} = \frac{5m}{n}$$

مثال : حل المعادلة التالية :  $(x-1)^2 = 64$  ؟

الحل : بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)^2} &= \sqrt{64} \\ x-1 &= 8 \\ x &= 8+1=9\end{aligned}$$

**مثال:** حل المعادلة التالية:

$$\sqrt[3]{\frac{x+42}{x}} = 2$$

الحل : بتكعيب الطرفين

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{\frac{x+42}{x}}\right)^3 &= (2)^3 \\ \frac{x+42}{x} &= 8 \\ x+42 &= 8x \\ 42 &= 8x-x \\ 42 &= 7x \\ x &= \frac{42}{7} = 6\end{aligned}$$

**تمارين:**

اختصر المقادير التالية:

$$\begin{aligned}1- \left(\frac{2xy}{5xy^2}\right)^2 &= \frac{2^2 x^2 y^2}{5^2 x^2 y^4} = \frac{4}{25} y^{-2} \\ 2- \sqrt[3]{64 L^9 f^{-6}} &= \sqrt[3]{64} L^{\frac{9}{3}} f^{-\frac{6}{3}} \\ &= 4 L^3 f^{-2}\end{aligned}$$

$$3 - \frac{25 d^7 w^2}{5 d^2 w} = 5 d^{7-2} w^{2-1} = 5 d^5 w$$

$5 - (-1)$   
 $x^{5+1} = x^6$

$$4 - \sqrt[3]{\frac{128 x^5 y^7}{2 x^{-1} y}} = \sqrt[3]{64 x^6 y^6} = 4 x^{\frac{6}{3}} y^{\frac{6}{3}} = 4 x^2 y^2$$

### اللوغاريتمات

هي قوة الأس المرفوع لأساس معين

$$10^3 = 1000 \quad \text{لذلك يكون}$$

$$\log 1000 = 3 \quad \text{الأس}$$

الأساس <sup>10</sup>

$$32 = 2^5 \quad \text{وكذلك}$$

$$\log 32 = 5$$

2

**مثال** أوجد قيمة المجهول اذا كان  $\log a = 3$

5

$$\text{الحل : } a = 5^3 = 125$$

**مثال**

أوجد قيمة المجهول اذا كان  $\log x = 7$

2

الحل:

$$128 = 2^7 = x$$

**مثال** أوجد قيمة المجهول اذا كان  $\log 64 = 2$

$$x$$

الحل :

$$x^2 = 64$$

$$x^2 = 8^2$$

$$x = 8$$

**مثال**

أوجد قيمة المجهول اذا كان  $\log u = \frac{1}{5}$

$$32$$

$$\frac{1}{5}$$

الحل:

$$2 = 32 = x$$

**مثال** أوجد قيمة المجهول اذا كان  $\log 256 = 4$

$$a$$

الحل:

$$a^4 = 256$$

$$a = (256)^{\frac{1}{4}}$$

$$a = 4$$

تمارين :

أوجد قيمة المجهول فيما يلي :

- 1-  $\log_3 9 = t$    
 $9 = 3^t$    
 $3^2 = 3^t \Rightarrow t = 2$
- 2-  $\log_9 81 = 2$    
 $81 = a^2$    
 $9^2 = a^2 \Rightarrow a = 9$
- 3-  $\log_5 125 = k$    
 $125 = 5^k$    
 $5^3 = 5^k \Rightarrow 3 = k$

- 4-  $\log_{49} x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = (49)^{\frac{3}{2}}$    
 $x = (7^2)^{\frac{3}{2}} = 7^3 = 343$
- 5-  $\log_{81} r = \frac{3}{4}$    
 $r = (81)^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$
- 6-  $\log_{121} x = \frac{1}{2}$    
 $x = (121)^{\frac{1}{2}} = 11$
- 7-  $\log_{625} 125 = g$    
 $125 = 625^g$    
 $5^3 = 5^{4g} \Rightarrow g = \frac{3}{4}$

قوانين اللوغاريتمات

$$\log x^n = n \log x \quad \bullet$$

مثال:

$$\log 5^4 = 4 \log 5$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2$$

قانون :

$$\log(x \times y) = \log x + \log y \quad \bullet$$

مثال:

$$\log 20 = \log(5 \times 4) = \log 5 + \log 4$$

$$\log 42 = \log(6 \times 7) = \log 6 + \log 7$$

قانون :

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

مثال:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{35}{2}\right) &= \log 35 - \log 2 \\ &= \log(7 \times 5) - \log 2 \\ &= \log 7 + \log 5 - \log 2\end{aligned}$$

• هام جداً:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_5 5 = 1 \quad \log_7 7 = 1 \quad \log_{10} 10 = 1$$

إذا لم يكتب الأساس تحت اللوغاريتم يكون 10

• مثال: أوجد قيمة المقدار

$$\log 2 - \log 10 + \log 5 + 2 \log \sqrt{10} - \log 16 + \log 4^2$$

الحل:

$$= \log 2 - 1 + \log 5 + 2 \log 10^{\frac{1}{2}} - \log 4^2 + \log 4^2$$

$$= \log(2 \times 5) - 1 + 2 \times \frac{1}{2} \log 10$$

$$= \log 10 - 1 + \log 10$$

$$= 1 - 1 + 1 = 1$$

بسم الله الرحمن الرحيم

أوجد قيمة المقدار

$$\log_7 125 + \log_7 64 - 3 \log_7 20 + \log_7 49$$

$$\log_7 5^3 + \log_7 4^3 - 3 \log_7 (4 \times 5) + \log_7 7^2$$

$$3 \log_7 5 + 3 \log_7 4 - 3 (\log_7 4 + \log_7 5) + 2 \log_7 7$$

$$\cancel{3 \log_7 5} + \cancel{3 \log_7 4} - \cancel{3 \log_7 4} - \cancel{3 \log_7 5} + 2$$

$$= 2$$

أوجد قيمة المقدار

$$\frac{1}{2} \log_5 625 - \log_5 35 + \log_5 14 - \log_5 10$$

$$\frac{1}{2} \log_5 5^4 - \log_5 (5 \times 7) + \log_5 (2 \times 7) - \log_5 (2 \times 5)$$

$$2 \log_5 5 - \log_5 5 - \log_5 7 + \log_5 2 + \log_5 7 - \log_5 2 - \log_5 5$$

$$2 - 1 - 1 = 0$$

## المحاضرة العاشرة

### التباديل والتوافيق

#### التباديل

- وهى تشير إلى عدد طرق ترتيب الأشياء. ويمز لها بالرمز  $P$   
فإذا كان لدينا  $n$  من الأشياء نريد ترتيبها  $r$  من الترتيبات فأن عدد طرق الترتيب هى  ${}_nP_r$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nP_r = n (n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

مثال: أوجد قيمة  ${}_5P_2$

$$P=5 \times 4 = 20$$

مثال: أوجد قيمة  ${}_6P_3$

$$P=6 \times 5 \times 4 = 120$$

• لاحظ أن  ${}_nP_n = n!$

$${}_3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6 \quad \text{أى أن}$$

$${}_5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad \text{كما أن}$$

• مثال أختار الإجابة الصحيحة:

قيمة  ${}_6P_2$  هي :

(أ) 12 (ب) 30 (ج) 36 (د) 15

الحل:  ${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$  الإجابة هي (ب)

• مثال أختار الإجابة الصحيحة:

قيمة  ${}_6P_6$  هي :

(أ) 36 (ب) 26 (ج) 6! (د) 256

الحل  $6P_6 = 6!$  الإجابة هي ج

**مثال:** أنفقت 6 فرق رياضية على تكوين دورى خاص بها احسب عدد المباريات التى يتم لعبها؟

الحل: عدد المباريات  $6P_2 = 6 \times 5 = 30$  30 مباراة

**مثال:** بكم طريقة يمكن جلوس 4 اشخاص على 5 كراسي؟

الحل عدد الطرق  $5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$  120 طريقة

التوافيق

• وتشير إلى عدد طرق الاختيار ويرمز لها بالرمز  $C$   
فإذا كان لدينا  $n$  من الأشياء ونريد أن نختار منها عدد  $r$  فإن عدد طرق الاختيار هي  $C$  حيث أن  $nCr$

$$nCr = \frac{nPr}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\dots 3 \times 2 \times 1}$$

• **مثال** أوجد قيمة  $5C_2$  ؟

$$5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 20$$

الحل :

• **مثال** أوجد قيمة  $7C_4$  ؟

$$7C_4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

الحل :

هام جداً

$$nC_n = 1 \quad \dots \quad 6C_6 = 1 \quad \dots \quad 8C_8 = 1 \quad \dots \quad 12C_{12} = 1 \quad \dots$$

$$nC_0 = 1 \quad \dots \quad 4C_0 = 1 \quad \dots \quad 7C_0 = 1 \quad \dots \quad 10C_0 = 1$$

$$nC_1 = n \quad \dots \quad 5C_1 = 5 \quad \dots \quad 11C_1 = 11 \quad \dots \quad 7C_1 = 7$$

**مثال:** إدارة بها 12 موظف نريد أن نختار منهم 3 لتكوين لجنة أحسب عدد طرق الاختيار؟

الحل: عدد طرق الاختيار  ${}^{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$

**مثال:** بفرض في المثال السابق إذا نص على أن مدير الإدارة لا بد من اختياره أحسب عدد طرق الاختيار؟

الحل: عدد طرق الاختيار  ${}^{11}C_2 = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55$

### تمارين

أولاً - أوجد قيمة ما يلي :

(١)  ${}^8P_2 = 8 \times 7 = 56$  (٢)  ${}^5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$  (٣)  ${}^7P_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

(٤)  $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$  (٥)  ${}^4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  (٦)  ${}^8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$

(٧)  ${}^9C_1 = 9$  (٨)  ${}^7C_4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$  (٩)  ${}^6C_6 = 1$

ثانياً -

١ - تتفقت ١٠ فرق رياضية على تكوين دورى فيما بينها أوجد عدد المباريات التي يمكن لعبها؟

الحل :  ${}^{10}P_2 = 10 \times 9 = 90$  90 مباراة

٢ - إدارة بها ١٥ موظف نريد تكوين منهم لجنة مكونه من ثلاثة اوجد عدد طرق ؟

الحل :  ${}^{15}C_3 = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = 455$  455 طريقة

وإذا نص على اختيار شخص معين ( ننقص واحد من البسط والمقام )

${}^{14}C_2 = \frac{14 \times 13}{2 \times 1} = 91$  91 طريقة

## المحاضرة الحادي عشر

### نظرية ذات الحدين

مثال : أوجد مفكوك  $(x+3)^2$  ؟

الحل : سبق وأن درسنا أنه يمكن فك هذا المقدار باستخدام قاعدة الضرب

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

مثال : أوجد مفكوك  $(x+3)^2$  ؟

نلاحظ هنا أن الأس ليس 2 وإنما هو 3 لذلك لا تصلح القاعدة السابقة و يتم إجراء الضرب للقوس في نفسه ثلاث مرات أو نطبق القاعدة ثم نضرب الناتج في القوس نفسه مرة أخرى وفي حالة الأس أكبر من هذا يكون الأمر أطول وأصعب لذا جاءت نظرية ذات الحدين لتحل لنا هذه المشكلة كما يتضح مما يلي : ( النظرية )

$$(x+a)^n = nC_0 a^0 x^n + nC_1 a^1 x^{n-1} + nC_2 a^2 x^{n-2} + \dots + nC_n a^n x^0$$

مثال : أوجد مفكوك  $(x+3)^2$  ؟

$$\begin{aligned}(x+3)^3 &= 3C_0(3)^0 x^3 \\ &+ 3C_1(3)^1 x^2 \\ &+ 3C_2(3)^2 x^1 \\ &+ 3C_3(3)^3 x^0 \\ (x+3)^3 &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27\end{aligned}$$

الحد العام لنظرية ذات الحدين هو

$$H_{r+1} = nCr (second\ term)^r (first\ term)^{n-r}$$

دائماً  $r$  أقل من رتبة الحد بمقدار واحد . .

مثال :

أوجد الحد الخامس في مفكوك  $(x + 3)^9$  ؟

الحل

$$H_{r+1} = ncr(\text{socand term})^r (\text{first term})^{n-r}$$

نجد أننا نريد  $H_5$  لذلك  $r = 4$   $n = 9$

$$H_5 = 9c4(3)^4(x)^5 = 126 \times 81x^5 = 10206x^5$$

مثال :

أوجد الحد الرابع في مفكوك  $(2x - 5y)^7$  ؟

الحل

$$H_{r+1} = ncr(\text{socand term})^r (\text{first term})^{n-r}$$

نجد أننا نريد  $H_4$  لذلك  $r = 3$   $n = 7$

$$\begin{aligned} H_4 &= 7c3(-5y)^3(2x)^4 = 35 \times -125y^3 \times 16x^4 \\ &= -70000x^4y^3 \end{aligned}$$

الحد الأوسط

يتوقف الحد الأوسط على الأس اذا كان فردى أو زوجي .. الأس زوجى يكون رتبة الحد الأوسط

$\frac{n+2}{2}$  أما اذا كان لدينا الأس فردى يوجد حدان أوسطان رتبتهما هي  $\frac{n+3}{2}$  و  $\frac{n+1}{2}$  ..

مثال :

مثال: أوجد الحد الأوسط في مفكوك  $(x - 2)^{10}$  ؟

الحل

$$\frac{10+2}{2} = 6 \quad \text{رتبة الحد الوسط هي}$$

نجد أننا نريد  $H_6$  لذلك  $r = 5$   $n = 10$

$$\begin{aligned} H_6 &= 10C5(-2)^5(x)^5 = 252 \times -32 \times x^5 \\ &= -8064x^5 \end{aligned}$$

الحد الخالي من س

أوجد الحد الخالي من  $x$  فى مفكوك  $\left(x - \frac{4}{x}\right)^{12}$  ؟

الحل

$$\begin{aligned}H_{r+1} &= 12Cr \left(\frac{-4}{x}\right)^r (x)^{12-r} \\&= 12Cr (-4)^r (x)^{-r} (x)^{12-r} \\&= 12Cr (-4)^r x^{12-2r}\end{aligned}$$

بما أننا نريد الحد الخالي من  $x$  لذلك نضع  $12 - 2r = 0$

أي هو الحد السابع  $r = 6$  ..  $12 = 2r$

الحد الذي يحتوي على  $x^4$

أوجد الحد الذى يحتوى على  $x^4$  فى مفكوك  $\left(x - \frac{4}{x}\right)^{12}$  ؟

الحل

$$\begin{aligned}H_{r+1} &= 12Cr \left(\frac{-4}{x}\right)^r (x)^{12-r} \\&= 12Cr (-4)^r (x)^{-r} (x)^{12-r} \\&= 12Cr (-4)^r x^{12-2r}\end{aligned}$$

بما أننا نريد الحد الذى يحتوى على  $x^4$

لذلك نضع  $12 - 2r = 4$

أي هو الحد الخامس  $r = 4$  ...  $8 = 2r$  ..  $12 - 4 = 2r$

تمارين :

١- أوجد الحد السادس في مفكوك  $(x+4)^{12}$  ؟

$$H_{r+1} = nC_r (\text{الاول})^{n-r} (\text{الثاني})^r$$

$$H_6 \rightarrow r=5 \quad 5^{12-5}$$

$$H_6 = 12C_5 (4)^5 (x)^7 \\ = 12C_5 \cdot 4^5 \cdot x^7$$

٢- أوجد الحد الأوسط في مفكوك  $(5x+y)^8$  ؟

$$\text{رتبه الحد: } 5 = \frac{8+2}{2} = \frac{n+2}{2}$$

$$H_5 = 8C_4 (y)^4 (5x)^4 \\ = 8C_4 \times 5^4 y^4 x^4$$

٣- أوجد الحد الخالي من  $x$  في مفكوك  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$  ؟

$$H_{r+1} = 9C_r \left(\frac{1}{x}\right)^r (x^2)^{9-r} \\ = 9C_r (1)^r x^{-r} x^{18-2r} \\ = 9C_r (1)^r x^{18-3r}$$

$$18-3r=0$$

$$18=3r$$

$$r = \frac{18}{3} = 6$$

الحد الرابع  
هو الخامس

4- أوجد الحد الذي يحتوي على  $x^3$  في مفكوك  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$  ؟

$$H_{r+1} = 9C_r (-1)^r x^{18-3r}$$

$$18-3r=3$$

$$H_6 \quad \therefore 18-3=3r$$

$$15=3r$$

$$r = \frac{15}{3} = 5$$

الحد السادس

5- أوجد مفكوك المقدار  $(5x - 2y)^4$  ؟

$$= 4C_0 (-2y)^0 (5x)^4$$

$$4C_1 (-2y)^1 (5x)^3$$

$$4C_2 (-2y)^2 (5x)^2$$

$$4C_3 (-2y)^3 (5x)^1$$

$$4C_4 (-2y)^4 (5x)^0$$

## المحاضرة الثانية عشر

### المتواليات

سيتم تدريس:

١- المتواليات العددية ( الحسابية )

٢- المتواليات الهندسية

أولاً- المتواليات العددية

يطلق على متسلسلة الأعداد التي يكون الفرق فيها بين أى حد والحد السابق له مباشرة مقدار ثابت المتوالية العددية .. فمثلاً - ٢ ، ٥ ، ٨ ، ..

يطلق عليها المتوالية العددية حيث أن

$$٣ = ٥ - ٨$$

$$٣ = ٢ - ٥$$

الفرق الثابت يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز "d"

الرموز المستخدمة:

a الحد الأول

d أساس المتوالية ( الفرق الثابت )

L الحد الأخير

H<sub>n</sub> الحد العام

S<sub>n</sub> مجموع المتوالية

القوانين المستخدمة

الحد العام

$$H_n = a + (n-1)d$$

مجموع المتوالية يمكن إيجاده بطريقتين:

١ - بمعلوميه الحد الأخير

$$S_n = \frac{n}{2} (a + L)$$

٢ - بمعلوميه أساس المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

### مثال

في المتوالية التالية ٣ ، ٧ ، ١١ ، ... أوجد:

١- حدد نوع المتوالية؟

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد الخامس ؟

٤- الحد التاسع ؟

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل

$$\text{بما أن } 11-7=4 \text{ و } 7-3=4$$

أذن الفرق مقدار ثابت

١- نوع المتوالية : متوالية عددية

٢- أساس المتوالية  $d=4$

٣- الحد الخامس  $H_5 = a + 4d$

$$H_5 = 3 + 4(4) = 19$$

٤- الحد التاسع  $H_9 = a + 4d$

$$H_9 = 3 + 4(8)$$

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2} ( 2a + (n-1) d )$$

$$S_n = \frac{10}{2} ( 2 \times 3 + 9 \times 4 ) = 5( 6 + 36 ) = 210$$

مثال متوالية حدودها 25 ،.... ، 60 ، 65 ، 70

١- حدد نوع المتوالية

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد السادس ؟

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

٥- عدد حدود المتوالية ؟

الحل:

$$١- \text{ بما أن } 70-65 = -5 \text{ .. } 65-70=-5$$

أذن الفرق مقدار ثابت أى أن المتوالية عددية

٢- أساس المتوالية  $d = -5$

٣- الحد السادس  $H_6 = a + 5d$

$$H_6 = 70 + 5(-5) = 45$$

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2} ( 2a + (n-1) d )$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} ( 2 \times 70 + 9 \times -5 )$$

$$= 5( 140 - 45 ) = 5 \times 95 = 475$$

٥- عدد حدود المتوالية

$$L = a + (n-1)d = 25$$

$$= 70 + (n-1) \times -5 = 25 \quad = 70 - 5n + 5 = 25 \quad = 70 + 5 - 25 = 2n$$

$$50 = 2n \quad n = 10$$

مثال

متوالية عددية مجموعها 864 وحدها الأول 9 وحدها الأخير 99 أوجد عدد حدود المتوالية وأساس المتوالية؟

$$S_n = \frac{n}{2} (a + L) \quad \text{الحل : إيجاد عدد حدود المتوالية}$$

$$864 = \frac{n}{2} (9+99)$$

$$864 = 54n \quad n = \frac{864}{54} = 16$$

إيجاد أساس المتوالية بما أن عدد الحدود 16 يكون الحد الأخير هو  $H_{16}$

$$H_{16} = L = a + 15d = 99$$

$$= 9+15d = 99$$

$$= 15d = 90 \quad d = 6$$

مثال :متوالية عددية حدها الثاني 8 و حدها الخامس 25 أوجد حدها العاشر ومجموع العشرين حداً الأولى

منها ؟

الحل :

$$H_5 = a + 4d = 23$$

$$H_2 = a + d = 8$$

$$3d = 15 \quad d = 5$$

ب طرح المعادلتين فإن

بالتعويض في أى معادلة لإيجاد قيمة الحد الأول

$$a+d = 8 \quad a+5=8 \quad a= 3$$

$$H_{10} = a + 9d = 3 + 9(5) = 48 \quad \text{الحد العاشر}$$

مجموع العشرين حداً الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2} ( 2a + (n-1) d )$$

$$S_n = \frac{20}{2} ( 2 \times 3 + 19 \times 5 )$$

$$= 10 ( 6 + 95 ) = 10 \times 101 = 1010$$

**مثال :** متوالية عددية مكونة من خمس حدود ومجموع حديها الثاني والرابع ٥٢ ومجموع حديها الثالث والخامس ٦٦ أوجد المتوالية ؟

**الحل :** مجموع الحدين الثاني والرابع = ٥٢

$$H_2 + H_4 = a + d + a + 3d$$

$$= 2a + 4d = 52 \quad (1)$$

مجموع الحدين الثالث والخامس

$$H_3 + H_5 = a + 2d + a + 4d$$

$$= 2a + 6d = 66 \quad (2)$$

ب طرح المعادلة الأولى من الثانية يكون الناتج

$$2d = 14 \quad d = 7$$

إيجاد الحد الأول للمتوالية : يتم التعويض في المعادلة الأولى :

$$2a + 4d = 52$$

$$2a + 4(7) = 52$$

$$2a + 28 = 52$$

$$2a = 52 - 28 \quad 2a = 24 \quad a = 12$$

وبذلك تكون المتوالية هي

$$12.19.26.33.40$$

1- في المتوالية التالية  
أوجد:

1- حدد نوع المتوالية؟  
2- أساس المتوالية؟  
3- الحد الثامن؟

$a$  18, 21, 24, ...

$d = 21 - 18 = 3$   
 $d = 24 - 21 = 3$

∴ الفرق مقدار ثابت ∴ المتوالية عصرية

$H_8 = a + 7d$   
 $= 18 + 7(3)$   
 $18 + 21 = 39$

4- الحد الثاني عشر؟

$H_{12} = a + 11d$   
 $= 18 + 11(3)$   
 $= 18 + 33 = 51$

5- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية؟

$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$   
 $= \frac{10}{2} [2 \times 18 + 9 \times 3]$   
 $= \frac{10}{2} [36 + 27]$   
 $= 5 \times 63 = 315$

٢- في المتوالية التالية  
أوجد:

١- حدد نوع المتوالية؟ **عربية**

٢- أساس المتوالية؟

٣- الحد العاشر؟

٤- الحد الثاني عشر؟

٥- مجموع العشرين حداً الأولى من المتوالية؟

$a, 86, 82, 78, \dots$

$d = 82 - 86 = -4$   
 $d = 78 - 82 = -4$

$H_{10} = a + 9d$   
 $= 86 + 9(-4)$   
 $= 86 - 36 = 50$

$H_{12} = a + 11d$   
 $= 86 + 11(-4)$   
 $86 - 44 = 42$

$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$   
 $S_{20} = \frac{20}{2} [2 \times 86 + 19 \times -4]$   
 $= 10 [172 - 76]$   
 $10 (96) = 960$

$$L = H_n = a + (n-1)d$$

$$5 + 10d = 35$$

$$10d = 35 - 5$$

$$10d = 30$$

$$d = \frac{30}{10} = 3$$

٣- متوالية حسابية حدها الاول = 5 وحدها الاخير = 35  
و مجموعها 220 فما هو عدد حدودها و أساسها؟

$$a = 5 \quad L = 35 \quad S_n = 220$$

$$n = \frac{220}{20}$$

$$n = 11$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a + L]$$

$$220 = \frac{n}{2} [5 + 35]$$

$$220 = \frac{n}{2} \times 40$$

$$220 = 20n$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2 \times 77 + 9 \times -9]$$

$$5 [154 - 81] = 5 \times 73$$

$$= 365$$

٤- متوالية عددية حدها الثاني 68 وحدها الرابع 50 أوجد المتوالية ومجموع العشر حدود الأولى منها؟

$$\begin{array}{l} H_4 = a + 3d = 50 \\ H_2 = a + d = 68 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} a + d = 68 \\ a - 9 = 68 \\ a = 68 + 9 \\ \boxed{a = 77} \end{array} \right.$$

$$\underline{2d = -18}$$

$$d = -\frac{18}{2}$$

$$d = -9$$

المتوالية: 77, 68, 59, 50, ...

٥- متوالية حسابية مكونة من أربع حدود وكان مجموع الحدين الأول والرابع = 70 ومجموع الحدين الثاني والثالث = 70 أوجد المتوالية؟

$$\textcircled{a} + a + d + a + 2d + \textcircled{a + 3d}$$

$$a + a + 3d = 70$$

$$\boxed{2a + 3d = 70} \rightarrow \textcircled{1}$$

$$a + d + a + 2d = 70$$

$$\boxed{2a + 3d = 70} \rightarrow \textcircled{2}$$

... عدد الحاصل أنك عدد للمعادلات  
عدد لا يتغير من الحلول ولا يتغير المتوالي

## المحاضرة الثالثة عشر

### المتوالية الهندسية

يطلق علي متسلسلة الأعداد التي يكون خارج قسمة أى حد فيها على الحد السابق له مباشرة مقدار ثابت بالمتوالية الهندسية.

الرموز المستخدمة

a الحد الأول

r أساس المتوالية

$S_n$  مجموع n من الحدود

$S_{\infty}$  مجموع المتوالية إلى ما لانهاية

القوانين المستخدمة

$$H_n = a r^{n-1} \quad \text{الحد العام}$$

مجموع عدد معين من الحدود

$$S_n = \frac{a (r^n - 1)}{r - 1}$$

مجموع المتوالية إلى ما لانهاية

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

**مثال:** في المتوالية 4 ، 8 ، 16 ، ... أوجد الحد العاشر ومجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل:

$$\frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2 \quad \text{نجد أن}$$

أذن المتوالية هندسية وأساسها  $r = 2$

$$H_{10} = a r^9 \quad \text{الحد العاشر}$$

$$= 4(2)^9 = 2048$$

مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية.

$$S_n = (a (r^{n-1})) / (r-1)$$

$$S_{10} = (4 (2^{10-1})) / (2-1) = 4092$$

**مثال :** متوالية هندسية حدها الأول 5 وأساسها 3- أوجد الحد السادس ومجموع الثمان حدود الأولى منها؟

$$\text{الحل : } a = 5 \quad r = -3$$

$$H_6 = ar^5 = 5 (-3)^5 = -1215 \quad \text{الحد السادس}$$

مجموع الثمان حدود الأولى من المتوالية هو

$$S_n = \frac{a (r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = (5 ((-3)^{8-1})) / (-3-1) = -8200$$

**مثال :** متوالية هندسية حدها الرابع 448 وحدها السادس 7168 أوجد المتوالية ؟

$$\text{الحل : } H_6 = ar^5 = 7168$$

$$H_4 = ar^3 = 448$$

بقسمة المعادلتين ينتج أن

$$r^2 = 16 \quad r = \sqrt{16} = 4$$

بالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن :

$$H_6 = ar^5 = a(4)^5 = 7168$$

$$1024a = 7168$$

$$a = \frac{7168}{1024} = 7$$

المتوالية هي 7.28.112.448....

**مثال:** في المتوالية 729 ، 243 ، 81 ، .... أوجد الحد الثامن و مجموع العشر حدود الأولى ومجموع المتوالية إلى ما لانهاية ؟

الحل: نجد أن خارج قسمة أي حد على السابق له مقدار ثابت لذلك هي متوالية هندسية

$$r = \frac{243}{729} = \frac{81}{243} = \frac{1}{3} \quad \text{أساسها}$$

$$H_8 = ar^7 = 729 \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{3} = 0.333 \quad \text{الحد الثامن}$$

مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{729 \left( \left( \frac{1}{3} \right)^{10} - 1 \right)}{\frac{1}{3} - 1} \\ &= \frac{-728.9876}{-0.6666} = 1093.5 \end{aligned}$$

مجموع المتوالية إلى ما لانهاية

$$\begin{aligned} S_{\infty} &= \frac{a}{1-r} = \frac{729}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 1093.5 \end{aligned}$$

أوجد مجموع المتوالية 199 ، -99.5 ، 75.49 ، ... إلى ما لانهاية ؟

$$r = \frac{49.75}{-99.5} = \frac{-99.5}{199} = \frac{-1}{2} \quad a = 199 \quad \text{الحل}$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{199}{1+0.5} = 132.66$$

## المحاضرة الرابعة عشر

### المحددات و المصفوفات

#### أولاً- المحددات

المحدد من الرتبة الثانية يكون على الصورة التالية

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ويمكن الحصول على قيمة المحدد = (  $a_{11} \times a_{22}$  ) - (  $a_{12} \times a_{21}$  )

**مثال:** أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\text{قيمة المحدد} = ( 8 \times 5 ) - ( 7 \times 3 )$$

$$= 40 - 21 = 19$$

**مثال:** أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\text{قيمة المحدد} = ( -1 \times 6 ) - ( -3 \times 4 )$$

$$= 12 - (-6) = 18$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 4 & 12- \\ 2- & 3- \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\text{قيمة المحدد} = (2- \times 12-) - (4 \times 3-)$$

$$36 = 12 + 24 =$$

استخدام المحددات في حل المعادلات

باستخدام المحددات حل المعادلات التالية :

$$5x + 2y = 19$$

$$4x - y = 10$$

الحل : حتى يمكن إيجاد قيمتي كلاً من  $x$  و  $y$  يتم حساب

$$\Delta x \text{ و } \Delta y \text{ كما يلي :}$$

$\Delta$  ويحتوى على معاملات  $x$  و  $y$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1- & 4 \end{vmatrix} = (2 \times 4) - (1- \times 5)$$

$$13- = 8 - 5- =$$

$\Delta x$  ويتم أستبدال معاملات  $x$  بقيم النواتج كما يلي:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 1- & 10 \end{vmatrix} = (2 \times 10) - (1- \times 19)$$

$$39- = 20 - 19- =$$

$y\Delta$  ويتم استبدال معاملات  $y$  بقيم النواتج كما يلي:

$$(19 \times 4) - (10 \times 5) = \begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = y\Delta$$

$$26- = 76 - 50 =$$

وبالتالي يمكن الحصول على قيمة  $x$  و  $y$  كما يلي :

$$3 = 13- / 39- = \Delta / x\Delta = x$$

$$2 = 13- / 26- = \Delta / y\Delta = y$$

**مثال:** حل باستخدام المحددات المعادلات التالية :

$$7x + 3y = 2$$

$$4x - 2y = 10$$

الحل :

$$(3 \times 4) - (2- \times 7) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2- & 4 \end{vmatrix} = \Delta$$

$$26- = 12 - 14- =$$

$\Delta x$  يتم استبدال معاملات  $x$  بقيم النواتج كما يلي :

$$(3 \times 10-) - (2- \times 2) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2- & 10- \end{vmatrix} = x\Delta$$

$$26 = 30 + 4 =$$

$\Delta y$  يتم إستبدال معاملات  $y$  بقيم النواتج كما يلي :

$$(2 \times 4) - (10 \times 7) = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = y\Delta$$

$$78 = 8 - 70 =$$

وبالتالى يمكن الحصول على قيمة  $s$  و  $v$  كما يلي :

$$1 = 26 - 78 = \Delta / x\Delta = x$$

$$3 = 26 - 78 = \Delta / y\Delta = y$$

المحددات من الرتبة الثالثة

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{مثال أوجد قيمة المحدد}$$

حتى يمكن إيجاد قيمة هذا المحدد يتم استخدام عناصر الصف الأول  
كما يلي: قيمة المحدد =

$$\begin{aligned} &= 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 2(36 - 8) + 5(54 + 3) + 7(48 + 12) \\ &= 2(28) + 5(57) + 7(60) \\ &= 56 + 285 + 420 = 761 \end{aligned}$$

ثانياً- المصفوفات

يتم التركيز على العمليات الجبرية للمصفوفات كما يلي :  
إذا كان

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$1 - g^{-1}, h^{-1}$$

$$2 \quad g + h$$

$$3 - 2g + h$$

$$4 - gh$$

$$5 - g^{-1}$$

الحل: يمكن الحصول على  $g^{-1}, h^{-1}$  بتبديل الصفوف لأعمدة والأعمدة إلى صفوف كما يلي:

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}, h^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$$

٢-  $g + h$  يتم جمع كل رقم مع الموجود في نفس مكانه من المصفوفة الأخرى كما يلي

$$g + h = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$$

٣-  $2g + h$  يتم ضرب كل عنصر في  $g \times 2$  ثم جمع الناتج مع الموجود في نفس مكانه من المصفوفة  $h$  كما يلي

$$2g + h = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ -1 & 24 \end{bmatrix}$$

### ضرب المصفوفات

٤-  $gh$  يتم ضرب عناصر الصفوف في المصفوفة  $g$   $\times$  عناصر أعمدة المصفوفة  $h$  ثم جمع الناتج كما يلي

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$gh = \begin{bmatrix} 5 \times 3 + 7 \times 7 & 5 \times -1 + 7 \times 12 \\ -4 \times 3 + 6 \times 7 & -4 \times -1 + 6 \times 12 \end{bmatrix}$$

$$gh = \begin{bmatrix} 64 & 79 \\ 30 & 76 \end{bmatrix}$$

### مقلوب المصفوفة

٥- يرمز إلى مقلوب بالمصفوفة ك  $g^{-1}$  حيث أن مقلوب المصفوفة  $= \frac{1}{\text{المحدد}}$   $\times$  مصفوفة المرافقات المبدلة

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_g = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = (5 \times 6) - (7 \times -4)$$

$$= 58$$

ويمكن الحصول على مصفوفة المرافقات المبدلة :  
تبديل أماكن عناصر القطر الرئيسى  
تبديل أشارات عناصر القطر الآخر

$$\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \text{مصفوفة المرافقات المبدلة}$$

$$g^{-1} = \frac{1}{58} \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{مقلوب المصفوفة}$$

## النهاية

تمت وبحمد الله بعد جهد

أتمنى للجميع التوفيق والنجاح

والحرص كل الحرص على متابعة المحاضرات وحل التمارين وفهم المقرر

كي تحصل على ماتريد وعدم الاعتماد على الملخص فقط دون فهم

المقرر

مبادئ الرياضيات ( ١ )

د. أسامة حنفي

جامعة الملك فيصل

أخوكم : @ABOD\_05