قوانين الرياضيات

إعداد / حنان سليمان

المحاضره الثانيه:

قوانين الأسس .. [^] علامه الأس

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ .. عند الضرب نجمع الأسس $2^5 * 2^6 = 2^{11}$

$\frac{a^5}{a^2} = a^3$ عند القسمه نطرح الأسس $\frac{3^5}{3^2} = 3^{(5-2)} = 3^3$

$(a^x)^y = a^{x*y}$ عندما يكون الأساس مرفوع لـكذا أس نضرب الأسس $(3^2)^3 = 3^6$

$a^x \cdot b^x = (a.b)^x$ إذا اختلف الأساس و تشابهت الأسس ف نضرب الاساس ببعض ثم الكل ع الأس نفسه $3^5 * 4^5 = (3*4)^5$

$a^0 = 1$ .. أي رقم الأس تبعه صفر راح يكون الناتج واحد $5^0 = 1$

$a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$ $a^{3\2} = \sqrt[3]{a^2}$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ أي رقم أسه يكون سالب ننزله للمقام موجب ونحط البسط واحد .. $x^{(-2)} = \frac{1}{x^2}$

1- $\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$ في حاله الجمع نضرب الارقام

2- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ في حاله القسمه نطرح الارقام

3- $\log_a x^y = y \log_a x$ إذا كان الاساس له أس تطلع الاس قبل اللوغاريتم

4- $\log_a a = 1$ اذا تشابه رقم اللوغاريتم مع العدد ف النتيجه واحد

5- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ اي عدد في اللوغاريتم ذات مقام نرفعه بالبسط مع وضع اشاره سالبه

6- $\log_a 1 = 0$ .. أي لوغاريتم عدده واحد ف الناتج صفر

7- $\log_a a^x = a^{\log a^x} = x$ إذا تشابه الوغاريت مع العدد وكان العدد له أس ف الناتج هو الأس

8- $\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$ مجرد حفظ

المحاضره الثالثه

القانون العام ..

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

يستخدم القانون العام في حل المعادلات

وله ثلاث حالات ..

اولا نقوم بـ إيجاد اللميز وهو مابداخل الجدر .. $b^2 - 4ac$

- اكبر من 0
  - فـ له حلين ..
  - $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
  - $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
  - وهو تفس القانون ..
  - بس مره راح اخلي المميز موجب ومره سالب
- 0
  - $x = \frac{-b}{2a}$
- أصغر من 0
  - اذاً لايوجد حل حقيقي للمعادله

المحاضره الرابعه

الحد العام للمتتاليه الحسابيه

$$\underline{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

مجموع أول n حد من الحدود للمتتاليه الحسابيه ..

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad \text{أو} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

المحاضره الخامسه

الحد العام للمتتاليه الهندسيه ..

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مجموع أول حد n من الحدود للمتتاليه الهندسيه

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

المصفوفات ..

رتبة المصفوفة

رتبة المصفوفة تساوي عدد الصفوف × عدد الاعمدة

محدد المصفوفه من الدرجه الثانيه..

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

محدد المصفوفه من الدرجه الثلثه طريقتين ..

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

-1 طريقه الأسهم ..
وهى بتكرار العودين الاولين
ثم جمع الاقطار الموجبه
وطرح الاقطار السالبه

$$\text{Det A} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

-2 طريقه المحددات الصغرى ..
وهى بـ إيجاد المحددات لاي صف او عمود ثم ايجاد المرافق لها ..

$$\Delta A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

خواص المحددات ..

- اذا كانت عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة أصفار فإن قيمة المحدد تساوي صفر
- اذا تساوت عناصر صفين أو عمودين فى المصفوفة فإن قيمة المحدد تساوي صفر
- اذا ضرب أحد الصفوف أو أحد الأعمدة بعدد ثابت فإن قيمة المحدد تضرب فى نفس العدد

أى عدد حقيقى k مصفوفة مربعة وكان $A_{n\times n}$ اذا كانت

$$\boldsymbol{Det(KA) = K^N\, Det(A)}$$ فإن

- اذا بدلنا صف مكان صف أو عمود مكان عمود في المحدد فإن قيمة المحدد تنعكس اشارتها
- اذا كان أحد الصفوف مضاعف لصف آخر أو أحد الأعمدة مضاعف للآخر فإن قيمة المحدد تساوي صفر

$$\boldsymbol{\Delta(AB) = (\Delta A)\,(\Delta B)}$$

$$\boldsymbol{\Delta A = \Delta A^T}$$

- محدد المصفوفة القطرية = حاصل ضرب القطر
- محدد المصفوفة المحايدة = 1
- قيمة محدد المصفوفة المثلثية = حاصل ضرب القطر

معكوس المصفوفات

معكوس المصفوفه 2X2

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ملاحظات :

اذا كانت قيمة محدد المصفوفة = صفر فإن المصفوفة لا يوجد لها معكوس

معكوس المصفوفة المحايدة هو نفس المصفوفة

معكوس المصفوفه 3X3 بحيث ($DetA \neq 0$)

فنجد معكوس المصفوفة A باستخدام المحددات كالاتي :-

1- نجد محدد المصفوفة (Det A) .

2- نجد محدد المرافقات لكل عنصر من عناصر المصفوفة و نضعها في مصفوفة و نرمز لها بالرمز A^{ι} .

$$A^{\iota} = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

حيث A11 هو عنصر a11

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ثم نجد adjA= (A^{ι})^{T}

وهو إننا نقوم بجعل الصفوف إلى أعمدة ,,

$$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

و أخر خطوة .. يكون معكوس المصفوفه ..

$$A^{-1} = \frac{1}{DetA}\ adj\ A$$

جبر النهايات ..

إذا كانت f(x)=c (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

مثال : $\lim_{x \to 5} 30 = 30$

لأن ماعندنا متغير X فأي رقم يعطينا راح يسساوي الـ 30

إذا كانت f(x) = m x + c فإن $\lim_{x \to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي

مثال : $\lim_{x \to 2}(3x + 4) = 3*2 + 4 = 10$

.. نعوض عن قيمه الـ x بـ 2

نظريه ..

$$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$$

أي يوم يكون الرقم تبع الـX مرفوع على أس نقوم بإخراج

لأس وشمله لـ اليمت كامل .. مثال : $\lim_{x \to 1}[3x - 1]^6$

$\equiv [\lim_{x \to 1} 3x - 1]^6 = [3*1-1]^6 = [2]^6 = 64$

-1 الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K

حيث الاستهلاك دالة فى الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة

ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

-2 الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S

حيث الادخار دالة فى الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة

ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

∴ الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

1 ـ يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

2 ـ يتم إيجاد المشتقة الثانية .

3 ـ تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة

وإذا كانت الاشارة موجبه ف هي نهايه صغرى

الربح الحدي

- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة
- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية
- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .
- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .
- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .
- الربح الحدي = الايراد الحدي – التكلفة الحدية

المرونه ؟

حالات المرونة السعرية (م)

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = 1 (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

$$م = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

التفاضل إما نكتبه بـ / هالطريقه ,, $\frac{dy}{dx}$ أو y'

قواعد التفاضل ..

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت ,,

يعني أي عدد حقيقي راح يكون فاضله 0 .. مثل y=4 يعني تفاضلها $\frac{dy}{dx} = 0$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n ,,

أي تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس ,,

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد

$$y = x^5 \quad \text{تفاضلها} \quad \frac{dy}{dx} = 5x^{5-1} = 5x^4$$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام القاعدة الأولى والثانيه ..

مثال :- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

الحل .. $\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين ..

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية

+ الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال : $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

الحل $\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x^2 - 7x)(3)$

القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-

مشتقه حاصل قسمه دالتين البسط على المقام ..

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

تابع التفاضل

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

$$y = (15x2 + 20)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,(15x^2 + 20)^2\,(30x)$$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة ..

هنا راح نطلع اول شي المشتقه الأولى بعدها المشتقه الثانيه الى ان
توصل للمشتقه اللي هو يبيها و في مثالنا للثالثه لانه يبي المشتقه الثالثه وبس ..

$$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5 \quad \text{(المشتقة الاولى)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40 \quad \text{(المشتقة الثانية)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72 \quad \text{(المشتقة الثالثة)}$$

التكامل

قواعد التكامل

تكامل x المرفوعة للأس n :

أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$$\int x^n \, .dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int k \, .dx = k\,x + c$$

$$\int \, .dx = x + c$$

تكامل e^x

$$\int e^x \, .dx = e^x + c$$

تكامل $\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x} \, .dx = \ln x + c$$

التطبيقات التجارية للتكامل

1 الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .

2 التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

3 الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

4 الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

قاعده مبسطة ..