بسم الله الرحمن الرحيم

ملخص

مبادئ رياضيات (١)

للدكتور :- نبيل منصور

من إعداد

صدى الأمل - Shosh

المحاضره الأولى
المجموعات Sets

تعريف المجموعة :-

المجموعة هي **<u>تجمّع من الأشياء أو العناصرالمحددة تماما وقد تكون هذه الأشياء أعدادا أوأشخاصا أوأحداثا أوأى شىء آخر</u>**

نرمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل: A, B, C, ...

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى <u>عناصر</u> ونرمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل: a, b, c, ...

1) أرقام العدد 2634 تعبير يدل على **<u>مجموعة لأنه محدد و عنصره</u> هي {2, 6, 3, 4}.**

2) شهور السنة الميلادية تعبير يدل **على <u>مجموعة لأنه محدد تبدأ من يناير إلى ديسمبر</u>.**

3) الفاكهة اللذيذة تعبير لا يدل على **<u>مجموعة لأنه غير محدد حيث أن الفاكهة اللذيذة بالنسبة للشخص قد تكون غير لذيذة بالنسبة للشخص آخر.</u>**

4) الأعداد الطبيعية الأقل من 6. {1, 2, 3, 4, 5}

يستخدم الرمز ϵ "ينتمي إلى" **<u>ليبين عناصر المجموعة</u>** فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول **<u>أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة a ϵ A</u>**

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا نقول **<u>أن العنصر a "لا ينتمي إلى" المجموعة A ويكتب على الصورة</u>**

$\mathbf{a \notin A}$

<u>طريقة كتابة المجموعات :</u>

<u>طريقة العد (سرد العناصر):-</u>

<u>يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسى المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-</u>

<u>مثال</u> :-

A = { 1, 5, 10, 15 }

B= { a, b, c, d }

C= { 1, 2, 3, ...}

(<u>وهى مجموعة منتظمة تسير بنفس الشكل 1</u> 2 3 4 وهكذا)

A = { 1, 2, 3,...,100}

(<u>وهى مجموعة مغلقة ولكن المساحة لا تكفى لكتابة من 1 إلى 100 و سوف نستخدم النقاط للتعبيرعن بعض العناصر</u>).

<u>طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-</u>

<u>ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التى تحدد ارتباط عناصر المجموعة</u> ،فمثلاً :

A = { x : x عدد فردي }

B = { x : x كلية بجامعة الملك فيصل }

C = { x : x طالب بنظام التعليم عن بعد }

D = { x : -3 ≤ x ≤ 1 x عدد صحيح }

X = { x : 0 ≤ x ≤ 12 x عدد صحيح }

أنواع المجموعات :-

هى المجموعة التى لا تحتوى أى عنصر ويرمز لها بالرمز ɸ (فاى) أو { } .

أمثلة :-

$A = \{ x :$ عدد زوجي وفردي $x \}$

$B = \{ x :$ دولة عربية تقع في أوروبا $x \}$

المجموعة المنتهية (finite set):-

المجموعة التى تكون عناصرها محدودة.

مثال :

المجموعات التالية هي مجموعات منتهية.

$$A = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$$

$$B = \{ 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots , 100 \}$$

$$C = \{ x , y , s , t , u \}$$

المجموعة غير المنتهية (Infinite set):-

المجموعة التى تكون عناصرها غير محدودة (وهى المجموعة التى لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية هي مجموعات غير منتهية.

$A = \{ x :$ عدد طبيعي فردي $\}$

$$B = \{ 10, 20 , 30 , \ldots\ldots \}$$

المجموعة الكلية (Universal set):-

وهى مجموعة كل العناصر قيد الدراسة ويرمز لها بالرمز U وتعطى ضمن السؤال أو الدراسة.

مثال:

$U = \{ x :$ أستاذ أو طالب بجامعة الملك فيصل $x \}$

المجموعة الجزئية (Subset):-

تكون A مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة فى B وتكتب على الصورة : $A \subset B$ و تقرأ A جزء من B.

مثال:

1- إذا كانت المجموعة $A = \{ 2 , 4 , 6 \}$ و $B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$ فإن $A \subset B$.

2- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة **جزئية** من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

تساوى المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$$A = B \ggg\ggg\ggg \quad A \subseteq B \ , \ B \subseteq A$$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان **تتساويان فى عدد عناصرها** وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :-

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {1, 5, 7 , 9 } , B = {9 , 7 ,5 ,1 }
2- A = {2 , 5 , 9 } , B = { a , s , d }
الحل :-

1 – A = B
2 – A ≡ B

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B (A U B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة فى A أو فى B أو فى كليهما .
مثال :- إذا كان {1 , 2 , 3 , 7} = A و {2 , 4 , 6 , 8} = B أوجد (AUB) ؟
الحل :-
(AUB) = {1 ,2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8}

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B (A∩B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة فى A و فى B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .
مثال :-
إذا كان {-1 , 0 , 1 , 2 , 3} = A و {0,2,4,6,} = B أوجد A ∩ B
الحل :-
(A ∩ B) = {0 , 2 }

المكملة أو المتممة :-
يقال أن $\bar{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على **جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A.**
مثال :-
إذا كان {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} = U و {2,4,6,8,10} = A أوجد $\bar{A}$.
الحل :- $\bar{A}$ **= {1,3,5,7,9}**

الفرق :-
إذ كانت مجموعتان A و B فإن A-B يسمى بالفرق **وهو مجموعة كل العناصر الموجودة فى A وليست فى B.**
مثال :-
إذا كانت {1,2,3,x,y} = A و {3,4,5,x,w} = B أوجد A-B
الحل :- A-B = { 1 , 2 , y }

مثال :-
إذا كانت
$A=\{1,2,3,x,y\}$ و
$B=\{3,4,5,x,w\}$
و المجموعة الكلية
$U = \{ 1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$
فأوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$
2- $A \cap B = \{3, X\}$
3- $B - A = \{4, 5, w\}$
4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$
5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$
8- $\overline{A} \cup A = U$
9- $\overline{A} \cap A = \{ \}$

مجموعات الاعداد :-

أ - مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural numbers) :
وهي **أصغر مجموعات الأعداد وتسمى أيضا مجموعة العد وتحتوى على الأعداد الصحيحة الموجبة.**
$N=\{ 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots \}$

ب - مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer numbers) :
هى مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة بالإضافة إلى الصفر.
$I=\{ \ldots , -3 , - 2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots \}$

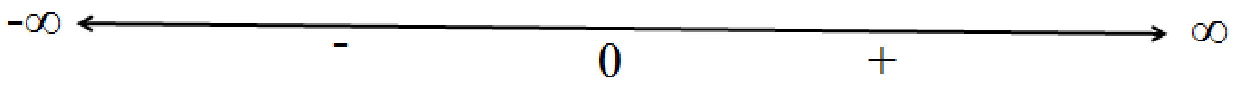
ج - مجموعة الأعداد النسبية (Rational numbers) :
العدد النسبي هو العدد الذي يكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ **بحيث** $a,b\in I$ ، $b\neq 0$ **وتحوى على الأعداد الصحيحة بالإضافة إلى الكسور** مثل $\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{7}{6},\frac{8}{10},\frac{9}{1},\frac{14}{1},\ldots\ldots\ldots$

ويرمز لها **بالرمز Q .**

د - مجموعة الأعداد غير النسبية (Irrational numbers) :
العدد الغير النسبي **هو العدد الذى لا يمكن كتابته على الصورة** $\frac{a}{b}$ **بحيث** $\sqrt{2},\sqrt{6},\sqrt{10},\sqrt{20},\ldots\ldots$ **مثل جذور الأعداد التى ليست مربع كامل**

د - مجموعة الأعداد الحقيقية (Real numbers) :

وتحوي **مجموعة الأعداد النسبية و غير النسبية ويرمز لها بالرمز R.** و تمثل بخط مستقيم يسمى خط الأعداد حيث يمتد من طرفيه من ∞- إلى ∞ ومنتصفه تكون نقطة الصفر و على يسار الصفر الأعداد السالبة وعلى يمينه الأعداد الموجبة كالأتي



وأي جزء من هذا الخط يكون **مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية و يسمى فترة (Interval).**

الفترة :-

تعرف الفترة كما ذكرنا سابقا بأنها **مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية وهى الأعداد التى تمتد من النقطة a إلى النقطة b و تكتب حسب نوعها** كالآتي:

$$(a , b) = \{x \in R : a < x < b\}$$
$$[a , b) = \{x \in R : a \le x < b\}$$
$$[a , b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$$

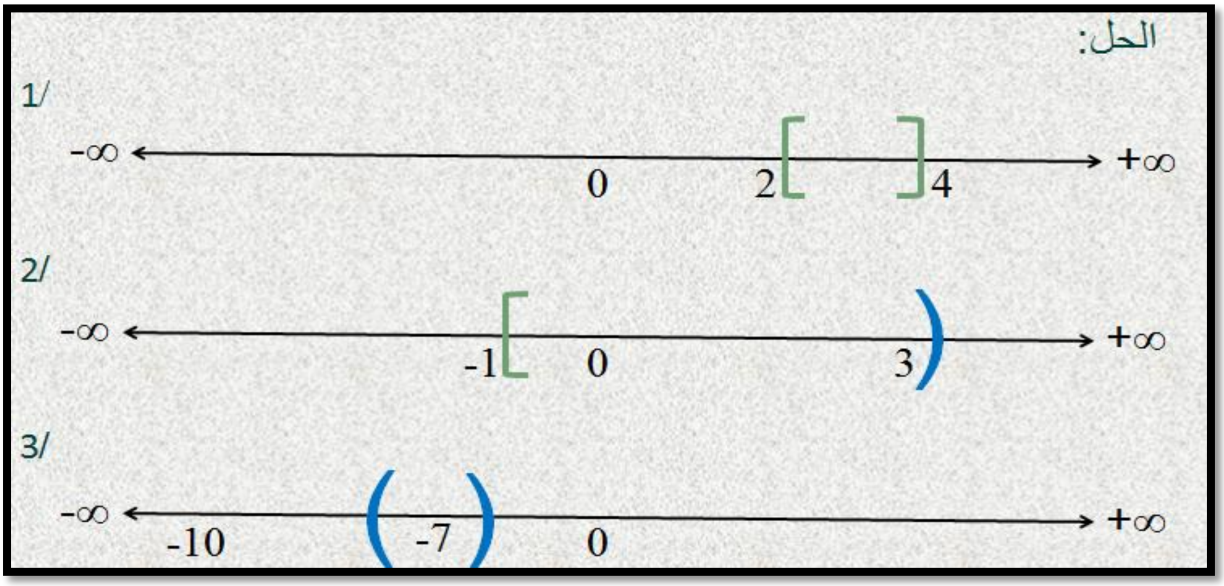
مثال : -

مثل الفترات التالية على خط الأعداد:

1- [2 , 4]

2- [-1 , 3)

3- (-10 , -7)

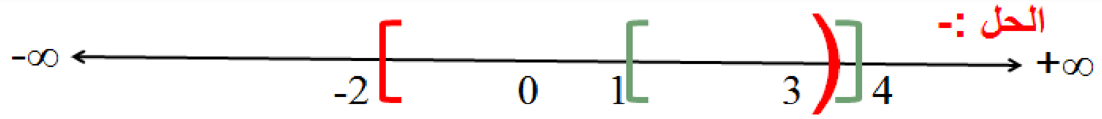


مثال :-

إذا كانت الفترات [1 , 4] = B و (3 , 2-] = A فأحسب ما يلي:

$$1\text{-}\ A \cap B$$
$$2\text{-}\ A \cup B$$
$$3\text{-}\ A - B$$
$$4\text{-}\ B - A$$

الحل :-



1- $A \cap B = [1, 3)$

2- $A \cup B = [-2, 4]$

3- $A - B = [-2, 1)$

4- $B - A = [3, 4]$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S) .

مثال :-

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = {a , b , c}

الحل :-

$$P(s) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} , \{a,b,c\} , Ø \}$$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوي 2^n .

مثال :-

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = { a, b , c }

الحل :-

$$P(S) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} , \{a,b,c\} , Ø \}$$

$$2^3 = 8$$

تمارين :

1/ وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: x عدد سالب و موجب }

(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }

(c) C = {x: x دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية }

(d) D = { 2 , 4 , 6 , …….,100}

(e) E = { 100 , 200 , 300 ,…….}

(f) F = { w , e , r , t }

2- إذا كانت { 7 , 5 , 3} = A و {1,2,3,4,5,6,7,8 } = B فهل يمكن القول أن $B \subset A$ ؟

3- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {5 ,10,15,20} , B = {15,10,5, 20}

2- A = { 20,50,70} , B = { k , d , u }

4- إذا كانت A={8,10,12,r,m} و B={4,6,10,o,r}
أوجد المجموعة الكلية ثم أوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

5- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة {2 , 5 , 8} = S ؟

6- إذا احتوت المجموعة S على 5 من العناصر، فأوجد عدد عناصر P(S) ؟

لا تقل قد ذهبت أربابه كل من سار على الدرب وصل

المحاضره الثانيه

المجموعات والاقترانات

ثانياً : الاقترانات (الدوال) Functions :-

يعرف الاقتران f بأنه قاعدة (rule) تعطى قيمة وحيدة (unique value) كنتيجة لتعويض قيمة المتغير x فيه وتمثل هذه القيمة أو النتيجة قيمة y المقابلة لقيمة x المستخدمة بالتعويض. أي أن:

$f : A \rightarrow B$

$x \longmapsto f(x)$

ملاحظة: إذا كان f اقتران من A إلى B فإن A يسمى **مجال** الاقتران ويسمى B **بالمجال المقابل** كما تسمى مجموعة الصور **بالمدى**.
حتى يكون f اقتران لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال صورة وصورة واحدة فقط فى المجال المقابل.
1- إقتران كثير الحدود : ويكون على الصورة :-

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a$

وتكون درجة كثير الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) فى الاقتران .

مثال :-

ما هي درجة كل من الاقترانات كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 3$

2- $f(x) = 3x - 4$

3- $f(x) = x^2 - x + 1$

4- $f(x) = x^3 + x^7 + 5x - 7$

5- $f(x) = 2 - 3x + x^3$

1- $f(x) = 3$

الدرجة الصفرية و يسمى أيضاً اقتران ثابت.

2- $f(x) = 3x - 4$

الدرجة الأولى ويسمى اقتران خطى.

3- $f(x) = x^2 - x + 1$
الدرجة الثانية أو اقتران تربيعى.
4- $f(x) = x^3 + x^7 + 5x - 7$
الدرجة السابعة.
5- $f(x) = 2 - 3x + x^3$
الدرجة الثالثة أو اقتران تكعيبى

العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :

- الجمع و الطرح :-

يتم جمع أو طرح كثيرات الحدود بجمع أو طرح معاملات المتغيرات المتشابهة الأسس.

مثال (1) :-

1-$(3x^3 - 4x^2 + 6) + (x^4 - 2x^3 - 4x + 3)$

الحل :-

$(3x^3 - 4x^2 + 6) + (x^4 - 2x^3 - 4x + 3) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 9$

مثال (2) :-

2- $(6x^5 + 3x^3 - 4x + 5) - (3x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x + 7)$

الحل :-

$(6x^5 + 3x^3 - 4x + 5) - (3x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x + 7)= 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 -2$

2- الضرب :-

يتم ضرب كثيرى حدود f(x)، h(x) بضرب كل حد من حدود f(x) بكافة حدود h(x).

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (3x^2 - 5x +4)$ ، وكان $h(x) = (x^2+ 2x -1)$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل :-

$$(f.h)(x)= (3x^2 - 5x +4) (x^2+ 2x -1)$$
$$= 3x^4+6x^3 -3x^2 -5x^3 -10 x^2 +5 x + 4 x^2 + 8x -4$$
$$= 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 13x -4$$

مثال (2):

اذا كان $f(x) = (2x^2 +3x)$ ، وكان $h(x) = (x^3+ 5x -8)$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل :-

$$(f.h)(x)= (x^3+ 5x -8) (2x^2 +3x)$$
$$= 2x^5+10x^3 -16x^2 +3x^4 +15 x^2 -24x$$
$$= 2x^5 +3x^4 +10x^3 - x^2 -24x$$

3- القسمة:-

يتم قسمة كثيرى حدود باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (x^4 - 3x^2 + 5)$ ، وكان $h(x) = (x^2 - 4)$ فجد $f(x) \div h(x)$.

الحل :-

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 1 \\ \hline x^2 - 4 & x^4 - 3x^2 + 5 \\ & -x^4 + 4x^2 \\ \hline & x^2 + 5 \\ & -x^2 + 4 \\ \hline & 9 \end{array}$$

ويكون ناتج القسمة $x^2 + 1$ وباقي القسمة 9.

3- القسمة:-

يتم قسمة كثيرى حدود باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة.

مثال (1):

اذا كان $f(x) = (5x^5 + 10x^3)$ ، وكان $h(x) = (x^3)$ فجد $f(x) \div h(x)$.

الحل :-

$$\begin{array}{r|l} & 5x^2 + 10 \\ \hline x^3 & 5x^5 + 10x^3 \\ & 5x^5 \\ \hline & 10x^3 \\ & 10x^3 \\ \hline & - \end{array}$$

ويكون ناتج القسمة $5x^2 + 10$ وباقي القسمة 0.

أطلب العلم ولا تكسل فما أبعد الخير عن أهل الكسل

المحاضره الثالثة

تابع الاقترانات

2- الاقتران النسبي :-

الاقتران النسبى هو اقتران مكون من كثيرى حدود على شكل بسط ومقام على الصورة كثير الحدود .

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \quad h(x) \neq 0 \quad , g(x) \quad , \quad h(x)$$ كثيري حدود

مثال :-

ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية :-

$$1\text{- } f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$2\text{- } f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$3\text{- } f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$$

الحل :-

$1\text{- } f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

يكون الاقتران النسبى معرف على الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام وفى هذ الاقتران لا يوجد عدد حقيقى يجعل المقام صفر إذاً مجال الاقتران R .

$2\text{- } f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

نساوى المقام بالصفر فيكون (X-1 = 0) إذاً X=1 إذا المجال $R\backslash\{1\}$

$3\text{- } f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}$

نساوى المقام بالصفر فيكون (X^2- 4 = 0) ← (X^2= 4) إذاً X= ± 2 إذا المجال $R\backslash\{-2 , 2\}$.

العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية :-

1- الجمع والطرح :-

توحد المقامات كما فى الأعداد

مثال (1): اوجد ناتج ما يلي :

$$\frac{X+1}{2X-5} + \frac{3X+1}{X-2}$$

الحل :-

$$\frac{X+1}{2X-5} + \frac{3X+1}{X-2} = \frac{(X+1)(X-2)}{(2X-5)(X-2)} + \frac{(3X+1)(2X-5)}{(X-2)(2X-5)}$$

$$= \frac{(X^2-X-2)+(6X^2-13X-5)}{(X-2)(2X-5)}$$

$$= \frac{7X^2-14X-7}{2X^2-9X+10}$$

مثال (2): اوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}$$

الحل :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}=\frac{(X)(2X-2)}{(3X+2)(2X-2)}+\frac{(5X^2+2)(3X+2)}{(2X-2)(3X+2)}$$

$$=\frac{(2X^2-2X)+(15x^3+10X^2+6X+4)}{(3X+2)(2X-2)}$$

$$=\frac{15X^3+12X^2+4X+4}{6X^2-2X-4}$$

2- الضرب :-

نضرب البسط فى البسط والمقام فى المقام.

مثال (1):-

$$\frac{2X+3}{X+1}\times\frac{X-2}{3X+4}$$

الحل:-

$$\frac{2X+3}{X+1}\times\frac{X-2}{3X+4}=\frac{(2X+3)(X-2)}{(X+1)(3X+4)}=\frac{2X^3-X-6}{3X^2+7X+4}$$

مثال (2):-

$$\frac{X^2+10}{2X+5}\times\frac{3X-5}{X+2}$$

الحل:-

$$\frac{X^2+10}{2X+5}\times\frac{3X-5}{X+2}=\frac{(X^2+10)(3X-5)}{(2X+5)(X+2)}=\frac{3X^3-5X^2+30X-50}{2X^2+9X+10}$$

3- القسمة :-

نحول عملية القسمة إلى عملية ضرب بقلب الكسر الثانى.

مثال:-

$$\frac{3X+2}{X^2+1}\div\frac{X+5}{X^2}$$

الحل:-

$$\frac{3X+2}{X^2+1}\div\frac{X+5}{X^2}=\frac{3X+2}{X^2+1}\times\frac{X^2}{X+5}$$

$$=\frac{3X^3+2X^2}{X^3+5X^2+X+5}$$

3- الاقتران الأسي :-

الاقتران الأسي **هو اقتران مجاله الأعداد الحقيقية ومجاله المقابل الاعداد الحقيقية الموجبة، أي أن:**

$$f: R \longrightarrow R^{+}$$

$$x \longmapsto f(x) = a^{x}$$

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الأساس، x: الاس. ومن الأمثلة على الاقترانات الاسية:

- $f(x) = 10^{x}$
- $f(x) = e^{x}$
- $f(x) = 2^{x}$

-اذا كان الاساس e فان الاقتران يسمى **اقتران الاس الطبيعي.**

- اذا كان الاساس يساوي 10 فان **الاقتران يسمى الاس العشري**

1- $a^{x}.a^{y} = a^{x+y}$

2- $\frac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$

3- $(a^{x})^{y} = a^{xy}$

4- $a^{x}.b^{x} = (ab)^{x}$

5- $a^{0} = 1$

6- $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^{x}}$

7- $a^{-x} = \frac{1}{a^{x}}$

مثال (1):-

بسط المقادير التالية إلى أبسط صورة:

1) $\frac{(2^{3})\sqrt[3]{4^{7}}}{(2^{2})\sqrt[3]{4}}$

$$\frac{(2^{3})\sqrt[3]{4^{7}}}{(2^{2})\sqrt[3]{4}} = \frac{(2^{3})(4^{\frac{7}{3}})}{(2^{2})(4^{\frac{1}{3}})}$$

$$= 2^{3-2}.\ 4^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{1}.\ 4^{\frac{6}{3}}$$

$$= 2\ .\ 4^{2}$$

$$= 2.4^{2}$$

$$= 2 \times 16$$

$$= 32$$

2) $\frac{2(\sqrt{3})(\sqrt{8})(3^{4})}{9(\sqrt{6})((4^{2})}$

$$\frac{2(\sqrt{3})(\sqrt{8})(3^{4})}{9(\sqrt{6})((4^{2})} = \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}.3^{4}}{9.6^{\frac{1}{2}}.4^{2}}$$

$$= \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.(4.2)^{\frac{1}{2}}.3^{4}}{(3.3)(2.3)^{\frac{1}{2}}.4^{2}}$$

$$= \frac{2.3^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}.4^{\frac{1}{2}}.3^{4}}{3^{2}.2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}.4^{2}}$$

$$= \frac{2.2.3^{4}}{3^{2}.2^{4}} = 2^{2-4}.3^{4-2}$$

$$= 2^{-2}.3^{2} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{(e)(\sqrt{e})(e^{2x})}{(e^{x})(e^{x})^{-3}(e)^{\frac{3}{2}}} = \quad (3$$

$$\frac{(e)(\sqrt{e})(e^{2x})}{(e^{x})(e^{x})^{-3}(e)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e.e^{\frac{1}{2}}.\ e^{2x}}{e^{-2x}.e^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{e^{\frac{3}{2}}.e^{2x}}{e^{-2x}.e^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{e^{2x}}{e^{-2x}}$$

$$= e^{2x+2x}$$

$$= e^{4x}$$

<u>مثال (2):-</u>

حل المعادلات الاسية التالية:

$$3^{2x-1} = 243 \qquad (1$$

$$3^{2x-1} = 243 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^{5}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 5$$

$$\Rightarrow 2x = 6$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16} \qquad (2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2$$

نجاحك وسعادتك تكمن فيك

المحاضره الرابعة

المعادلات والمتباينات

أولاً : المعادلات :-

يحتل موضوع المعادلات مكانه كبيرة في علم الرياضيات وهو من أقدم المواضيع التي طرحت للبحث، وفي هذه الوحدة سنتطرق إلى حل المعادلات الخطية والتربيعية بالإضافة إلى حل انظمة المعادلات، نظام معادلتين بمجهولين، ويقصد بحل المعادلة هي ايجاد قيمة المتغير أو المتغيرات الموجودة في المعادلة ..

أ – حل المعادلات الخطية :-

إن **المعادلة الخطية** هي **معادلة في متغير واحد ومن الدرجة الاولى أي أن أكبر أس في المعادلة هو واحد** والشكل العام للمعادلة الخطية هو :-

ax + b = 0

مثال :-

حل المعادلة الخطية التالية:

$2x - 3 = 0$

الحل :-

$2x - 3 = 0$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

ب – حل المعادلة التربيعية :-

المعادلة التربيعية **يكون أكبر أس فيها هو أثنين** و تأخذ الصورة :-

$$ax^2 + bx + c = 0$$

وهناك العديد من الطرق لحل هذه المعادلة ولكننا سوف نعتمد على القانون العام للحل، حيث أنه من أسرع هذه الطرق و أكثرها دقة و يأخذ القانون العام الشكل التالي :-

$$\boxed{x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

ويسمى المقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ و هو ما أسفل الجذر بالمميز .

وهناك ثلاث حالات للحل بهذه الطريقة و هي :

1 – الحالة الأولى: اذا كان المميز $(\Delta > 0)$ **فيوجد حلين للمعادلة.**

$$\left(x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

2 – الحالة الثانية: اذا كان المميز $(\Delta = 0)$ **فيوجد حل وحيد للمعادلة .**

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3 – الحالة الثالثة: اذا كان المميز $(\Delta < 0)$ **فلا يوجد حل حقيقي للمعادلة**

مثال :-

حل المعادلات التربيعية التالية :

$X^2 + 2x - 3 = 0$ (1

$a = 1, \ b = 2, \ c = -3$

$\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times -3 = 16 > 0$

∴ يوجد حلين للمعادلة هما:

■ $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$

■ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$

$3X^2 - 4x + 5 = 0$ (2

$a = 3, \ b = -4, \ c = 5$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 5 = -44 < 0$

∴ لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

$X^2 - 2x + 1 = 0$ (3

$a = 1, \ b = -2, \ c = 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$

∴ يوجد حل وحيد للمعادلة هو:

■ $\mathbf{x} = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{--2}{2\times1} = \dfrac{2}{2} = 1$

$X^2 - 5x + 3 = 0$ (4

$a = 1, \ b = -5, \ c = 3$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 13 > 0$

∴ يوجد حلين للمعادلة هما:

■ $\mathbf{x_1} = \dfrac{-\mathbf{b} - \sqrt{\Delta}}{\mathbf{2a}} = \dfrac{-(-5) - \sqrt{13}}{2 \times 1} = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{2}$

■ $\mathbf{x_2} = \dfrac{-\mathbf{b} + \sqrt{\Delta}}{\mathbf{2a}} = \dfrac{-(-5) + \sqrt{13}}{2 \times 1} = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{2}$

جـ - حل أنظمة المعادلات الخطية :-

يكون الشكل العام لنظام المعادلات الخطية كالآتي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m}$$

حيث m تمثل عدد المعادلات، n عدد المتغيرات.

ستكون دراستنا في هذه الوحدة متعلقة بحل نظام معادلتين بمجهولين وبطريقة الحذف.

يكون نظام معدلتين بمجهولين على الصورة:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

يمكن حل هذا النوع من المعادلات باستخدام **طريقة الحذف**، حيث نجعل معاملات أحد المتغيرين في المعادلتين نفس القيمة ولكن بإشارتين مختلفتين ثم نجمع المعادلتين ونجد منها قيمة المتغير الآخر ثم نعوض قيمته في أحدى المعادلتين ونجد قيمة المتغير الأول

مثال 1:-

حل النظام التالي من المعادلات:

$2x + 3y = 7 \quad (1)$

$3x + 2y = 8 \quad (2)$

الحل :-

نضرب المعادلة الأولى في (-2) والثانية في (3) لحذف المتغير y فتصبح المعادلتين:

$-4x - 6y = -14$

$\underline{9x + 6y = 24}$ نجمع

$5x = 10$

$\Rightarrow \mathbf{x = 2}$

نعوض بقيمة x في المعادلة الثانية :

$\Rightarrow \mathbf{3\times(2) + 2y = 8 \Rightarrow 6 + 2y = 8 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1}$

مثال 2:-

حل النظام التالي من المعادلات:

$3x + 4y = 9 \quad (1)$

$2x + 3y = 7 \quad (2)$

الحل :-

نضرب المعادلة الأولى في (-2) والثانية في (3) لحذف المتغير x فتصبح المعادلتين:

$-6x - 8y = -18$

$\underline{6x + 9y = 21}$ نجمع

$\mathbf{y = 3}$

$\Rightarrow \mathbf{y = 3}$

نعوض بقيمة y في المعادلة الأولى:

$\Rightarrow \mathbf{3x + 4\times(3) = 9 \Rightarrow 3x + 12 = 9 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1}$

ثانياً : المتباينات :-

المتباينة هي **أي عبارتين جبريتين يربط بينهما احدى ادوات الربط** التالية (>) أقل من (<) أكبر من، ($\leq$) أكبر من أو يساوي، ($\geq$) أقل من أو يساوي ومن الأمثلة على المتباينات:

$x < 2$

$x + 1 \leq -3$

$x^2 + 2x + 5 \geq 0$

تعريف: تسمى مجموعة كل قيم (x) التي يمكن أن نعوضها في المتباينة بغض النظر عن صحتها بمجموعة التعويض، وهذه المجموعة تعطى في السؤال وتكون عادة إحدى مجموعات الاعداد وفي كل امثلتنا في هذه الوحدة ستكون مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية **"R"**.

تعريف: تسمى مجموعة قيم x التي تجعل المتباينة صحيحة (أي التي تكون حلاً للمتباينة) **مجموعة الحل للمتباينة.**

مجموعة الحل **تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض.**

مثال :-

أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية:

1- $3x - 2 > x + 1$

2- $x^2 - 5x \geq -6$

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0$

4- $\frac{2x-1}{x+1} < 0 \quad , x \neq -1$

الحل :-

مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

1- $3x - 2 > x + 1$

$3x - x > 1 + 2$

$2x > 3$

$x > \frac{3}{2}$

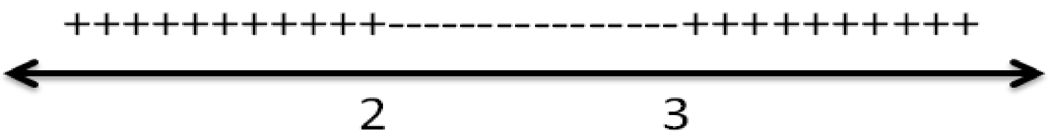
∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2}, \infty)$.

2- $x^2 - 5x \geq -6$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$(x-3)(x-2) \geq 0$

نبحث في اشارة الاقتران عن طريق خط الاعداد وتكون اشارة الاقتران التربيعي عكس اشارة x^2 ما بين الجذرين ونفس إشارة x^2 خارج الجذرين.



∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0$

نأخذ x عامل مشترك

$x(x^2 + 3x + 2) \leq 0$

نحلل الدالة التربيعية داخل الاقواس

$x(x+2)(x+1) \le 0$

فتكون جذور الاقتران هي { 2- , 1- , 0}

نحدد اشارة الاقتران على خط الاعداد

------------++++++++------------+++++++

-2   -1   0

∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي $(-\infty, -2] \cup [-1\ ,\ 0]$.

4- $\dfrac{2x-1}{x+1} < 0 \quad , x \neq -1$

في الاقترانات النسبية نحدد اشارة البسط واشارة المقام على خط الاعداد ثم نقسم الإشارات.

البسط

$2x - 1 < 0$

$x < \frac{1}{2}$

-------------------++++++++++++++

$\frac{1}{2}$

المقام

$x + 1 < 0$

$x < -1$

-------------------++++++++++++++

-1

القسمة

+++++++++++-----------------------++++++++++

-1 $\frac{1}{2}$

تكون مجموعة الحل للمتباينة هي الفترة المفتوحة $(-1\ ,\ \frac{1}{2})$.

نجاحك وسعادتك تكمن فيك.

المحاضره الخامسة

المتتاليات

المتتاليات :-

هي عبارة عن اقتران معرف من مجموعة الاعداد الطبيعية **N** إلى مجموعة الاعداد الحقيقية **R** وتكتب على الصورة:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_n \dots$$

وتسمى العناصر $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_n$ بحدود المتتالية بينما يسمى الحد (a_n) الحد العام للمتتالية.

وتكتب المتتالية بدلالة حدها a_n.

مثال 1:-

اكتب الحدود الاربعة الأولى لكل من المتتاليات التالية:

1- $\left\{\frac{n^2}{2}\right\}$

2- $\{\ 3n\ - n^3\}$

3- $\{\ 2n + 4\ \}$

4- $\{2^n\}$

الحل :-

الحدود الاربعة الاولى هي $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4$

1- $a_1 = \frac{1}{2}\ ,\ \ a_2 = 2\ ,\ \ a_3 = \ \frac{9}{2}\ ,\ a_4 = \ 8$

2- $a_1 = \ 2\ ,\ a_2 = -2,\ a_3 = -18,\ a_4 = -52$

3- $a_1 = \ 6\ ,\ a_2 = 8,\ \ a_3 = 10,\ a_4 = 12$

4- $a_1 = \ 2\ ,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = 16$

مثال 2:-

أوجد الحد الخامس و الحد الثامن للمتتالية:

$$\left\{\frac{n^2 + 1}{3n - 2}\right\}$$

الحل :-

الحد الخامس $a_5 = \frac{5^2+1}{3.5-2} = \frac{26}{13} = 2$

الحد الثامن $a_8 = \frac{8^2+1}{3.8-2} = \frac{65}{22}$

1- المتتالية الحسابية :-

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتالية ويرمز له بالرمز d،

أي اذا كانت $\{a_n\} = a_1, \ a_2, \ a_3, \dots a_n$ متتالية حسابية فإن:

$$\boldsymbol{a_2 = a_1 + d \Rightarrow d = a_2 - a_1}$$

$$\boldsymbol{a_3 = a_2 + d \Rightarrow d = a_3 - a_2}$$

$$\boldsymbol{a_4 = a_3 + d \Rightarrow d = a_4 - a_3}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + d \Rightarrow d = a_n - a_{n-1}}$$

مثال :-

أي المتتاليات التالية حسابية واذا كانت فما هو اساسها:

الحل :-

1- 2, 4, 8, 16,... (4 – 2 = 2, 8 – 4 = 4, الفرق ليس ثابت)

$\therefore$ **ليست متتالية حسابية.**

2- 1, 4, 7, 10,... (4 – 1 = 3, 7 – 4 = 3, الفرق ثابت)

$\therefore$ **متتالية حسابية وأساسها يساوي 3.**

3- 1, 4, 9, 16, 25,... (4 – 1 = 3, 9 – 4 = 5 , الفرق ليس ثابت)

$\therefore$ **ليست متتالية حسابية.**

4- $5, \ 3, \ 1, \ -1, \ \dots \Longrightarrow (3-5=-2, \ 1-3=-2,$ الفرق ثابت)

$\therefore$ **متتالية حسابية و أساسها يساوي -2.**

5- $6, \ 6, \ 6, \ 6, \ 6, \dots \Longrightarrow (6-6=0, \ 6-6=0,$ الفرق ثابت)

$\therefore$ **متتالية حسابية و أساسها يساوي 0.**

6- $1, \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ \dots \Longrightarrow (\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6},$ الفرق ليس ثابت)

$\therefore$ **ليست متتالية حسابية.**

6- $1, \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{5}, \ \dots \Longrightarrow (\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6},$ الفرق ليس ثابت)

$\therefore$ **ليست متتالية حسابية.**

الحد العام للمتتالية الحسابية :-

اذا كانت (a_n) متتالية حسابية حدها الأول a_1 واساسها d فإن:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_1 + 4\,d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

∴ الحد العام للمتتالية الحسابية هو:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال 1:-

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (2) وأساسها (5) ثم أوجد الحد الخامس عشر للمتتالية.

الحل :-

$$a_1 = 2$$
$$d = 5$$

∴ يكون الحد العام هو:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$
$$= 2 + (n-1)(5)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a_n = 5n - 3}$$

الحد الخامس عشر:

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_{15} = 5(15) - 3}$$
$$\boldsymbol{= 75 - 3}$$
$$\boldsymbol{= 72}$$

مثال 2:-

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (5-) وأساسها (3) ثم أوجد الحد العاشر للمتتالية.

الحل:-

$$a_1 = -5$$
$$d = 3$$

∴ يكون الحد العام هو:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$= -5 + (n-1)(3)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{a_n = 3n - 8}$$

الحد العاشر:

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_{10} = 3(10) - 8}$$
$$\boldsymbol{= 30 - 8}$$
$$\boldsymbol{= 22}$$

مثال 3:-

إذا علمت أن الحد الحادي عشر من متتالية حسابية يساوي 35 والحد الاول يساوي 5 أوجد أساس هذه المتتالية؟

الحل:-

$a_1 = 5$

$d = ?$

$a_{11} = 35$

∴ يكون الحد العام هو:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow 35 = 5 + (11-1)d}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow 30 = 10\,d}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow d = \frac{30}{10} = 3}$$

مثال 4:-

إذا علمت أن الحد السادس عشر من متتالية حسابية يساوي 85 وأساس هذه المتتالية يساوي 5 أوجد الحد الأول لهذ المتتالية ؟

الحل:-

$a_1 = ?$

$d = 5$

$a_{16} = 85$

∴ يكون الحد العام هو:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$
$$\Rightarrow 85 = a_1 + (16-1)(5)$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow 85 = 75 + a_1}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow a_1 = 85 - 75}$$
$$\boldsymbol{= 10}$$

مثال 5:-

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الحسابية التالية:

1- 3, 6, 9, 12, ...

2- 10, 8, 6, 4, ...

3- $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots$

الحل :-

نجد في البداية الحد الأول والأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام.

1- $a_1 = 3,\ d = 3$

$$\boldsymbol{\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d}$$
$$\boldsymbol{= 3 + (n-1)(3)}$$
$$\boldsymbol{= 3 + 3n - 3}$$
$$\boldsymbol{= 3n}$$

2- $\boldsymbol{a_1 = 10,\ d = -2}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$
$$\boldsymbol{= 10 + (n-1)(-2)}$$
$$\boldsymbol{= 10 - 2n + 2}$$
$$\boldsymbol{= 12 - 2n}$$

3- $\boldsymbol{a_1 = 1\ ,\ d = \frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$$
$$\boldsymbol{= 1 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$\boldsymbol{= 1 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n}$$
$$\boldsymbol{= \frac{n+1}{2}}$$

<u>مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-</u>

<u>أول n حد من حدود هو:</u>

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ldots\ldots,\ a_n$$

<u>و مجموعها هو:</u>

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n$$
$$\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$$
$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots\ldots + (a_1 + (n-1)d)$$
$$= na_1 + d + 2d + 3d \ldots\ldots + (n-1)d$$
$$= na_1 + d\left(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-1)\right)$$
$$= na_1 + d\frac{n(n-1)}{2}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(2\,a_1 + (n-1)d)}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

<u>مثال 1:-</u>

متتالية حسابية حدها الأول يساوي (3-) ، واساسها (4) أوجد مجموع أول (20) حد منها.

<u>الحل:-</u>

$$a_1 = -3\ ,\ d = 4$$
$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(2\,a_1 + (n-1)d)}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{S_{20} = \frac{20}{2}\,(2(-3) + (19)(4))}$$

= 10 (-6 + 76)

= (10)(70)

= 700

مثال 2:-

متتالية حسابية عدد حدودها (16) حدها الأول (3) وحدها الأخير (39) احسب مجموعها.

الحل:-

$$a_1 = 3 \;, \quad a_{16} = 39 \;, \quad n = 16$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S_{16} = \frac{16}{2}\ (3 + 39)}$$

$$= \mathbf{(8)(42)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S_{16} = 336}$$

مثال 3:-

أوجد المجموع التالي:

$$\sum_{n=1}^{12}(5n - 1)$$

الحل:-

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية عدد حدودها (12) حدها الأول (4) واساسها (5).

$$\Rightarrow \boldsymbol{S_{12} = \frac{12}{2}\big(2(4) + 11(5)\big) = 378}$$

مثال 4:-

متتالية حسابية حدها الأول (6) وحدها الأخير (66) ومجموع حدودها 252 أوجد عدد حدودها.

الحل:-

نطبق القانون

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{n}{2}(6 + 66) = 252}$$

$$\boldsymbol{\frac{n}{2}(72) = 252}$$

$$\boldsymbol{n(36) = 252}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{n = 7}$$

المحاضره السادسة

تابع المتتاليات

2- المتتالية الهندسية :-

المتتالية الهندسية المتتالية التى تكون فيها النسبة بين أى حدين متتالين ثابتة تسمى اساس المتتالية ويرمز لها بالرمز r .

أي : اذا كانت $\{a_n\} = a_1 , a_2, a_3 , \ \dots\dots\dots , a_n$
متتالية هندسية فإن :-

$$a_2 = a_1\, r \qquad \ggg \qquad r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$a_3 = a_2\, r \qquad \ggg \qquad r = \frac{a_3}{a_2}$$

$$a_4 = a_3\, r \qquad \ggg \qquad r = \frac{a_4}{a_3}$$

$$a_n = a_{n-1}\, r \qquad \ggg \qquad r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

مثال :

أي من المتتاليات التالية هندسية واذا كانت ما هو أساسها .

1- 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ...

2- 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...

3- 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...

4- $1 , \frac{1}{3}, \ \frac{1}{9} , \frac{1}{27} , \frac{1}{8} \ , \ \dots\dots$

5- 1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , ...

الحل :-

1- 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ...

$$\frac{4}{1} = 4 \quad , \quad \frac{9}{4} = 2.25$$

$\therefore$ ليست هندسية .

2- 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...

$$\frac{4}{2} = 2 \quad , \quad \frac{8}{4} = 2 \quad , \quad \frac{16}{8} = 2$$

$\therefore$ متتالية هندسية و اساسها 2 .

3- 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...

$$\frac{4}{2} = 2 \ , \ \frac{6}{4} = 1.5$$

$\therefore$ ليست هندسية .

4- $1 , \frac{1}{3}, \ \frac{1}{9} , \frac{1}{27} , \frac{1}{8} \ , \ \dots\dots$

$$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \ , \quad \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ متتالية هندسية و اساسها $\frac{1}{3}$.

5- 1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , ...

$$-\frac{1}{1} = -1 \quad , \quad \frac{1}{-1} = -1 \quad , \quad -\frac{1}{1} = -1$$

$\therefore$ متتالية هندسية و اساسها -1 .

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

اذا كانت $\{a_n\} = a_1 , a_2 , \dots\dots\dots , a_3$

متتالية هندسية حدها الأول (a_1) واساسها r فإن :-

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_2 r = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_3 r = a_1 r^3$$

$$a_5 = a_1 r^4$$

الحد العام للمتتالية :- $\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 r^{n-1}}}$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (1) و اساسها (2) أوجد حدها العام .

الحل :-

$$a_n = 1 \quad , \quad r = 2$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$= (1)(2)^{n-1}$$

$$\boxed{\therefore \quad a_n = 2^{n-1}}$$

مثال :-

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الهندسية التالية :-

1- 4 , 16 , 64 , 256 , ...

الحل :-

$$\boldsymbol{a_1 = 4 \quad , r = 4}$$

$$\boldsymbol{\ggg \; a_n = a_1 r^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{= (4)(4)^{n-1}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\therefore \quad a_n = 4^n}}$$

2- $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \dots\dots\dots$

$$\boldsymbol{a_1 = 1 \quad , \quad r = \frac{1}{2} \quad \ggg a_n = a_1 r^{n-1} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\therefore a_n = \frac{1}{2^{n-1}}}}$$

3- -1 , 1 , -1 , 1 , -1 ,..........

$$\boldsymbol{a_1 = -1 \quad , \quad r = -1 \ggg a_n = a_1 r^{n-1} = (-1)(-1)^{n-1}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\therefore \quad a_n = (-1)^n}}$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الرابع (5) ، وحدها السابع $\left(\frac{1}{25}\right)$ أوجد حدها الأول والاساس .

الحل :-

الحد العام للمتتالية الهندسية هو :

$$a_n = a_1\, r^{n-1} \quad , \quad a_4 = a_1\, r^3 = 5 \quad , \quad a_7 = a_1 r^6 = \frac{1}{25}$$

بالقسمة $\frac{a_7}{a_4}$ $\lll\lll$ $\frac{a_1 r^6}{a_1 r^3} = \frac{\left(\frac{1}{25}\right)}{5}$

$$\ggg \quad r^3 = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} \quad \ggg \quad \therefore r = \frac{1}{5}$$

نعوض في معادلة a_4 لإيجاد a_1

$$a_1\, r^3 = 5 \quad \ggg \quad a_1 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 5 \quad \ggg \quad a_1\, \frac{1}{125} = 5 \quad \ggg \quad a_1 = 625$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها السادس (1215) ، وحدها العاشر 98415 أوجد حدها الأول والاساس .

الحل :-

الحد العام للمتتالية الهندسية هو :

$$a_n = a_1\, r^{n-1} \quad , \quad a_6 = a_1\, r^5 = 1215 \quad , \quad a_{10} = a_1 r^9 = 98415$$

بالقسمة $\frac{a_{10}}{a_6}$ $\lll\lll$ $\frac{a_1 r^9}{a_1 r^5} = \frac{98415}{1215}$

$$\ggg \quad r^4 = 81 \quad \ggg \quad \therefore r = \sqrt[4]{81} \qquad \therefore r = 3$$

نعوض في معادلة a_6 لإيجاد a_1

$$a_1\, r^5 = 1215 \quad \ggg \quad a_1 (3)^5 = 24 \quad \ggg \quad a_1\, 243 = 1215$$

$$\ggg \quad a_1 = \frac{1215}{243} = 5$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (2) وحدها الأخير (486) واساسها (3) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \gg \quad 486 = (2)(3)^{n-1}$$

$$(3)^{n-1} = \frac{486}{2} = 243 \quad \gg \quad (3)^{n-1} = (3)^5$$

$$n - 1 = 5 \quad \gg \quad \therefore \; n = 6$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (4) وحدها الأخير (2048) واساسها (2) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \gg \quad 2048 = (4)(2)^{n-1}$$

$$(2)^{n-1} = \frac{2048}{4} = 512 \quad \gg \quad (2)^{n-1} = (2)^9$$

$$n - 1 = 9 \quad \gg \quad \therefore \; n = 10$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (3) وحدها الأخير (3000) واساسها (10) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad \gg \qquad 3000 = (3)(10)^{n-1}$$

$$(10)^{n-1} = \frac{3000}{3} = 1000 \qquad \gg \qquad (10)^{n-1} = (10)^3$$

$$n - 1 = 3 \qquad \gg \qquad \therefore \quad n = 4$$

مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية :-

مجموع أول n حد من **المتتالية الهندسية التي حدها الأول a_1 واساسها r** هو :-

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots\ldots\ldots + a_n$$

$$\gg \ S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ \ldots\ldots + a_1 r^{n-1} \ \ldots (1)$$

بالضرب في r تصبح

$$r\,S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots \ldots\ldots + a_1 r^n \ \ldots\ldots\ldots (2)$$

بالطرح (1) من (2) تصبح :-

$$r\,S_n - S_n = (a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots \ldots\ldots + a_1 r^n) - (a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ \ldots\ldots + a_1 r^{n-1})$$

نختصر الحدود المتشابهة تصبح

$$r\,S_n - S_n = a_1 r^n \ a_1 \qquad \gg \qquad S_n (r - 1) = a_1 (r^n - 1)$$

∴ مجموع أول n حد هو : $\boxed{S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}}$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (8) واساسها (2) احسب مجموع أول خمسة حدود منها .

الحل :

$$a_1 = 8 \ , \quad r = 2$$

$$S_5 = \frac{a_1(r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{(8)(2^5 - 1)}{r - 1} = 8(32 - 1) = 248$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (10) واساسها (5) احسب مجموع أول ثمانية حدود منها .

الحل :

$$a_1 = 10 \ , \quad r = 5$$

$$S_8 = \frac{a_1(r^8 - 1)}{r - 1} = \frac{(10)(5^8 - 1)}{5 - 1} =$$

$$= 976560$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (1) واساسها ($\frac{1}{4}$) والمطلوب ايجاد مجموع أول سبعة حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_7 = \frac{1\left(\left(\frac{1}{4}\right)^7-1\right)}{\frac{1}{4}-1} = \left(\frac{1}{4^7} - 7\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = \left(\frac{1}{16384} - 1\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = -\frac{16383}{16384} \times \frac{4}{-3}$$

$$S_7 = \frac{10922}{8192}$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{10}(5)^{n-1}$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (1) واساسها 5 والمطلوب ايجاد مجموع أول عشر حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_{10} = \frac{1((5)^{10}-1)}{5-1} = 2441406$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{5}(2.(3)^{n-1})$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (2) واساسها 3والمطلوب ايجاد مجموع أول خمس حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_5 = \frac{2((3)^5-1)}{3-1} = 242$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{8}(10.(5)^{n-1})$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (10) واساسها 5والمطلوب ايجاد مجموع أول أربع حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_8 = \frac{10((5)^8-1)}{5-1} = 976560$$

تطبيقات المتتالية فى حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :-

يكون جملة المبلغ على حساب الفائدة البسيطة فى نهاية المدة على شكل متتالية حسابية و تحسب بالقانون .

$$a_n = a_1 + (n)d$$

حيث أن :-

المبلغ في بداية المدة = a_1

عدد السنوات = n

الفائدة السنوية على المبلغ = d

نسبة الفائدة × a_1 = d

مثال :-

أودع شخص مبلغ (10000) ريال لمدة (8) سنوات بفائدة بسيطة 7.5% سنوياً ، أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 10000$

$n = 8$

$$d = \frac{7.5}{100} \times 10000 = 750$$

المبلغ في نهاية السنة الثانية = a_8

$$a_8 = 10000 + (8)(750)$$

$= 10000 + 6000 = 16000$ SAR

مثال :-

أودع شخص مبلغ ما لمدة (4.75) سنة بفائدة بسيطة 2% ربع سنوي ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ 5520 ريال أحسب أصل المبلغ .

الحل :-

$a_1 = ?$

$n = 4.5$

$$d = \frac{8}{100} \times a_1 = 0.08\, a_1$$

المبلغ في نهاية المدة = $a_{4.75}$

$$a_{4.75} = a_1 + (4.75)(0.08\, a_1) = 5520$$

$$a_1(1+4.75\times 0.08) = 5520$$

$$a_1(1.38) = 5520$$

$$a_1 = \frac{5520}{1.38} = 4000 \text{ SAR}$$

مثال :-

أودع شخص مبلغ 1000 ريال لمدة ما بفائدة بسيطة 10% سنوياً ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ 1250 ريال أحسب مدة الاستثمار .

الحل :-

$a_1 = 1000$

$n = ?$

$d = \frac{10}{100} \times 1000 = 100$

المبلغ في نهاية المدة = $a_?$

$$a_? = 1000 + (n)(100) = 1250$$

$$1250 - 1000 = n.100$$

$$250 = n.100$$

$$n = \frac{250}{100} = 2.5$$ سنة

أما الفائدة المركبة فتحسب على أساس المتتالية الهندسية حيث تحسب بالقانون :-

$$a_n = a_1 r^n$$

حيث جملة المبلغ في نهاية المدة = a_n

المبلغ في بداية المدة = a_1

نسبة الفائدة +1 = r

مثال :-

ادخر شخص مبلغ 8000 ريال بفائدة مركبة 9% لمدة خمس سنوات ، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 8000$

$r = 1+ 0.09 = 1.09$

$n = 5$

$a_5 = 8000\,(1.09)^5 = 12308.9$ SAR

مثال :-

ادخر شخص مبلغ 10000 ريال بفائدة مركبة 5% نصف سنوي لمدة 3.5 سنة ، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 10000$

$r = 1+ 0.10 = 1.10$

$n = 3.5$

$a_{3.5} = 10000\,(1.10)^{3.5} = 13959.65$ SAR

مثال :-

ادخر شخص مبلغ ما بفائدة مركبة 4% نصف سنوي لمدة 6 سنوات ، فوجد أن جملة المبلغ في نهاية المدة 15868.74322 ريال أوجد أصل المبلغ .

الحل :-

$a_1 = ?$

$r = 1 + 0.08 = 1.08$

$n = 6$

$a_{3.5} = a_1 (1.08)^6$

$15868.74322 = a_1 (1.08)^6$

$$a_1 = \frac{15868.74322}{1.08^6} = 10000 \text{ SAR}$$

الرغبة هي سر النجاح في الحياة المهنية لكل إنسان

المحاضره السابعة

المصفوفات (Matrices)

<u>1 – المصفوفات :-</u>

المصفوفة: <u>هى عدد من العناصر موضوعة على شكل صفوف وأعمدة ويرمز لها بأحد الحروف الهجائية الكبيرة</u> ,A,B,C,... ومن الأمثلة على المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 12 & 3 \\ -5 & 5 & -6 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>رتبة المصفوفة:-</u>

رتبة المصفوفة **تساوي عدد الصفوف×عدد الاعمدة.**

<u>مثال:</u>

رتبة المصفوفة A هي 3×4 وتكتب على الصورة $A_{3\times4}$.

رتبة المصفوفة B هي 4×2 وتكتب على الصورة $B_{4\times2}$.

<u>رتبة العنصر:-</u>

رتبة العنصر a هي **موقعه في الصف والعمود** أي العنصر في الصف i والعمود j = a_{ij}

<u>مثال:-</u>

في المصفوفة A السابقة أوجد العناصر a_{21} , a_{32} , a_{24}.

<u>الحل:-</u>

العنصر a_{21} : العنصر في الصف الثاني العمود الأول **$a_{21} = -5$**

العنصر a_{32} : العنصر في الصف الثالث العمود الثاني **$a_{32} = -6$**

العنصر a_{24} : العنصر في الصف الثاني العمود الرابع **$a_{24} = 7$**

<u>أنواع المصفوفات :-</u>

<u>1- المصفوفة الصفرية:</u>

المصفوفة **<u>التى يكون جميع عناصرها أصفار</u>**.

<u>مثال:-</u>

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

← **مصفوفة صفرية رتبتها 2×3**

2- المصفوفة المربعة:
المصفوفة المربعة هي **المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة.**
مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

المصفوفة A **مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2** (أي من الرتبة الثانية).

المصفوفة B **مصفوفة مربعة من الرتبة 3×3** (أي من الرتبة الثالثة).

3- المصفوفة القطرية:
هي مصفوفة المربعة **التي يكون جميع العناصر فيها غير القطر الرئيسي أصفار.**
مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4- المصفوفة المحايدة:
المصفوفة القطرية التي يكون عناصر القطر الرئيسي تساوي واحد ويرمز لها بالرمز I_n حيث n تمثل عدد صفوف المصفوفة (رتبتها).
مثال:-

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5- المصفوفة المثلثية:
وتنقسم إلى قسمين :

أ – المصفوفة المثلثية العليا:
المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر تحت القطر الرئيسي أصفار .

مثال:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ب – المصفوفة المثلثية السفلى:
المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر فوق القطر الرئيسي أصفار .

مثال:-

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

6- المصفوفة المبدلة (Transpose of matrix):

منقول المصفوفة أو مبدل المصفوفة **هي تبديل الصفوف بالأعمدة والاعمدة بالصفوف ويرمز لها بالرمز $\mathbf{A^T}$.**

مثال:-

أوجد منقول كل من المصفوفات التالية :

$$1/\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3} \qquad 2/\ B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

الحل:-

$$1/\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2} \qquad 2/\ B^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

7- المصفوفة المتماثلة (Symatric matrix):

تكون المصفوفة متماثلة اذا كانت $A = A^T$.

مثال:-

اي من المصفوفات التالية متماثلة:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad 2)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$\mathbf{1)}\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A \neq A^T}$$

$\therefore$ A ليست متماثلة

$$\mathbf{2)}\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B = B^T}$$

$\therefore$ B متماثلة

العمليات على المصفوفات :-

1- الجمع والطرح:

عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من نفس الرتبة ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة.

مثال:-

أوجد ناتج ما يلي:

$$1/\ A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$2/\ A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

الحل :

$$\mathbf{1\text{-}}\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{7} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{2\times3} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{11} & \mathbf{11} \\ \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$\mathbf{2\text{-}}\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{8} \end{bmatrix}_{3\times3} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

2- الضرب بعدد ثابت:

عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فإننا نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بالعدد.

مثال:-

اذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد ما يلي:

1) $3A$

2) $2B$

3) $3A - 2B$

الحل:-

1) $\mathbf{3A = 3 \times \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 4 & 3\times 9 \\ 3\times 6 & 3\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}}$

2) $\mathbf{2B = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 1 \\ 2\times 2 & 2\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}}$

3) $\mathbf{3A - 2B = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}}$

3- ضرب المصفوفات:

عند **ضرب مصفوفتين** يجب أن تكون **عدد أعمدة الاولى يساوي عدد صفوف الثانية** وعند **الضرب نضرب الصف i في المصفوفة الاولى بالعمود j في المصفوفة الثانية لينتج العنصر a_{ij} في المصفوفة الناتجة.**

ويتم الضرب: **صف (صف من المصفوفة الأولى) في عمود (عمود من المصفوفة الثانية).**

مثال :-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4\times 3}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

احسب:

1) AB

2) BA

الحل :

1) $\mathbf{AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times 2+4\times 3\pm 1\times -1) & (1\times 0+4\times 1\pm 1\times 4) \\ (5\times 2+6\times 3+2\times -1) & (5\times 0+6\times 1+2\times 4) \\ (2\times 2+1\times 3+7\times -1) & (2\times 0+1\times 1+7\times 4) \\ (3\times 2+0\times 3+4\times -1) & (3\times 0+0\times 1+4\times 4) \end{bmatrix}}$

$$\mathbf{= \begin{bmatrix} 2+12+1 & 0+4-4 \\ 10+18-2 & 0+6+8 \\ 4+3-7 & 0+1+28 \\ 6+0-4 & 0+0+16 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 26 & 14 \\ 0 & 29 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}_{4\times 2}}$$

2) $\mathbf{BA}$

لا تجوز عملية الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى لا تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية.

ملاحظة:

1- اذا كانت $A_{m\times n}$ وكانت $B_{n\times k}$ فإن $(AB)_{m\times k}$.

مثال 1:-

اذا كانت $B_{5\times 6}$, $A_{3\times 5}$ فأوجد رتبة AB.

الحل:-

$$\boldsymbol{A_{m\times n} \times B_{n\times k} = AB_{m\times k}}$$

$$\boldsymbol{A_{3\times 5} \times B_{5\times 6} = AB_{3\times 6}}$$

و نستنتج من هذا المثال أن:

$$\boldsymbol{AB \neq BA}$$

مثال 2:-

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ فأوجد A^2

الحل:-

$$\boldsymbol{A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}}$$

$$= \boldsymbol{\begin{bmatrix} (2\times 2 + 4\times 6) & (2\times 4 + 4\times 5) \\ (6\times 2 + 5\times 6) & (6\times 4 + 5\times 5) \end{bmatrix}}$$

$$= \boldsymbol{\begin{bmatrix} 28 & 28 \\ 42 & 49 \end{bmatrix}}$$

مثال 3:-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

وكانت $\boldsymbol{C = AB, D = BA}$

فأوجد ما يلي:

$$\boldsymbol{c_{12}\ ,\ c_{33}\ ,\ d_{21}\ ,\ d_{13}}$$

الحل:-

1) حاصل ضرب الصف الأول من المصفوفة A بالعمود الثاني من المصفوفة $\mathbf{B} = \mathbf{c_{12}}$.

$$\boldsymbol{\Rightarrow c_{12} = 3\times 1 + 4\times 2 + 5\times 5 = 3 + 8 + 25 = 36}$$

2) $\boldsymbol{c_{33} = 6\times -1 + 4\times 6 + 7\times 0 = -6 + 24 + 0 = 18}$

3) $\boldsymbol{d_{21} = 4\times 3 + 2\times 2 + 6\times 6 = 12 + 4 + 36 = 52}$

4) $\boldsymbol{d_{13} = 1\times 5 + 1\times 0 + -1\times 7 = \ = 5 + 0 - 7 = -2}$

لا تحقيق للطموحات دون معاناة

المحاضره الثامنة

تابع المصفوفات (Matrices)

عمليات الصف البسيط :-

هى مجموعة من العمليات تقام على الصفوف وهذه العمليات تتكون من ثلاثة عمليات فقط هى:

1- ضرب صف بعدد ثابت.
2- ضرب صف بعدد ثابت وجمعه الى صف آخر.
3- تبديل صف مكان صف.

مثال:-
في المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نفذ العمليات التالية على المصفوفة على الترتيب.
1- أضرب الصف الثاني بالعدد 2.
2- اضرب الصف الاول بالعدد (1-) واجمعه الى الصف الثالث.
3- بدل الصف الثاني مع الصف الثالث.

الحل:-

$$1)\ 2r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2)\ -1r_1 + r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$3)\ r_2 \leftrightarrow r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -5 \\ 12 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

سوف نعتمد على عملية الصف البسيط في ايجاد معكوس المصفوفة وسوف **نرمز الى معكوس المصفوفة بالرمز A^{-1} .**

مثال 1:-
أوجد معكوس المصفوفة التالية باستخدام عمليات الصف البسيط

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل:-
لإيجاد معكوس المصفوفة نستخدم العلاقة السابقة بحيث نضع المصفوفة ومعها المصفوفة المحايدة I_2 وباستخدام عمليات الصف البسيط تتحول A إلى I_2 و تتحول I_2 إلى A^{-1}

$$\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 4 & 1 & 0\\ 6 & 5 & 0 & 1\end{array}\right] \to \frac{1}{3}r_1 \to \left[\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 6 & 5 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\to -6r_1 + r_2 \to \left[\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -3 & -2 & 1\end{array}\right] \to -\frac{1}{3}r_2 \to \left[\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right] \to -\frac{4}{3}r_2 + r_1 \to \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix}-\frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

<u>للتحقق من الحل : $\mathbf{AA^{-1} = I}$</u>

$$\mathrm{AA}^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{15}{9}+\frac{8}{3} & \frac{12}{9}-\frac{4}{3}\\ -\frac{30}{9}+\frac{10}{3} & \frac{24}{9}+\frac{-5}{3}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-\frac{15}{9}+\frac{24}{9} & \frac{12}{9}-\frac{12}{9}\\ -\frac{30}{9}+\frac{30}{9} & \frac{24}{9}+\frac{-15}{9}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

<u>حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط :-</u>

اذا كان لدينا النظام التالي من المعادلات الخطية:

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2}$$

نعرف المصفوفات التالية:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}}\\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}}\end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x_1}\\ \boldsymbol{x_2}\end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b_1}\\ \boldsymbol{b_2}\end{bmatrix}$$

حيث تسمى A مصفوفة المعاملات X مصفوفة المتغيرات، B مصفوفة الثوابت، وبالتالي يمكن التعبير عن نظام المعادلات باستخدام المصفوفات كالآتي:

$$\boldsymbol{AX = B}$$

ولحل هذا النظام باستخدام عمليات الصف البسيط **<u>نستخدم الخطوات التالية:</u>**

1- نضع المصفوفة $[A|B]$.

2- نطبق عليها عمليات الصف البسيط.

3- ينتج $[I|C]$ حيث C تمثل مصفوفة الحل وتكون $X = C$.

مثال 1:-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط.

$$3x + 2y = 7$$
$$4x - y = 2$$

الحل:-

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

مصفوفة المتغيرات $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{3}r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -4r_1 + r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{22}{3} \end{array}\right] \rightarrow -\frac{3}{11}r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -\frac{2}{3}r_2 + r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = 1 \quad , y = 2$$

مثال 2:-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط.

$$5x + 2y = 23$$
$$6x + 10y = 58$$

الحل:-

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

مصفوفة المتغيرات $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 23 \\ 58 \end{bmatrix}$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 23 \\ 6 & 10 & 58 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{5}r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 6 & 10 & 58 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -6r_1 + r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & \frac{38}{5} & \frac{152}{5} \end{array}\right] \rightarrow \frac{5}{38}r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -\frac{2}{5}r_2 + r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = 3 \quad , y = 4$$

التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

مثال 1:-

تنتج شركة النجاح نوعين من الدفاتر المدرسية النوع الأول (دفتر 60 ورقة) ويباع بسعر 2 ريال ويحتاج إلى 3 ساعات عمل في قسم القص و 2 ساعة عمل في قسم التجميع، والنوع الثاني (دفتر 120 ورقة) يباع بسعر 3 ريال ويحتاج إلى 2 ساعة عمل في قسم القص و 4 ساعات عمل في قسم التجميع، فإذا علمت أن الساعات المتاحة في قسم القص هي 35 ساعة، و 50 ساعة في قسم التجميع، المطلوب باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج والتي تحقق أعلى ربح ممكن

الحل:-

1- **جدول تمهيد الحل:**

المنتج / اقسام التشغيل	قسم القص	قسم التجميع	ثمن البيع
دفتر 60 ورقة (x)	3	2	2
دفتر 120 ورقة (y)	2	4	3
ساعات العمل المتاحة لكل قسم	35	50	-

2- صياغة المشكلة رياضياً:

أ- دالة الهدف (الربح / ثمن البيع): $p = 2x + 3y$

ب- القيود:

$$3x + 2y = 35$$
$$2x + 4y = 50$$

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

مصفوفة المتغيرات $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 35 \\ 50 \end{bmatrix}$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 35 \\ 2 & 4 & 50 \end{array}\right] \to \frac{1}{3}r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 2 & 4 & 50 \end{array}\right]$$

$$\to -2r_1 + r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{80}{3} \end{array}\right] \to \frac{3}{8}r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

$$\to -\frac{2}{3}r_2 + r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 5 \quad , y = 10$$

ربح النموذج:

$$\Rightarrow p = 2x + 3y = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40\ SAR$$

مثال 2:-

تنتج شركة الفهد نوعين من المنتجات $(x\ ,\ \ y)$ وتستخدم نوعين من المواد الخام الخشب والحديد فإذا علمت أن النوع الأول من المنتجات يتطلب 8 م^2 من الخشب و 2 كغ من الحديد والنوع الثاني من المنتجات يتطلب 10 م^2 من الخشب و 4 كغ من الحديد، ويبلغ ربح الوحدة من النوع الأول 100 ريال والنوع الثاني 150 ريال، فإذا علمت أن كمية الخشب المتوافرة في المخزن هي 280 م^2 من الخشب و 100 كغ من الحديد.

المطلوب: باستخدام اسلوب المصفوفات، أوجد الكمية المثلى من الانتاج والتي تحقق أعلى ربح ممكن.

الحل:-

1- **جدول تمهيد الحل:**

الربح	الحديد	الخشب	المنتجات / المواد الخام
100	2	8	x
150	4	10	y
-	100	280	كمية المواد الخام المتاحة

2- صياغة المشكلة رياضياً:

أ- دالة الهدف (الربح / ثمن البيع): $p = 100x + 150y$

ب- القيود:

$$8x + 10y = 280$$
$$2x + 4y = 100$$

(مصفوفة المعاملات) $A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(مصفوفة المتغيرات) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(مصفوفة الثوابت) $B = \begin{bmatrix} 280 \\ 100 \end{bmatrix}$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 8 & 10 & 280 \\ 2 & 4 & 100 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{8}r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 2 & 4 & 100 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -2r_1 + r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & \frac{12}{8} & \frac{240}{8} \end{array}\right] \rightarrow \frac{8}{12}r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -\frac{10}{8}r_2 + r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right] \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 10 \ \ , y = 20$$

ربح النموذج:

$$\Rightarrow p = 100x + 150y = 100 \times 10 + 150 \times 20 = 4000\ SAR$$

مثال 3:-

تنتج شركة الأحلام للثلاجات نوعين من الثلاجات هما ثلاجة 10 قدم وثلاجة 12 قدم فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلاجات يمر بمرحلتين إنتاجيتين هما مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب. فإذا فرض أن الثلاجة 10 قدم تحتاج 4 ساعات عمل في مرحلة التصنيع وساعتين في مرحلة التشطيب، وأن الثلاجة 12 قدم تحتاج إلى 5 ساعات عمل في مرحلة التصنيع و 3 ساعات في مرحلة التشطيب. مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هي 2400 ساعة لمرحلة التصنيع، 1300 ساعة لمرحلة التشطيب فإذا كانت سياسة الإنتاج في المصنع هي استخدام كافة الطاقات المتاحة فالمطلوب تحديد عدد الوحدات المنتجة من كل نوع.

الحل:-

1- جدول تمهيد الحل:

النوع / مرحلة الانتاج	التصنيع	التشطيب
10قدم(x)	4	2
12قدم(y)	5	3
الساعات المتاحة	2400	1300

نفرض أن:

x = عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 10 قدم.

y = عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 12 قدم.

← ومن ثم يمكن صياغة المشكلة الرياضية السابقة كنظام للمعادلات كما يلي:

$$4x + 5y = 2400$$

$$2x + 3y = 1300$$

(مصفوفة المعاملات) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(مصفوفة المتغيرات) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(مصفوفة الثوابت) $B = \begin{bmatrix} 2400 \\ 1300 \end{bmatrix}$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 2400 \\ 2 & 3 & 1300 \end{array}\right] \to \frac{1}{4}r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 2 & 3 & 1300 \end{array}\right]$$

$$\to -2r_1 + r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 0 & \frac{1}{2} & 100 \end{array}\right] \to 2r_2 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right]$$

$$\to -\frac{5}{4}r_2 + r_1 \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix} \Longrightarrow x = 350 \;\; , y = 200$$

لا قيمة للنجاح بدون الاجتهاد والمثابرة

المحاضره التاسعة

المحددات (DETERMINANTS)

<u>محدد المصفوفة من الرتبة الثانية :-</u>

مُحَدِّد المصفوفة هي **<u>القيمة الرقمية للمصفوفة</u>** ويرمز لها بأحد الرموز التالية:

$$\boldsymbol{Det\ A}\,,\ \Delta\boldsymbol{A}\,,\ |\boldsymbol{A}|$$

<u>1- محدد المصفوفة من الرتبة الثانية 2×2:</u>

المصفوفة من الرتبة 2×2 تكون على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

وتكون محددتها هي:

$$\Delta\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc}$$

<u>مثال:-</u>

أوجد قيمة المحددات التالية:

$$1)\ \Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta A = 5 \times 4 - 2 \times 3 = 20 - 6 = 14}$$

$$2)\ \Delta B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta B = 1 \times 2 - 3 \times 5 = 2 - 15 = -13}$$

$$3)\ \Delta C = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta C = 2 \times 9 - 3 \times 6 = 18 - 18 = 0}$$

<u>ملاحظة:</u> اذا كانت $\Delta A = 0$ فإن A تسمى مصفوفة مفردة (Singular matrix).

<u>2- محدد المصفوفة من الرتبة الثالثة:</u>

المصفوفة من الرتبة الثالثة تكون على الصورة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

<u>ولإيجاد محدد المصفوفة A نستخدم واحدة من الطريقتين:</u>

أ- طريقة الأسهم.

ب- طريقة المحددات الصغرى.

أ- طريقة الأسهم (سايروس):

في هذه الطريقة نكرر العمود الأول والثاني، ثم نجد حاصل ضرب الأقطار الرئيسية ونطرح منها حاصل ضرب الاقطار المرافقة كالاتي:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{detA} &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad -(a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

مثال 1:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\boldsymbol{\Delta A} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{7} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{7} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta A} &= (\mathbf{1 \times 4 \times 3 + 2 \times 6 \times (-1) + 3 \times 5 \times 7}) \\ &\quad -(\mathbf{2 \times 5 \times 3 + 1 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times (-1)}) \\ &= (\mathbf{12 - 12 + 105}) - (\mathbf{30 + 42 - 12}) \\ &= \mathbf{105 - 60} \\ &= \mathbf{45} \end{aligned}$$

مثال 2:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\boldsymbol{\Delta A} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta A} &= (\mathbf{3 \times 8 \times 4 + 1 \times 9 \times 6 + 2 \times 7 \times 2}) - (\mathbf{1 \times 7 \times 4 + 3 \times 9 \times 2 + 2 \times 8 \times 6}) \\ &= (\mathbf{96 + 54 + 28}) - (\mathbf{28 + 54 + 96}) \\ &= \mathbf{178 - 178} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$\Longleftarrow A$ مصفوفة مفردة.

ب- طريقة المحددات الصغرى:

نجد المحدد بالنسبة لأي صف أو عمود فإذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن محدد A بالنسبة للصف الأول هي:

$$\boldsymbol{\Delta A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

ثم نجد محددات المصفوفات الثنائية.

ونستطيع ايجاد المحدد بالنسبة لأي صف أو أي عمود وتكون اشارات المصفوفة كالآتي:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

مثال 1:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\boldsymbol{\Delta A = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= 3(10-21) - 0(-5-7) + 4(-3-2)}$$

$$\boldsymbol{= -53}$$

مثال 2:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\boldsymbol{\Delta A = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - (5)\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= 4(7-0) - 5(42-0) - 2(18-8)}$$

$$\boldsymbol{= -202}$$

خواص المحددات :-

1- اذا كانت عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة أصفار فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

مثال:-

أحسب قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:-

حيث أن الصف الثاني أصفار فإن $\boldsymbol{\Delta A = 0}$

2- اذا تساوت عناصر صفين أو عمودين في المصفوفة فإن قيمة المحدد تساوى صفر.

مثال:-

احسب قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل:-

حيث أن عناصر العمود الأول و الثالث متساوية فإن $\Delta A = 0$

3- اذا ضرب أحد الصفوف أو أحد الأعمدة بعدد ثابت فإن قيمة المحدد تضرب في نفس العدد.

مثال:-

اذا كانت قيمة المحدد التالي تساوي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad , \qquad \Delta A = 5$$

فأوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:-

نلاحظ أن المصفوفة B هي المصفوفة A مضروب الصف الثالث فيها بالعدد (3).

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \Delta A$$

$$\Longrightarrow \Delta B = 3\Delta A = (3)(5) = 15$$

4- اذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة مربعة وكان k أي عدد حقيقي فإن:

$$Det(kA) = k^n \, Det(A)$$

مثال:-

اذا كانت $\Delta(A_{2\times 2}) = 5$ فأوجد قيمة المحدد $\Delta(3A)$.

الحل:-

$$\Delta(3A) = 3^2(\Delta A) = (9)(5) = 45$$

5- اذا بدلنا صف مكان صف أو عمود مكان عمود في المحدد فإن قيمة المحدد تنعكس اشارتها.

مثال:-

اذا كانت

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta A = -2$$

فأوجد قيمة المحدد

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:-

المصفوفة B **هي ناتج تبديل الصف الأول بالصف الثاني في المصفوفة** $\boldsymbol{A}$

$$\Longrightarrow \ \Delta \boldsymbol{B} = \ -(-\mathbf{2}) = \ \mathbf{2}$$

6- اذا كان أحد الصفوف مضاعف لصف آخر أو أحد الأعمدة مضاعف للآخر فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$$

الحل:-

لأن الصف الثالث من مضاعفات الصف الثاني فإن $\Delta \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{7} - \ \Delta(\boldsymbol{AB}) = (\Delta \boldsymbol{A})\ (\Delta \boldsymbol{B})$$

مثال:-

اذا كانت A ، B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت:

$(\Delta \boldsymbol{A}) = \mathbf{2}$, $(\Delta \boldsymbol{B}) = \mathbf{5}$, فأوجد $\Delta(\boldsymbol{AB})$

الحل:-

$$\Delta(\mathbf{AB}) = (\Delta\mathbf{A})\ (\Delta\mathbf{B}) = (\mathbf{2}) \times (\mathbf{5}) = \mathbf{10}$$

$$\mathbf{8} - \quad \Delta\mathbf{A} \ = \Delta\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$$

مثال:-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$\Delta \boldsymbol{A} = \mathbf{10} \ - \mathbf{6} = \mathbf{4}$$

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \Delta \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \mathbf{10} - \mathbf{6} = \mathbf{4}$$

$$\therefore \ \ \Delta \boldsymbol{A} \ = \ \Delta \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$$

9- محدد المصفوفة القطرية = حاصل ضرب القطر

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\Delta \mathbf{A} = (\mathbf{2})(\mathbf{1})(\mathbf{-3})(\mathbf{-4}) = \mathbf{24}$$

10- محدد المصفوفة المحايدة = 1

أي $\boldsymbol{det(I_n) = 1}$

مثال:-

أوجد قيمة محدد المصفوفة $\mathbf{I_5}$

الحل:-

$$\Delta\ \mathbf{I_5} = \mathbf{1}$$

11- قيمة محدد المصفوفة المثلثية = حاصل ضرب القطر

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\Delta \mathbf{A} = (\mathbf{2})(\mathbf{3})(\mathbf{4}) = \mathbf{24}$$

مثال:-

أوجد قيمة المحدد التالي

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل:-

$$\Delta \mathbf{A} = (\mathbf{1})(\mathbf{1})(\mathbf{3}) = \mathbf{3}$$

النجاح رحلة وليس هدفاً .

المحاضره العاشرة

تابع / المحددات (DETERMINANTS)

استخدام المحددات في ايجاد معكوس المصفوفة :-

أ- اذا كانت A مصفوفة من الرتبة 2×2 أي:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فنجد معكوس المصفوفة بالخطوات التالية:

1- نجد قيمة محدد المصفوفة $det\ A$.

2- يكون معكوس المصفوفة A^{-1} هو:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

مثال 1:-

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$\Rightarrow \mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{8 - 3 = 5}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} & -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} & \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \end{bmatrix}$$

مثال 2:-

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$\Rightarrow \mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{12 - 12 = 0}$$

∴ لا يوجد معكوس للمصفوفة $\boldsymbol{A}$.

ملاحظة 1:

اذا كانت قيمة محدد المصفوفة = صفر فإن **المصفوفة لا يوجد لها معكوس.**

ملاحظة 2:

معكوس المصفوفة المحايدة هو نفس المصفوفة.

أي اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ب- اذا كانت A مصفوفة من الرتبة 3×3 بحيث $(detA \neq 0)$

أي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فنجد معكوس المصفوفة A باستخدام المحددات كالاتي:

1- نجد محدد المصفوفة: $\det(A)$.

2- نجد محدد المرافقات لكل عنصر من عناصر المصفوفة ونضعها في مصفوفة **ونرمز لها بالرمز** A^{ι} .

$$A^{\iota} = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

حيث A_{11} هي محدد المرافقات للعنصر a_{11} و تكون:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3- نجد المصفوفة المرافقة (Adjoint Matrix): $\mathbf{adjA} = (\mathbf{A}^{\iota})^{T}$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

4- يكون معكوس المصفوفة هو:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{detA}\ adj\ A}$$

مثال 1:-

أوجد معكوس المصفوفة A.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:-

نجد في البداية محدد A

$$\boldsymbol{det\ A = 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= 5(9+0) - 2(12-0) + 6(-8-3)}$$

$$\boldsymbol{= 5 \times 9 - 2 \times 12 + 6 \times -11 = -45}$$

ثم نجد محددات المرافقات للعناصر:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$ **المصفوفة الاصلية**

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A^{\iota}} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-18} & \mathbf{-18} \\ \mathbf{-12} & \mathbf{9} & \mathbf{24} \\ \mathbf{-11} & \mathbf{12} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{adj\ A} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-12} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{-18} & \mathbf{9} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-18} & \mathbf{24} & \mathbf{7} \end{bmatrix} \qquad \therefore \boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{-45}} \begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-12} & \mathbf{-11} \\ \mathbf{-18} & \mathbf{9} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-18} & \mathbf{24} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{-45}} & -\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{-45}} & -\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{-45}} \\ -\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{-45}} & \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{-45}} & \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{-45}} \\ -\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{-45}} & \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{-45}} & \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{-45}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} & \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}} & \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{45}} \\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} & -\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{15}} \\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} & -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{15}} & -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{45}} \end{bmatrix}$$

مثال 2:-

أوجد معكوس المصفوفة A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 \times -2 + 0 = 6$$

مصفوفة المرافقات $A^{t} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} \\ \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

استخدام المحددات في حل أنظمة المعادلات الخطية :-

أ- حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة:

مثال 1:-

حل النظام التالي من المعدلات باستخدام معكوس المصفوفة، ثم تأكد من الحل:

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - y = 7$$

الحل:-

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

نجد أولاً معكوس A حيث

$$\det A = -2 - 9 = -11$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

ويكون حل النموذج هو:

$$X = A^{-1} B$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} + \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} - \frac{14}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{11} \\ -\frac{11}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 2\ ,\ \ y = -1$$

للتأكد نعوض عن قيم x و y في المعادلة الأولى:

$$2x + 3y = 1$$

(الحل صحيح) $2(2) + 3(-1) = 1$

مثال 2:-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 - x_3 = 1}$$
$$\boldsymbol{3\,x_1 + 2\,x_2 = 5}$$
$$\boldsymbol{x_1 - 4\,x_3 = -3}$$

الحل:-

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}}$$

معكوس $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{\Rightarrow det\;A = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times -8 - 3 \times -4 + 1 \times 2 = 6}$$

المصفوفة الاصلية $\boldsymbol{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}}$

مصفوفة المرافقات $\boldsymbol{A^{\iota} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}}$

مصفوفة المرافقات $\boldsymbol{A^{\iota} = \begin{bmatrix} -8 & 12 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad adj\;A = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{6} & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{12}{6} & -\frac{3}{6} & -\frac{3}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= A^{-1}\,.\;B = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= \begin{bmatrix} \left(-\frac{4}{3}\right) \times 1 + \frac{2}{3} \times 5 + \left(\frac{1}{3}\right) \times (-3) \\ 2 \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 5 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-3) \\ \left(-\frac{1}{3}\right) \times 1 + \frac{1}{6} \times 5 + \left(-\frac{1}{6}\right) \times (-3) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} + \frac{10}{3} - 1 \\ 2 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{3}{6} \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

ب- حل انظمة المعادلات الخطية باستخدام المحددات (طريقة كرامر):

مثال 1:-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات باستخدام المحددات:

$$x + y = 1$$
$$2x + 3y = 5$$

الحل:-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{2}{1} = -2 \ , \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3$$

ملاحظة: اذا كانت محدد المصفوفة Δ تساوي صفر فإن النظام لا يوجد له حل.

مثال 2:-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات:

$$2x + y + 3z = 3$$
$$x + 2y + 2z = 5$$
$$5x + 3y + 6z = 7$$

الحل:-

$$1)\ \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times (12 - 6) - 1 \times (6 - 9) + 5(2 - 6)$$
$$= 12 + 3 - 20$$
$$= -5$$

$$2)\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \times (12 - 6) - 5 \times (6 - 9) + 7(2 - 6)$$
$$= 18 + 15 - 28$$
$$= 5$$

$$3)\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times (30 - 14) - 1 \times (18 - 21) + 5(6 - 15)$$
$$= 32 + 3 - 45$$
$$= -10$$

$$4)\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (14 - 15) - 1 \times (7 - 9) + 5(5 - 6)$$

$$= -2 + 2 - 5$$

$$= -5$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$\Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$\Rightarrow z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$$

مثال 3:-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات:

$$x + 2y + 6z = 7$$
$$3x + y + 3z = 7$$
$$4y + 12z = 10$$

الحل:-

$$1)\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (12 - 12) - 3 \times (24 - 24) + 0(6 - 6)$$

$$= 0 + 0 + 0$$

$$= 0$$

$\Leftarrow$ بما أن $\Delta A = 0$ فإن النظام لا يوجد له حل.

كل إناء يضيق بما جعل فيه إلا وعاء العلم فإنه يتسع

المحاضره الحادي عشرة

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير.
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج والطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة لسعر.

قواعد التفاضل :-

يطلق على عملية التفاضل في بعض الأحيان إيجاد المشتقة الأولى للدالة أو المعامل التفاضلي الأول.
ودائما تكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع وهو y والآخر متغير مستقل وهو x ويكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة.

المعطى: دالة أو معادلة $y = 5x + 9$

المطلوب: المشتقة الأولى للدالة $\frac{dy}{dx} = ???$

1- تفاضل المقدار الثابت:

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائما صفر فمثلا إذا كانت الدالة على شكل:

$$\boldsymbol{y = 15}$$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائما مهما تغير المتغير المستقل x وعلى ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يؤثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضيا كما يلي:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = 0}$$

2- تفاضل المتغير x المرفوع إلى أس (x^n):

يتم تنزيل الاس والطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :

1- $y = x^5$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4$$

2- $y = 15x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 60x^3$$

3- $y = 10x$

$$\frac{dy}{dx} = 10$$

3- تفاضل الدوال كثيرات الحدود:

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة.

مثال :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$

4- مشتقة حاصل ضارب دالتين:

مشتقة حاصل ضارب دالتين يساوي الدالة الأولى كما هي ضارب مشتقة الدالة الثانية زائد الدالة الثانية كما هي ضارب مشتقة الدالة الأولى.

مثال :-

1- $y = \mathbf{(3x + 1)(x^2 - 7x)}$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \mathbf{(3x + 1)}(2x - 7) + \mathbf{(x^2 - 7x)}(3)$

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)$

5- مشتقة حاصل قسمة دالتين:

مشتقة حاصل قسمة دلتين يساوي المقام ضارب مشتقة البسط ناقص البسط ضارب مشتقة المقام على المقام تربيع.

$$\frac{\text{المقام} \times \text{البسط مشتقة} - \text{البسط} \times \text{المقام مشتقة}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$y = \frac{4x+2}{3x}$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 3x - 6}{9x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$

6- مشتقة القوس المرفوع لأس:

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله.

مثال :-

1- $y = (15x^2 + 20)^3$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 3\,(15x^2 + 20)^2(30x)$

2- $y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$\rightarrow \frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$

7- المشتقات العليا للدالة:

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$

(المشتقة الاولى) $\rightarrow \frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5$

(المشتقة الثانية) $\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40$

(المشتقة الثالثة) $\rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72$

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1 – المرونة

2 – النهايات العظمى والصغرى

3 – الاستهلاك والادخار

4 – الربح الحدي

مرونة الطلب :-

أ- تعريف مرونة الطلب السعرية:

تعرف مرونة الطلب السعرية على أنها **مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في السعر.**

ب- تعريف مرونة الطلب الداخلية:

تعرف مرونة الطلب الداخلية على أنها **مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل.**

ج - قيس مرونة الطلب:

مرونة الطلب باستخدام التفاضل هي:

$$\text{م} = \text{المشتقة الأولى لدالة الطلبب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

ملاحظة:

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

د- حالات المرونة السعرية (م):

- القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة).
- **القيمة المطلقة للمرونة < واحد (طلب قليل المرونة أو غير مرن).**
- القيمة المطلقة للمرونة = واحد (طلب متكافئ المرونة).
- **القيمة المطلقة للمرونة > واحد (طلب مرن).**
- القيمة المطلقة للمرونة = ما لا نهاية (طلب لا نهائي المرونة).

مثال 1:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 80 - 6x$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 100 وحدة عند سعر يساوي 10 ريال.

الحل:-

- أولا نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب: $\boldsymbol{D' = -6}$
- ثانيا التعويض في القانون: **م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$**

م = (-6) × $\frac{10}{100}$ = -0.6

حيث أن القيمة المطلقة (أي النتائج بقطع النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا الطلب في هذه الحالة **قليل المرونة أو غير مرن.**

مثال 2:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 200 - 10x$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 200 وحدة عند سعر يساوي 20 ريال.

الحل:-

- أولا نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب: $\boldsymbol{D' = -10}$
- ثانيا التعويض في القانون: **م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$**

م = (-10) × $\frac{20}{200}$ = -1

حيث أن القيمة المطلقة (أي النتائج بقطع النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا الطلب في هذه الحالة **متكافئ المرونة.**

مثال 3:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 15x - 20$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 1000 وحدة عند سعر يساوي 100 ريال.

الحل:-

- أولا نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب: $\boldsymbol{D' = 15}$
- ثانيا التعويض في القانون: **م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$**

م = (15) × $\frac{100}{1000}$ = 1.5

حيث أن القيمة المطلقة (أي النتائج بقطع النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا الطلب في هذه الحالة **مرن.**

تمرين واجب :-

مثال 3:-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $D = 1.5x + 20$ أوجد معامل المرونة إذا كانت الكمية المطلوبة 600 وحدة عند سعر يساوي 200 ريال.

النهايات العظمى والصغرى :-

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى:

1- يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة.

2- يتم إيجاد المشتقة الثانية.

3- تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى).

← إذا كانت إشارة المشتقة الثانية **سالبة** فهذا يدل على وجود نهاية **عظمى**.

← إذا كانت إشارة المشتقة الثانية **موجبة** فهذا يدل على وجود نهاية **صغرى**.

مثال 1:-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل

$P= -0.4x^2 + 300x -2000$

حدد إذا ما كانت هذه الدالة تمثل نهاية كبرى أو صغرى ؟

الحل:-

- المشتقة الأولى للدالة:

$$P^{/} = -0.8x + 300$$

- المشتقة الثانية للدالة:

$$P^{//} = -0.8$$

← نجد أن المشتقة الثانية للدالة **سالبة** وبالتالي فهي **تحقق نهاية عظمى.**

مثال 2:-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل

$P= 500-0.2x +0.1x^2$

حدد إذا ما كانت هذه الدالة تمثل نهاية كبرى أو صغرى ؟

الحل:-

- المشتقة الأولى للدالة:

$$P^{/} = -0.2 + 0.2x$$

- المشتقة الثانية للدالة:

$$P^{//} = 0.2$$

← نجد أن المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي **تحقق نهاية صغرى**

رأس مالك علمك ، و عدوك جهلك

المحاضره الثاني عشرة

تابع / التفاضل وتطبيقاته التجارية

الاستهلاك والادخار :-

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك *K* حيث الاستهلاك دالة في الدخل.

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون **موجبة** لكن أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب).

2- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار *S* حيث الادخار دالة في الدخل.

قيمة الميل الحدي للاستهلاك أو للادخار تكون **موجبة** لكن أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب).

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال 1:-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي: $(K = 15 + 0.6x - 0.02x^2)$، المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك والميل الحدي للادخار.

الحل:-

- دالة الاستهلاك الحدي هي المشتقة الأولى للاستهلاك:

$$K' = 0.6 - 0.04x$$

- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي واحد ريال هو:

$$K'(1) = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 - 0.4 = 0.56$$

- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي واحد ريال هو:

= 1 − الميل الحدي للاستهلاك = 1− 0.56 = 0.44

مثال 2:-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي: $(K = 18 + 0.8x - 0.15x^2)$، المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك والميل الحدي للادخار.

الحل:-

- دالة الاستهلاك الحدي هي المشتقة الأولى للاستهلاك:

$$K' = 0.8 - 0.3x$$

- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي واحد ريال هو:

$$K'(1) = 0.8 - 0.3 \times 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

- الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي واحد ريال هو:

= 1 − الميل الحدي للاستهلاك = 1− 0.5 = 0.5

الربح الحدي :-

1- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة.

2- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية.

3- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي.

4- التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية.

5- الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي.

6- الربح الحدي = الإيراد الحدي – التكلفة الحدية.

مثال 1:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية:

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل:-

- دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي:

$$\boldsymbol{R' = 36x^2 + 40x - 10}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذا $x = 10$.

$$\boldsymbol{R' = 36 \times 10^2 + 40 \times 10 - 10 = 3990\ S.R.}$$

مثال 2:-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة الواحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :

$$r = 4x^2 + 6x + 5 \quad (\textit{سعر بيع الوحدة})$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة.

المطلوب:

إيجاد الإيراد الحدي عند بيع وإنتاج 15 وحدة ؟

الحل:-

- دالة الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$$\boldsymbol{R = x \times r = x(4x^2 + 6x + 5) = 4x^3 + 6x^2 + 5x}$$

- دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي:

$$\boldsymbol{R' = 12x^2 + 12x + 5}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدة إذا $x = 15$.

$$\boldsymbol{R' = 12 \times 15^2 + 12 \times 15 + 5 = 2885\ S.R}$$

مثال 3:-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة الواحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :

$$r = 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20 \quad (\textit{سعر بيع الوحدة})$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة.

المطلوب:

إيجاد الإيراد الحدي عند بيع وإنتاج 5 وحدة ؟

الحل:-

- دالة الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$$\boldsymbol{R = x \times r = x(10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x}$$

- دالة الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي:

$$\boldsymbol{R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدة إذا $x = 15$.

$$\boldsymbol{R' = 40 \times 5^3 - 33 \times 5^2 + 10 \times 5 - 20 = 4205\ S.R.}$$

مثال 4:-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ شكل:

$$C = 10x^2 - 12x + 15$$

أوجد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل:-

- دالة التكاليف الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية:

$$\boldsymbol{C' = 20x - 12}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذا $x = 10$.

$$\boldsymbol{C' = 20 \times 10 - 12 = 188\ S.\ R.}$$

مثال 5:-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ شكل:

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^2$$

أوجد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة ؟

الحل:-

- دالة التكاليف الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية:

$$\boldsymbol{C' = 3(5x^2 - 3x + 15)(10x - 3)}$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذا $x = 20$.

$$\boldsymbol{C' = 3 \times (5 \times 20^2 - 3 \times 20 + 15)^2(10 \times 20 - 3) \ = 1155405\ S.\ R}$$

مثال 6:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي:

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب:

اوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة

الحل:-

- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17) \\ &= 2x^3 - 21x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

- دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي:

$$P' = 6x^2 - 42x + 1$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 30 وحدة إذا $x = 30$.

$$P' = 6x^2 - 42x + 1 = 6 \times 30^2 - 42 \times 30 + 1 = 4141\ \text{S.R.}$$

مثال 7:-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي:

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب:

اوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة

الحل:-

- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

$$P = R - C$$
$$= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$$
$$= 12x^3 - 5x^2 - 5x + 80$$

- دالة الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي:

$$P' = 36x^2 - 10x - 5$$

← **حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 30 وحدة إذا** $x = 30$.

$$P' = 36x^2 - 10x - 5 = 36 \times 25^2 - 10 \times 25 - 5 = 22245 \text{ S.R.}$$

تمرين شامل :-

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية والإرادات الكلية وتأخذ هذه الدوال الشكل التالي:

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

المطلوب:

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات.

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة.

3- دالة الربح الكلي.

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات.

الحل:-

1- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات:

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$\Rightarrow R' = 120x^3 + 24x - 6$$

← **حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذا** $x = 10$.

$$R' = 120 \times 10^3 + 24 \times 10 - 6 = 120234 \text{ S.R.}$$

تابع الحل:-

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة:

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$\Rightarrow C' = 39x^2 - 10x + 3$$

← **حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدات إذا $x = 12$.**

$$C' = 39\times12^2 - 10\times12 + 3 = 5499 \text{ S.R.}$$

3- دالة الربح الكلي:

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P &= R - C \\ &= (30x^4 + 12x^2 - 6x + 15) - (13x^3 - 5x^2 + 3x - 20) \\ &= 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35\end{aligned}$$

3- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات:

$$P = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

$$\Rightarrow P' = 120x^3 - 39x^2 + 34x - 9$$

← حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذا $x = 5$.

$$P' = 120\times5^3 - 39\times5^2 + 34\times5 - 9 = 14186 \text{ S.R.}$$

العلم كالأرض، لايمكننا أن نمتلك منه سوى القليل القليل