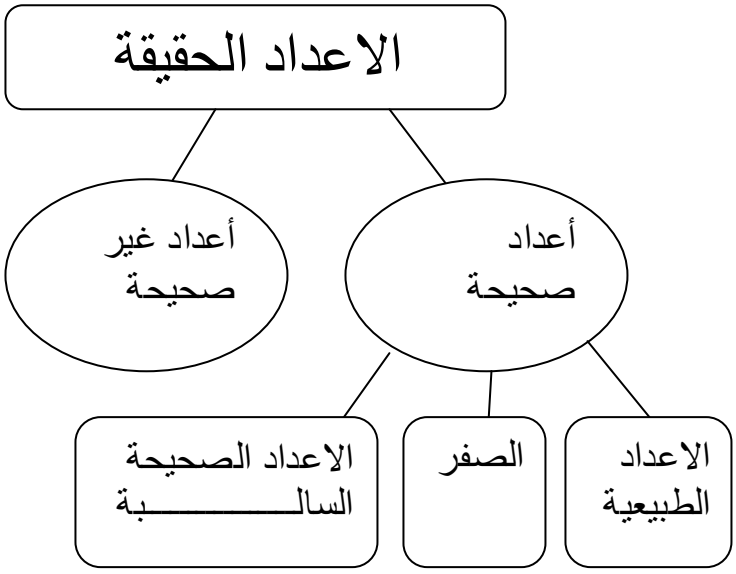
بسم الله الرحمن الرحيم
المحاضرة الإولى

العمليات الجبرية
(عناصر المحاضرة)
الاعداد
القيمة المطلقة
جمع المقادير الجبرية
طرح المقادير الجبرية
(انواع الأعداد)

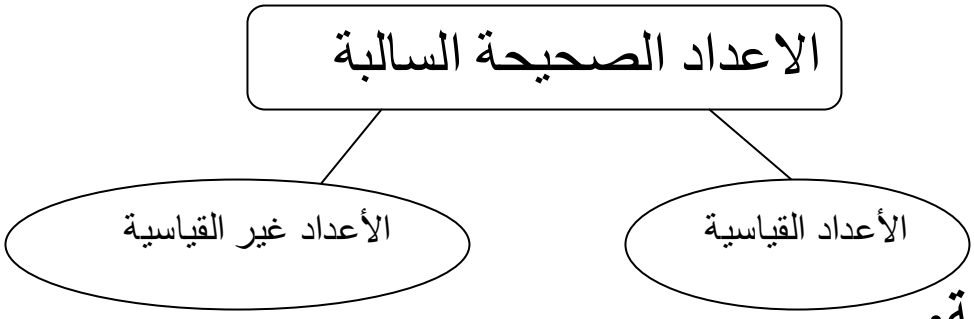


الأعداد الطبيعية:

مثل الأعداد(١و٢و٣و.....) وتسمى الأعداد الصحيحة الموجبة.
ويمثل الرقم (١) وحدة قياس و(٢) هو تكرار وحدة القياس مرتين وهكذا.

الأعداد الصحيحة السالبة:

وهي الأعداد الطبيعية مسبوقة بإشارة سالب.
وهي تعبر عن بعض الظواهر مثل عمليات سحب من رصيدك بالبنك أو السحب من المخزون أو عمليات الصرف.
مثل (-١و-٢و-٣و.....)
عند إضافة الصفر إلى الفئتين السابقتين تنتج الأعداد الصحيحة.



الأعداد غير الصحيحة:

وهي الأعداد القياسية وهي عبارة عن النسبة بين عددين صحيحين ويكون المقام لا يساوي صفر.
مثل ٣/٧ و ٧/-٥ و ١/٩و -٣/٢
وأي عدد لا يمكن كتابته على الصورة القياسية مثل يسمى عدد غير قياسي.

القيمة المطلقة:

القيمة المطلقة لأي عدد هي قيمة العدد بدون النظر إلى الأشارة التي تسبق العدد
هذا يعني أن القيمة المطلقة هي عدد موجب دائما.
ويرمز للقيمة المطلقة للعدد س بـ |س|
أوجد القيمة المطلقة للمقادير التالية :

$$\frac{-٣}{٤} \quad \frac{١}{٩}$$

-٥ و ١١ و و

$$|-٥| = ٥ \qquad |١١| = ١١$$

العمليات الجبرية ::

 # يوجد في الجبر أربع عمليات أساسية وهي
 # الجمع و الطرح والضرب و القسمة

جمع المقادير الجبرية :

لجمع المقادير فأننا نستخدم العلامة (+) لدلالة على عملية الجمع والتي تمثل عملية إضافة مثل :

٢+٥=٧ ١١+٤=١٥ ٢س+٥س=٧س

يشترط لجمع أي مقدران جبريان ان يكونا من نفس النوع

فمثلا :

٢س +٥ص لا يمكن جمعهما و يظل المقدار كما هو.

مثال:

٣أ+٨ب+٩أ+٢ب= ١٢أ+١٠ب

مثال : أوجد ناتج حاصل جمع المقادير التالية:

٧س +٥ص+٩س ص و ٨س + ٢ص

الحل
يمكن ترتيب المقدارن السابقان كما يلي:

٧س	+	٥ص	+	٩ س ص
٨ س	+	٢ص		
١٥س	+	٧ص	+	٩س ص

نلاحظ من المثال السابق أن كلا من س وص تختلف عن س ص لذلك عند الجمع يتم التعامل مع كل مقدار على حدا.

طرح المقادير الجبرية :

لطرح المقادير فأننا نستخدم العلامة(-) لدلالة على عملية الطرح والتي تمثل عملية صرف أو سحب
مثال :
إذ كان لديك عشر ريالات وتم شراء حلويات بست ريالات فأن المتبقي معك يكون أربع ريالات
يمكن التعبير عن ذالك رياضيا كما يلي
١٠-٦ =٤
أي أن المقدار المصروف أو المسحوب نضع أمامه إشارة سالب .
لذلك عند إجراء عملية الطرح يتم تغير إشارة العدد أو المقدار الجبري المراد طرحه ثم نطبق قاعدة الجمع.
مثال: أوجد ناتج ٥س – ٣س؟
٥س – ٣س = ٢س
مثال: أوجد ناتج ٧ص – ١٢ص؟
٧ص – ١٢ص = -٥ص
نلاحظ أن إشارة المقدار الأكبر هي سالبة لذلك عند الطرح نضع الفرق بين المقداران مع إشارة المقدار الأكبر.
مثال: أوجد ناتج جمع المقادير التالية :
٢س + ٧ص و -٢س – ٦ص و ٨س – ٣ص
الحل:

	٢س	+	٧ص	
–	٢س	–	٦ص	
	٨س	–	٣ص	
	٨س	–	٢ص	

نلاحظ أن عند جمع مقداران جبريان متساويان في القيمة ومختلفان في الإشارة فإن حاصل جمعهما يساوي صفر.

مثال:أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:
٢س + ٤ص – ٣ع و -٤س – ٥ع + ٢ص و ٦ع + ٧س – ٨ص
الحل:
نلاحظ أن المقادير الثلاثة السابقة غير مرتبة لذلك فإننا عند جمعها لابد من ترتيبها مع مراعاة كتابة أي مقدار بنفس الإشارة التي هو عليها كما يلي:

	٢س	+	٤ص	–	٣ع
–	٤س	+	٢ص	–	٥ع
+	٧ س	–	٨ص	+	٦ع
	٥س	–	٢ص	–	٢ع

مثال: أوجد ناتج(٤س + ٢ص) – (٢س + ٥ص)
الحل: نلاحظ وجود إشارة سالب أمام القوس الثاني لذلك عند فك القوس لا بد من تغير جميع إشارات المقادير التي بداخل القوس كما يلي
(٤س + ٢ص) –(٢س +٥ص)= ٤س +٢ص – ٢س – ٥ص= ٢س – ٣ص
مثال:
أوجد ناتج (٣س٢ – ٣س + ٢) – (س٢ – ٣س + ١١)
الحل:٣س٢ -٣س + ٢ – س٢ + ٣س – ١١ = ٢س٢ – ٩

مثال: أطرح المقدار ٧س + ٢ص من ٦س + ٥ص
الحل : (٦س + ٥ص) – (٧س + ٢ص)
٦س + ٥ص -٧س – ٢ص = - س + ٣ص
نلاحظ أن المقدار الذي ذكر بعد حرف (من) هو الذي يكتب أولا .
مثال: أطرح المقدار ٧أ٢ – ٥أب + ٨ب٢ من ٣أ٢ +أب – ٥ب٢
الحل :
(٣أ٢ + أب – ٥ب٢) –(٧أ٢ – ٥أب + ٨ب٢)
= ٣أ٢ +أب – ٥ب٢ – ٧أ٢ + ٥أب – ٨ب٢
=-٤أ٢ +٦أب -١٣ب٢

إيجاد قيمة المقادير الجبرية:

ويقصد به عملية التعويض بقيمة المتغيرات الموجودة بالمقدار الجبري لإيجاد قيمة هذا المقدار .
مثال :
إذا كان س = ٢ و ص = ٣ و ع = ٥
أوجد قيمة المقدار ٣س – ٧ص + ٩ع ؟

الحل : ٣س – ٧ص + ٩ع = ٣(٢) – ٧(٣) + ٩(٥) = ٦ -٢١ +٤٥ = ٣٠

مثال: أوجد قيمة المقدار ٣أ – ٤ب + ٦جـ
إذا كان أ=٣ و ب=-٢ وجـ=-١
الحل: ٣(٣) – ٤(-٢) +٦(-١)= ٩+٨- ٦ = ١١

مثال:إذا كان س=-١ و ص=٢ وع=-٣
أوجد قيمة المقدار ٣س ع + ٥س ص – ٢ع ص ؟
الحل ٣(-١)(-٣)+٥(-١)(٢)- ٢(-٣)(٢)= ٩ – ١٠ + ١٢ = ١١

تمارين؟؟

اولا اوجد ناتج العمليات التالية:

(١) ٨- ٦ +٣ = ٥
(٢) -٣ + ٨ – ١١= -٦
(٣) ٥ن + ٧ن –ن= ١١ن
(٤) ٦م + ٣ن – ٧م – ٢ن= -م + ن = ن – م
(٥) ٦أ٢ + ٣أ ب – ٤ب٢ – ٨أ٢ – ٥أ ب – ٥ ب٢ = -٢أ٢ – ٢أب -٩ب٢

ثانيا: أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:

(١) ٥س + ٢ص – ع و ٢س + ٣ص – ع و ٢س – ٥ص + ٧ع
الحل = ٩س + ٥ع

(٢) ٤م – ٥ن + ٦ ك و ١٠ ك – ٣م + ٤ن و ٢ن – ٢م – ك
الحل = -م + ن + ١٥ ك

(٣) ٢ن + ل + م و ٤ن – م و ٧م – ٣ ل
الحل = ٦ن – ٢ل + ٧م

أوجد ناتج العمليات التالية:

(١) أطرح ٩ س – ٢ص من ٥س – ٤ص
الحل= (٥س – ٤ص) – (٩س -٢ص) = ٥س -٤ص -٩س +٢ص
= -٤س – ٢ص

(٢) أطرح ٣أ – ٨ب + جـ من ٤أ – ٦ب + ٢جـ
الحل = ٤أ – ٦ب + ٢جـ - (٣أ – ٨ب + جـ)
= ٤أ – ٦ب + ٢جـ -٣أ +٨ب – جـ
= أ + ٢ب + ج

(٣) (٧م – ٢ن) – (٣م + ٤ن)
الحل = ٧م – ٢ن – ٣م – ٤ن
= ٤م – ٦ن

(٤) (٣ أ – ٧ب) – (٢أ + ٥ب) + (٣أ +٨ب)
الحل = ٣أ – ٧ب – ٢أ – ٥ب + ٣أ + ٨ب
= ٤أ – ٤ب

المحاضرة الثانية

ضرب المقادير الجبرية

عملية الضرب تعرف حسابيا على أنها عدد مرات تكرار الجمع لعدد معين .

فمثلا ٦ + ٦ + ٦ + ٦ + ٦ = ٦ × ٥ = ٣٠

عند ضرب المقادير الجبرية لابد من مراعاة قاعدة الإشارات كما في الجدول التالي:

+	=	+	×	+
−	=	−	×	+
−	=	+	×	−
+	=	−	×	−

أي أنه إذا اتحدت الإشارة تكون الإشارة " + " أما إذا اختلفت الإشارات تكون " _ "

مثال :

٣ x ٧ = ٢١

-٢ x ١١ = -٢٢

-٥ x -٤ = ٢٠

٧س x ٤س= ٢٨ س

٢س x -٥ص = -١٠س ص

مثال: أوجد ناتج ٢ (٤س – ٣ص) + ٣(٧س + ٩ص) – (س – ٤ص)؟

الحل :

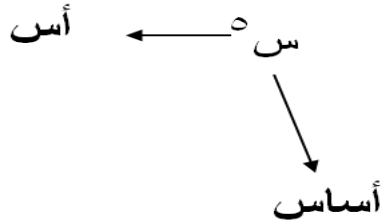
= ٨س – ٦ص +٢١ س + ٢٧ص – س + ٤ص = ٢٨س +٢٥ص

مثال: أوجد ناتج ٢أ (٣ – ٤ب) – ٤ب (٥ – ٣أ)؟

الحل= ٦أ – ٨ أ ب – ٢٠ ب + ١٢ أ ب= ٦أ – ٢٠ ب + ٤أ ب

قاعدة هامة: إذا اتحدت الأساسات فأنه عند الضرب تجمع الأساس

مثال: إذا كان المقدار س٥ فأن



مثال : أوجد ناتج
س٥ x س٣
الحل:
س٥ x س٣ = س٥+٣ = س٨

مثال: أوجد ناتج ص٤ xص-٥ x ص٣؟
الحل
ص٤ x ص-٥ x ص٣ = ص ٤-٥+٣ = ص٢

مثال: أوجد ناتج
$٣^{-٤} \times ٣^{-٢} \times ٣^{٤} = ٣^{-٢}$

قاعدة هامة: أي مقدار أس صفر = ١

مثال : أوجد ناتج
$٢^{-٧} \times ٢^{٥} \times ٢^{٢} = ٢^{\text{صفر}} = ١$

مثال:
أوجد ناتج ٢ س (٥ – ٣ س) + ٣ (٧ س – ١) – ٥ س (٣ – ٤ س) ؟
الحل:
٢ س (٥ – ٣ س) + ٣ (٧ س – ١) – ٥ س (٣ – ٤ س)
= ١٠ س – ٦ س٢ + ٢١ س – ٣ – ١٥ س + ٢٠ س٢
= ١٤ س٢ + ١٦ س – ٣
مثال:
أوجد ناتج
٥ أ (٢ أ + ٤ب) – ٣ (٢أ – ٢ب) + ٣ ب (٣أ – ٤ ب) ؟
الحل:
٥ أ (٢ أ + ٤ب) – ٣ (٢أ – ٢ب) + ٣ ب (٣أ – ٤ ب)
= ١٠ أ^{٢} + ٢٠ أ ب – ٦ أ + ٦ ب + ٩ أ ب – ١٢ ب^{٢}
= ١٠ أ^{٢} + ٢٩ أ ب – ٦ أ + ٦ ب – ١٢ ب^{٢}

مثال:
أوجد ناتج (٢ س – ص) (٣س + ٤ ص) ؟
الحل:
(٢ س – ص) (٣س + ٤ ص)
= ٦ س٢ + ٨ س ص – ٣ س ص – ٤ ص٢
= ٦ س٢ + ٥ س ص – ٤ ص٢
مثال:
أوجد ناتج (٤ أ + ب) (٣ أ -٢ ب) ؟
(٤ أ + ب) (٣ أ -٢ ب)
= ١٢ أ^{٢} – ٨ أ ب + ٣ أ ب – ٢ ب^{٢}
= ١٢ أ^{٢} – ٥ أ ب – ٢ ب^{٢}
مثال:
أوجد ناتج (٤م + ن)^{٢} ؟
الحل:
(٤م + ن)^{٢} = (٤م + ن) (٤م + ن)
= ١٦م^{٢} +٤ م ن + ٤ م ن + ن^{٢}
= ١٦م^{٢} + ٨ م ن + ن^{٢}
فى التمرين السابق كان من الممكن إيجاد الناتج مباشرة بتطبيق القاعدة التالية:
الحل = مربع المقدار الأول + ٢× الأول × الثانى + مربع الثانى
مثال :
أوجد ناتج (٢ س - ص)^{٢} ؟
الحل:
(٢ س – ص)^{٢} = ٤ س^{٢} – ٤ س ص + ص^{٢}
مثال:
أوجد ناتج (٢ س - ص)^{٢} + (٣ س + ص) (٢ س – ص) ؟
الحل:
(٢ س - ص)^{٢} + (٣ س + ص) (٢ س – ص)
= ٤ س^{٢} – ٤ س ص + ص^{٢} + ٦ س^{٢} – ٣ س ص + ٢ س ص - ص^{٢}
= ١٠ س^{٢} – ٥ س ص

تمارين؟؟؟

أوجد ناتج ما يلى:

- ٤ (٧ س + ٢ ص)
  الحل= ٢٨س + ٨ص
- ٣ (٤ أ – ب) - ٢ (أ – ٥ ب) + ٤ (أ + ب)
  الحل= ١٢ أ – ٣ب -٢أ + ١٠ ب +٤ أ + ٤ب
  = ١٤ أ + ١١ ب
- ع^{٤} × ع$^{-٢}$ × ع^{٧} + ص^{٤} × ص$^{-٣}$ × ص^{٧}
  الحل= ع$^{٤-٢+٧}$ + ص$^{٤-٣+٧}$

$= ع^{٩} + ص^{صفر}$

$= ع^{٩} + ١$

- $٣^{-٥} \times ٣^{٤} \times ٢^{-٤} \times ٢^{٥}$

الحل $= ٣^{-٥+٤} \times ٢^{-٤+٥}$

$= ٣^{-١} \times ٢$

$= ٢ \div ٣ = ٠,٦٦٧$

- ٧ أ (٣ + أ) + ٥ (٢ أ – ٨) – ٢ أ (٤ – ٣ أ)

الحل

$= ٢١ أ + ٧ أ^{٢} + ١٠ أ – ٤٠ - ٨ أ + ٦ أ^{٢}$

$= ١٣ أ^{٢} + ٢٣ أ - ٤٠$

اوجد ناتج:

١. (جـ + ٣ د) (٢ جـ - د)

الحل $= ٢ جـ^{٢} - د جـ + ٦ جـ د – ٣ د^{٢}$

$= ٢ جـ^{٢} - ٥ جـ د – ٣ د^{٢}$

٢. $(٢ هـ + ط)^{٢}$

الحل $= (٢ هـ + ط) (٢ هـ + ط)$

$= ٤ هـ^{٢} + ٢ هـ ط + ٢ هـ ط + ط^{٢}$

$= ٤ هـ^{٢} + ٤ هـ ط + ط^{٢}$

حل أخر

= مربع الأول + ٢ * الأول * الثانى + مربع الثانى

$= ٤ هـ^{٢} + ٤ هـ ط + ط^{٢}$

٣. $(٣م – ٢ ن)^{٢}$

الحل = (٣ م – ٢ ن) (٣ م – ٢ ن)

$= ٩ م٢ – ٦ م ن – ٦ م ن + ٤ ن٢$

$= ٩ م٢ – ١٢ م ن + ٤ ن٢$

حل أخر

= مربع الأول + ٢ * الأول * الثانى + مربع الثانى

$= ٩ م٢ – ١٢ م ن + ٤ ن٢$

٤. $(س + ٢ ص)^{٢} + (٢ س - ص)^{٢}$

الحل $= س٢ + ٤ س ص + ٤ ص٢ + ٤ س٢ – ٤س ص + ص٢$

$= ٥ س٢ + ٥ ص٢$

٥. $(أ + ب)^{٢}$ + (٥ أ -٢ ب) (٣ أ - ب)

الحل

$= أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} + ١٥ أ^{٢} – ٥ أ ب – ٦ أ ب + ٢ ب^{٢}$

$= ١٦ أ^{٢} – ٩ أ ب + ٣ ب^{٢}$

المحاضرة الثالثة

قسمة المقادير الجبرية

يقصد بالقسمة هى النسبة بين عددين .

لإجراء عملية القسمة تتبع نفس قاعدة الإشارات المستخدمة فى الضرب كما فى الجدول التالى:

+	=	+	÷	+
−	=	−	÷	+
−	=	+	÷	−
+	=	−	÷	−

أى أنه إذااتحدت الإشارات تكون الإشارة " + " أما إذا اختلفت الإشارات تكون "−"

فمثلاً: ١٥ ÷ ٣ = ٥

ـ ٧٨ ÷ ٢= ـ ٣٩

تذكر أن :

$$\frac{\text{صفر}}{\text{أى مقدار}} = \text{صفر}$$

$$\frac{\text{صفر}}{\text{أى مقدار}} = \infty$$

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \text{كمية غير محدودة}$$

لذلك يشترط لإجراء عملية القسمة أن المقام لا يساوى صفر.

قاعدة هامة:

عند القسمة إذا اتحدت الأساسات تطرح الأسس.

مثال:

$$\frac{\text{س}^{٦}}{\text{س}^{٢}} = \text{س}^{٦-٢} = \text{س}^{٤}$$

$$\frac{\text{ص}^{٤}}{\text{ص}^{٧}} = \text{ص}^{٤-٧} = \text{ص}^{-٣}$$

مثال:

اختصر المقدار الجبرى

$$\frac{١٤\ \text{س}^{٥}\ \text{ص}^{٨}}{٢\ \text{س}^{٢}\ \text{ص}^{٦}}$$

الحل= $٧\ \text{س}^{٥-٢}\ \text{ص}^{٨-٦} = ٧\ \text{س}^{٣}\ \text{ص}^{٢}$

مثال:

اختصر المقدار الجبرى

$$\frac{٧٢\ \text{ع}^{٣}\ \text{ل}^{٩}\ \text{م}^{٥}}{٦\ \text{ع}^{٧}\ \text{ل}^{٣}\ \text{م}^{٥}}$$

$= ١٢\ \text{ع}^{٣-٧}\ \text{ل}^{٩-٣}\ \text{م}^{٥-٥} = ١٢\ \text{ع}^{-٤}\ \text{ل}^{٦}$

لاحظ أن $\text{م}^{\text{صفر}} = ١$

مثال:

اختصر المقدار الجبرى

$$\frac{٥٤\ \text{جـ}^{٦}\ \text{د}^{٨}\ \text{ن}^{٧}}{٢٤\ \text{جـ}^{٧}\ \text{د}^{٤}\ \text{ن}^{٢}}$$

$$= \frac{٩}{٤}\ \text{جـ}^{٦-٧}\ \text{د}^{٨-٤}\ \text{ن}^{٧-٢} = ٢,٢٥\ \text{جـ}^{-١}\ \text{د}^{٤}\ \text{ن}^{٥}$$

إيجاد خارج قسمة مقدار جبري كثير الحدود
على مقدار جبري ذو حد واحد

فى هذه الحالة يتم استخدام القاعدة التالية

س+ ص + ع س ص ع

ن ن ن = ن + ن + ن

أى يتم توزيع المقام على جميع حدود البسط

مثال: أوجد ناتج

$$\frac{٧\ ع^{٣}\ م^{٥} + ٥\ ع^{٢}\ م^{٤}}{ع^{٢}\ م^{٢}}$$

الحل:

$$\frac{٧\ ع^{٣}\ م^{٥} + ٥\ ع^{٢}\ م^{٤}}{ع^{٢}\ م^{٢}} = \frac{٧\ ع^{٣}\ م^{٥}}{ع^{٢}\ م^{٢}} + \frac{٥\ ع^{٢}\ م^{٤}}{ع^{٢}\ م^{٢}}$$

$$= ٧\ ع\ م^{٣} + ٥\ م^{٢}$$

$$\frac{٤\ س^{٤}\ ص^{٢} + ١٢\ س^{٣}\ ص^{٤} - ١٨ س\ ص^{٢}}{٢س\ ص}$$

مثال: أوجد ناتج:

الحل::

$$\frac{٤\ س^{٤}\ ص^{٢}}{٢س\ ص} + \frac{١٢\ س^{٣}\ ص^{٤}}{٢س\ ص} - \frac{١٨س\ ص^{٢}}{٢س\ ص} =$$

$$٢\ س^{٣}\ ص + ٦\ س^{٢}\ ص^{٣} - ٩\ ص$$

المحاضرة الرابعة

تابع قسمة المقادير الجبرية

إيجاد خارج قسمة مقدار جبري كثير الحدودعلى مقدار جبري ذو حد واحد فى هذه الحالة يتم استخدام القاعدة التالية:

$$\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{\text{ن}} = \frac{\text{س}}{\text{ن}} + \frac{\text{ص}}{\text{ن}} + \frac{\text{ع}}{\text{ن}}$$

أى يتم توزيع المقام على جميع حدود البسط

مثال:أوجد ناتج :

$$\frac{٧\ ع^{٣}\ م^{٥} + ٥\ ع^{٢}\ م^{٤}}{ع^{٢}\ م^{٢}} = \frac{٧\ ع^{٣}\ م^{٥}}{ع^{٢}\ م^{٢}} + \frac{٥\ ع^{٢}\ م^{٤}}{ع^{٢}\ م^{٢}}$$

$$= ٥\ م^{٢} + ٧\ ع\ م^{٣}$$

مثال: أوجد ناتج:

$$\frac{٤\ س^{٤}\ ص^{٢} + ١٢\ س^{٣}\ ص^{٤} - ١٨ س\ ص^{٢}}{٢ س\ ص}$$

$$= \frac{٤\ س^{٤}\ ص^{٢}}{٢ س\ ص} + \frac{١٢\ س^{٣}\ ص^{٤}}{٢ س\ ص} - \frac{١٨ س\ ص^{٢}}{٢ س\ ص}$$

$$= ٢ س^{٣}\ ص + ٦ س^{٢}\ ص^{٣} - ٩ ص$$

مثال: أوجد ناتج:

$$\frac{٧\ ع^{٣}\ م^{٥} + ٥\ ع^{٢}\ م^{٤}}{ع^{٢}\ م^{٢}}$$

الحل $= \frac{٧\ ع^{٣}\ م^{٥}}{ع^{٢}\ م^{٢}} + \frac{٥\ ع^{٢}\ م^{٤}}{ع^{٢}\ م^{٢}} = ٧\ ع\ م^{٣} + ٥\ م^{٢}$

مثال: أوجد ناتج :

$$\frac{١٢س^{٤}\ ص^{٣} + ١٨\ س^{٥}\ ص^{٢}}{٦س\ ص}$$

$$= \frac{١٢س^{٤}\ ص^{٣}}{٦س\ ص} + \frac{١٨س^{٥}\ ص^{٢}}{٦س\ ص} = ٢\ س^{٣}\ ص^{٢} + ٣\ س^{٤}\ ص$$

مثال:أوجد ناتج:

$$\frac{س^{٧}\ ص^{٨}\ ع - س^{٨}\ ص^{٦}\ ع^{٣}}{س^{٥}\ ص^{٤}\ ع^{٢}}$$

الحل: $= \frac{س^{٧}\ ص^{٨}\ ع}{س^{٥}\ ص^{٤}\ ع^{٢}} - \frac{س^{٨}\ ص^{٦}\ ع^{٣}}{س^{٥}\ ص^{٤}\ ع^{٢}}$

$$= س^{٢}\ ص^{٤}\ ع^{-١} - س^{٣}\ ص^{٢}\ ع$$

إيجاد خارج قسمة مقدار جبري كثير الحدودعلى مقدار جبري كثير الحدود
فى هذه الحالة يتم إجراء القسمة المطولة كما يتضح من المثال التالي:
إذا كان حاصل ضرب مقدران جبريان هو ٢س٢ – ٩ س ص - ٥ ص٢
وكان أحد المقدران هو س – ٥ ص أوجد المقدار الأخر ؟

الحل:
يتم إجراء عملية القسمة كما يلي

٢ س٢ – ٩ س ص – ٥ ص٢	س – ٥ ص
−٢س٢ ± ١٠ س ص	٢ س + ص
س ص – ٥ ص٢	
– س ص +٥ ص٢	
٠ ٠	

وعلي ذلك يكون المقدار الأخر هو ٢ س + ص

مثال: أوجد ناتج قسمة ٦ن٣– ١٣ ن٢ هـ + ٨ ن هـ٢ - ٣ هـ٣
علي ٢ ن – ٣ هـ ؟
الحل:

٦ن٣– ١٣ ن٢ هـ + ٨ ن هـ٢ - ٣ هـ٣	٢ ن – ٣ هـ
–٦ن٣+ ٩ ن٢ هـ	٣ ن٢ –٢ ن هـ + هـ٣
- ٤ ن٢ هـ + ٨ ن هـ٢	
+ ٤ ن٢ هـ – ٦ ن هـ٢	
٢ ن هـ٢ – ٣ هـ٣	
–٢ ن هـ٢ + ٣ هـ٣	
٠ ٠	

وعلي ذلك يكون الحل هو ٣ ن٢ -٢ ن هـ + هـ٣

مثال:
أوجد قيمة ل التي تجعل المقدار س٣ –٣ س٢ + ٥ س + ل
يقبل القسمة على س٢ - س + ٣ ؟
الحل: حتى يمكن إيجاد قيمة ل لابد من إجراء عملية القسمة المطولة كما يلى:

س٣ –٣ س٢ + ٥ س + ل	س٢ – س + ٣
– س٣ +س٢ –٣ س	س – ٢
–٢ س٢ + ٢ س + ل	
٢ س٢ – ٢ س + ٦	
٠ ٠	

نلاحظ حتى يكون المقدار س٣ –٣ س٢ + ٥ س + ل
يقبل القسمة على س٢ - س + ٣
فلابد أن يكون ل + ٦ = صفر
أي أن ل = -٦

اولاً- أوجد ناتج ما يلي:
(١)

$$\frac{س^{٤}\ ص^{٥} + س^{٤}\ ص^{٣}}{س^{٢}\ ص}$$

الحل $\frac{س^{٤}\ ص^{٥}}{س^{٢}\ ص} + \frac{س^{٤}\ ص^{٣}}{س^{٢}\ ص}$ = س٢ ص٤ + س٢ ص٢

(٢)

$$\frac{س^{٦}\ ص^{٧}\ ع - س^{٧}\ ص^{٥}\ ع^{٣}}{س^{٦}\ ص^{٥}\ ع}$$

الحل $\frac{س^{٦}\ ص^{٧}\ ع}{س^{٦}\ ص^{٥}\ ع} - \frac{س^{٧}\ ص^{٥}\ ع^{٣}}{س^{٦}\ ص^{٥}\ ع} = ص^{٢} - س\ ع^{٢}$

(٣)

$$\frac{أ^{٢}\ ب\ جـ^{٣} - أ^{٣}\ ب^{٢}\ جـ^{٣}}{أ\ ب\ جـ}$$

الحل $\frac{أ^{٢}\ ب\ جـ^{٣}}{أ\ ب\ جـ} - \frac{أ^{٣}\ ب^{٢}\ جـ^{٣}}{أ\ ب\ جـ} = أ\ جـ^{٢} - أ^{٢}\ ب\ جـ^{٢}$

ثانياً- إذا كان حاصل ضرب مقدران جبريان هو٣س٢ +١٤ س ص - ٥ ص٢ وكان أحد المقدران هو س+ ٥ ص أوجد المقدار الأخر ؟

الحل يتم إجراء عملية القسمة كما يلي

٣س٢ +١٤ س ص – ٥ ص٢	س + ٥ ص
–٣س٢ – ١٥ س ص	٣ س – ص
–س ص – ٥ ص٢	
س ص +٥ ص٢	
٠ ٠	

وعلي ذلك يكون المقدار الأخر هو ٣ س - ص

ثالثاً- إذا كان حاصل ضرب مقدران جبريان هو٢أ٢ -٧ أ ب - ٤ ب٢ وكان أحد المقدران هو ٢ أ + ب أوجد المقدار الأخر ؟

٢أ٢ –٧ أ ب – ٤ ب٢	٢ أ + ب
–٢أ٢ – أ ب	أ – ٤ ب
–٨ أ ب – ٤ ب٢	
+٨ أ ب + ٤ ب٢	
٠ ٠	

وعلي ذلك يكون المقدار الأخر هو أ – ٤ ب

رابعاً- أوجد قيمة ع التي تجعل المقدار س٢ +٨ س + ع

يقبل القسمة على س + ٣ ؟

حتى يمكن إيجاد قيمة ع لابد من إجراء عملية القسمة المطولة كما يلى:

س^{٢} +٨ س + ع	س + ٣
−س^{٢} −٣ س	س + ٥
٥ س + ع	
−٥س −١٥	
٠ ٠	

نلاحظ حتى يكون المقدار س٢ +٨ س + ع
يقبل القسمة على س + ٣
فلابد أن يكون ع - ١٥ = صفر أى أن ع = ١٥

المحاضرة الخامسة

تحليل المقادير الجبرية

يقصد بتحليل المقدار الجبري هو إيجاد المكونات الأساسية لهذا المقدار
هناك العديد من الطرق لتحليل المقدار الجبري منها :

- **العامل المشترك**
- **الفرق بين المربعين**
- **الفرق بين المكعبين**
- **مجموع المكعبين**
- **تحليل المقدار الثلاثى**

وهو يعني المقدار الموجود فى جميع عناصر المقدار الجبري
مثال : حلل المقدار ٥ س ص + س٢
الحل:
٥ س ص + س٢ = س (٥ ص + س)

مثال : حلل المقدار ٩ أ ب + ٣ ب جـ
الحل:
٩ أ ب + ٣ ب جـ
= ٣ ب (٣ أ + جـ)

مثال : حلل المقدار ٢ ص^{٢} − ٨ ص + ١٨ ص^{٧}
الحل:
٢ ص^{٢} − ٨ ص + ١٨ ص^{٧}
= ٢ ص (ص − ٤ + ٩ ص^{٦})

مثال: حلل المقدار ٢٤ س^{٣}ص − ١٥ س ص^{٣}
الحل:
٢٤ س^{٣}ص − ١٥ س ص^{٣}
= ٣ س ص (٨ س^{٢} − ٥ ص^{٢})

إذا كان لدينا مقدران مربعان وبينهما اشارة سالب يطلق علي هذا المقدار الفرق بين المربعين مثل س٢ – ص٢

يمكن تحليل الفرق بين المربعين كما يلى

= (الجذر التربيعي للأول – الجذر التربيعي للثانى) (الجذر التربيعي للأول + الجذر التربيعي للثانى)

أى أن

$س^{٢} - ص^{٢} = (س - ص) (س + ص)$

مثال:

حلل المقدار $٢٥ س^{٢} - ص^{٢}$

الحل:

$٢٥س^{٢} - ص^{٢} = (٥س - ص) (٥س + ص)$

مثال : حلل المقدار $٦٤ س^{٣} - ٤ س ص^{٢}$

الحل:

$٦٤ س^{٣} - ٤ س ص^{٢}$

$= ٤ س (١٦ س^{٢} - ص^{٢})$

$= ٤ س (٤ س - ص) (٤ س + ص)$

مثال:

حلل المقدار $٤٨ س^{٢} ص - ٧٥ ص^{٣}$

الحل:

$٤٨ س^{٢} ص - ٧٥ ص^{٣}$

$= ٣ ص (١٦ س^{٢} - ٢٥ ص^{٢})$

$= ٣ ص (٤ س - ٥ ص) (٤ س + ٥ ص)$

حلل المقادير التالية :

١. $س٣ + ٥ س٢ - ٧ س$

$= س (س^{٢} + ٥ س - ٧)$

٢. $٢٥ ع٣ ص٢ + ٧٥ ع٥ ص٧$

$= ٢٥ع^{٣} ص^{٢} (١ + ٣ ع^{٣} ص^{٢})$

٣. $س٣ + ٥ س٢ ع٢$

$= س^{٢} (س + ٥ ع^{٢})$

٤. $٤٨ ع٣ - ٧٥ ص٢ ع$

$= ٣ ع (١٦ ع٢ - ٢٥ ص٢)$

$= ٣ ع (٤ ع - ٥ ص) (٤ ع + ٥ ص)$

٥. $٣ س٢ ص - ٧٥ ص٣$

$= ٣ ص (س ٢ - ٢٥ص٢)$

$= ٣ ص (س - ٥ ص) (س + ٥ ص)$

المحاضرة السادسة

تابع تحليل المقادير الجبرية

ثالثاً- الفرق بين المكعبين

يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما اشارة سالب الفرق بين المكعبين مثل : $س^{٣} - ص^{٣}$ ويمكن تحليل هذا المقدار إلي قوسين

أحدهما صغير والأخر كبير كما يلى

(جذر الأول-جذر الثاني) (مربع الأول +جذرالأول*جذر الثاني+مربع الثاني)

أى أن :

$س^{٣} - ص^{٣} = (س-ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})$

- مثال : حلل المقدار $٨ أ^{٣} - ١٢٥ ب^{٣}$

الحل:

$٨ أ^{٣} - ١٢٥ ب^{٣}$

$= (٢ أ - ٥ ب) (٤ أ^{٢} + ١٠ أ ب + ٢٥ ب^{٢})$

- مثال: حلل المقدار ٢٧ س٣ – ٢١٦ ص٣

الحل:

٢٧ س٣ – ٢١٦ ص٣

= (٣ س – ٦ ص) (٩س٢ +١٨ س ص + ٣٦ ص٢)

= ٣ (س-٢ص) ٩ (س٢ +٢ س ص + ٤ ص٢)

= ٢٧ (س – ٢ ص) (س٢ + ٢ س ص + ٤ص٢)

- حل أخر لتحليل المقدار ٢٧ س٣ – ٢١٦ ص٣

= ٢٧ (س٣ – ٨ ص٣)

= ٢٧ (س – ٢ ص) (س٢ + ٢ س ص + ٤ ص٢)

- مثال: حلل المقدار ١٦٩ س٥ ص – ١٤٤ س ص٥

الحل:

١٦٩ س٥ ص – ١٤٤ س ص٥

= س ص (١٦٩ س٤ – ١٤٤ ص٤)

= س ص (١٣ س٢ – ١٢ ص٢) (١٣ س٢ + ١٢ ص٢)

رابعاً- مجموع المكعبين

- يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما اشارة موجب مجموع المكعبين مثل : $س^{٣} + ص^{٣}$ ويمكن تحليل هذا المقدار إلي قوسين

أحدهما صغير والأخر كبير كما يلى

(جذر الأول+جذر الثاني) (مربع الأول -جذرالأول*جذر الثاني+مربع الثاني)

أى أن :
$س^{٣} + ص^{٣} = (س+ص)(س^{٢} - س ص + ص^{٢})$

مثال: حلل المقدار $٦٤ أ^{٣} + ١٢٥ ب^{٣}$
الحل:
$٦٤ أ^{٣} + ١٢٥ ب^{٣}$
$= (٤ أ + ٥ب)(١٦ أ^{٢} - ٢٠ أ ب + ٢٥ ب^{٢})$

- مثال:

حلل المقدار $٢٤ ب جـ^{٤} + ٨١ ب^{٤} جـ$
الحل:
$٢٤ ب جـ^{٤} + ٨١ ب^{٤} جـ$
$= ٣ ب جـ (٨ جـ^{٣} + ٢٧ ب^{٣})$
$= ٣ ب جـ (٢ جـ + ٣ ب)(٤جـ^{٢} - ٦ ب جـ + ٩ ب^{٢})$

حلل المقادير التالية :

١ - $٢٧ أ^{٣} - س^{٣}$
$= (٣ أ - س)(٩أ + ٣ أ س + س^{٢})$

٢ - $٧٢ حـ^{٥} د^{٣} - ٢٤٢ جـ^{٣} د^{٥}$
$= ٢ جـ^{٣} د^{٣} (٣٦ جـ^{٢} - ١٢١ د^{٢})$
$= جـ^{٣} د^{٣} (٦ جـ - ١١ د)(٦جـ + ١١ د)$

٣ - $س^{٣} - ٦٤$
$= (س - ٤)(س^{٢} + ٤ س + ١٦)$

٤ - $١٢٥ + ٨ ع^{٣}$
$= (٥ + ٢ع)(٢٥ - ١٠ ع + ٤ ع^{٢})$

٥ - $٢٥٠ س^{٢} ص^{٥} + ٢ س^{٥} ص^{٢}$
$= ٢ س^{٢} ص^{٢} (١٢٥ ص٣ + س٣)$
$= ٢س^{٢} ص^{٢} (٥ص + س)(٢٥ ص^{٢} - ٥س ص + س^{٢})$

المحاضرة السابعة

تابع تحليل المقادير الجبرية

خامساً- تحليل المقدار الثلاثى

يقصد بالمقدار الثلاثى الذى يكون علي الشكل التالي:

$$أ\ س^{٢} + ب\ س + جـ$$

ويتم تحليل المقدار الثلاثى إلى قوسين إلا أن تحليل المقدار الثلاثى يتوقف علي إشارة الحد الثالث أى هل هى موجبة أم سالبة ؟

وبالتالى نكون أمام حالتين وهما:

١- أشارة الحد الثالث موجبة

٢- أشارة الحد الثالث سالبة

أشارة الحد الثالث موجبة

في هذه الحالة يتم تحليل المقدار الثالث إلى مقدران يكون:

١- حاصل ضربهما = الحد الثالث

٢- أشارتهما متشابهة نفس أشارة الحد الأوسط

٣- مجموع حاصل ضرب الطرفين = الحد الأوسط

مثال: حلل المقدار س٢ + ٥ س +٦

الحل:

س٢ + ٥ س +٦

= (س+٢) (س+ ٣)

نلاحظ أننا بحثنا عن عددان حاصل ضربهما ٦ ومجموعهما ٥

كما أن الاشارات متشابهة نفس أشارة الحد الاوسط موجب

مثال: حلل المقدار ص٢ – ١٠ ص + ٢١

الحل:

ص٢ – ١٠ ص + ٢١

= (ص – ٣) (ص- ٧)

نلاحظ أننا نبحث عن عددان حاصل ضربهما ٢١ ومجموعهما ١٠

كما أن الاشارات متشابهة نفس اشارة الحد الاوسط سالب

مثال: حلل المقدار ع٢ -٩ ع +٢٠

الحل:

ع٢ -٩ ع + ٢٠

= (ع -٥) (ع -٤)

نلاحظ أننا نبحث عن عددان حاصل ضربهما ٢٠ ومجموعهما ٩

كما أن الاشارات متشابهة نفس اشارة الحد الاوسط سالب

مثال: حلل المقدار م٢ -١٣ م + ٤٢
الحل:
م٢ -١٣ م + ٤٢
= (م - ٦) (م -٧)
نلاحظ أننا نبحث عن عددان حاصل ضربهما ٤٢ ومجموعهما ١٣
كما أن الاشارات متشابهة نفس اشارة الحد الاوسط سالب

أشارة الحد الثالث سالب

في هذه الحالة يتم تحليل المقدار الثالث إلى مقدران يكون:
١- حاصل ضربهما = الحد الثالث
٢- أشارتهما مختلفة اى احدهما موجب والاخرى سالب وأشارة الاكبر نفس اشارة الحد الأوسط
٣- الفرق حاصل ضرب الطرفين = الحد الأوسط

مثال: حلل المقدار س٢ – س – ١٢
الحل:
س٢ - س – ١٢
= (س -٤) (س + ٣)
نلاحظ أننا نبحث عن عددان حاصل ضربهما ١٢ والفرق بينهما ١
كما أن الاشارات مختلفة والعدد الاكبر سالب مثل الأوسط والأخر موجب

مثال: حلل المقدار س٢ + ٢ س - ٣٥
الحل:
س٢ +٢ س – ٣٥
= (س +٧) (س- ٥)
نلاحظ أننا نبحث عن عددان حاصل ضربهما ٣٥ والفرق بينهما ٢
كما أن الاشارات مختلفة والعدد الاكبر موجب مثل الأوسط والأخر سالب

مثال: حلل المقدار $س^{٣} + س^{٢}$ -٤٢ س
الحل :
$س^{٣} + س^{٢}$ -٤٢ س = س ($س^{٢}$ + س -٤٢)
= س (س + ٧) (س-٦)
نلاحظ أننا أخذنا س عامل مشترك اولاً ثم
نبحث عن عددان حاصل ضربهما ٤٢ والفرق بينهما ١
كما أن الاشارات مختلفة والعدد الاكبر موجب مثل الأوسط والأخر سالب

حلل المقادير التالية:

١- ٢ س٢ + ١٣ س + ١٥

= (٢ س + ٣) (س + ٥)

٢- س٢ + ١١ س + ٢٤

= (س + ٣) (س+ ٨)

٣- ٦ س٢ – س – ١٥

= (٢ س + ٣) (٣ س - ٥)

٤- ٢ أ^{٣} + أ^{٢} -١٥ أ

= أ (٢أ^{٢} + أ – ١٥)

= أ (٢ أ – ٥) (أ + ٣)

٥- ص٢ +١٢ ص +٣٥

= (ص + ٥) (ص+ ٧)

٦- ع٢ – ٤ ع -١٢

= (ع – ٦) (ع + ٢)

الأسس

سبق وان درسنا قاعدة هامة:

١- إذا اتحدت الأساسات فأنة عند الضرب تجمع الأسس

٢- عند القسمة إذا اتحدت الأساسات تطرح الأسس.

مثال: أختصر المقدار التالى:

$$\frac{ع^{٥}\ ن^{٣}\ ع^{٤}}{ن^{٢}\ ع^{٢}\ ن^{٣}} \quad \frac{ع^{٩}\ ن^{٣}}{ع^{٢}\ ن^{٥}} = ع^{٧}\ ن^{-٢}$$

قاعدة هامة :

$(س^{م})^{ن} = س^{م X ن}$

مثال : $(٢^{٣})^{٥} = ٢^{١٥}$

مثال: اختصر

$$(س٥)^{-١} = س^{-٥} = \frac{١}{س٥}$$

مثال: اختصر المقدار $\left(\frac{٢\ أ\ ب^{٣}}{٣\ ب\ أ^{٢}} \right)^{٣}$

الحل=

$$\frac{٣٢\ أ^{٣}\ ب^{٩}}{٣٣\ ب^{٣}\ أ^{٦}} = \frac{٨\ أ^{٣}\ ب^{٩}}{٢٧\ ب^{٣}\ أ^{٦}}$$

$$= \frac{٨}{٢٧}\ أ^{٣-٦}\ ب^{٩-٣} = \frac{٨}{٢٧} أ^{-٣}\ ب^{٦}$$

مثال: اختصر المقدار $\sqrt[٣]{٢٧\ س^{٩}}$

الحل= ٣ س

مثال: اختصر المقدار:

$$= ٥\ م\ ن^{-١}$$

$$\sqrt[٣]{\frac{٧٥\ م^{٣}\ ن}{٣\ م\ ن^{٣}}}$$

اختصر المقادير التالية #١# $\left(\frac{٢\ س\ ص}{٥\ س\ ص^{٢}}\right)^{٢} = ٤/ ٢٥\ ص^{-١}$

#٢# $\sqrt[٣]{٦٤\ ص^{٦-٩}} = \sqrt[٣]{٤\ ص^{٢}\ ع^{-٣}}$

#٣#

$$\frac{٢٥\ ل^{٧}\ م^{٢}}{٥\ ل^{٢}\ م} = ٥\ ل^{٥}\ م$$

#٤#

$$\sqrt[٣]{\frac{١٢٨\ س^{٥}\ ص^{٧}}{٢\ س^{-١}\ ص}} = ٤س^{٢}ص^{٢}$$

المحاضرة الثامنة

هي قوة الأس المرفوع لأساس معين
$١٠٠٠ = ١٠^{٣}$ لذلك يكون
$\text{لـو}_{١٠} ١٠٠٠ = ٣$

وكذلك $٣٢ = ٢^{٥}$
$\text{لـو}_{٢} ٣٢ = ٥$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\text{لـو}_{أ} ١٢٥ = ٣$

الحل: $أ^{٣} = ١٢٥ = ٥^{٣}$

مثال
أوجد قيمة المجهول اذا كان $\text{لـو}_{٢} س = ٧$

الحل:
$س = ٢^{٧} = ١٢٨$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\text{لـو}_{س} ٦٤ = ٢$

الحل :
$٦٤ = س^{٢}$
$٨^{٢} = س^{٢}$
$٨ = س$

مثال
أوجد قيمة المجهول اذا كان $\text{لـو}_{٣٢} س = \text{!}٥$

الحل: $\text{!}٥$
$س = ٣٢ = ٢$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\text{لـو}_{أ} ٢٥٦ = ٤$

الحل:
$٢٥٦ = أ^{٤}$
$أ = (٢٥٦)^{١/٤}$
$أ = ٤$

تمارين

أوجد قيمة المجهول فيما يلى :

١ -لو ٩ = ل
٣

الحل ٩ = ٣^ل
٣^٢ = ٣^ل
٢ = ل

٢ -لو ٨١ = ٢
أ

الحل ٨١ = أ^٢
٩^٢ = أ^٢
٩ = أ

٣ -لو ١٢٥ = ل
٥

١٢٥ = ٥^ل
٥^٣ = ٥^ل
٣ = ل

٤ -لو س = #؛٢
٤٩

س = ٤٩ ^(٢/٣) = ٢٤٣

٥ -لو س = #؛٤
٨١

س = ٨١ (٤/٣) = ٢٧

٦ -لو س = !؛٢
١٢١

س = ١٢١ ^(٢/١) = ١١

٧- لو ١٢٥ = ل
٦٢٥

١٢٥ = ٦٢٥^ل
٥^٣ = ٥^٤ل
٣ = ٤ل

ل= ٣/ ٤ = ٠,٧٥

قوانين اللوغاريتمات

- لـوس^{ن} = ن لـو س

مثال:

لو ٥^{٤} = ٤ لو٥

لو ٨ = لو ٢^{٣} = ٣ لو٢

- لـو (س x ص) = لـو س + لـو ص

مثال:

لـو ٢٠ = لو (٤ x ٥) = لـو ٤ + لـو ٥

لـو ٤٢ = لـو (٦x٧) = لـو ٧ + لـو٦

- لـو (س / ص) = لـو س –لـو ص

مثال:

لـو (٣٥ / ٢) = لـو ٣٥ –لـو ٢

= لـو (٥x ٧) –لـو ٢

= لـو ٥ + لـو ٧ –لـو ٢

- هام جداً:

لـو أ = ١

أ

لـو ٥ = ١ لـو ٧ = ١ لـو ١٠=١

٥ ٧

إذا لم يكتب الأساس تحت اللوغاريتم يكون ١٠

- مثال:

أوجد قيمة المقدار

لو ٢ -لو١٠ + لو٥ + ٢ لـو [**٠خ١/** –لو ١٦ + لـو ٤^{٢}

= لـو ٢ – ١ + لـو ٥ + ٢ x (٢/١) لـو ١٠ –لو٤^{٢} + لـو ٤^{٢}

= لـو٢ -١ + لو٥ + لـو ١٠

= لـو ٢ – ١ + لـو ٥ + ١ = لـو ٢ + لـو ٥ = لـو (٥x٢)

= لـو ١٠ = ١

- مثال:

أوجد قيمة المقدار

لو ١٢٥ + لـو ٦٤ -٣ لو ٢٠ + لـو ٤٩

٧ ٧ ٧ ٧

= لـو ٥^{٣} + لـو ٤^{٣} -٣ (لـو ٥ + لـو ٤) + لـو ٧^{٢}

٧ ٧ ٧ ٧

= ٣لـو ٥ + ٣لـو ٤ -٣ لـو ٥ -٣ لـو ٤ + ٢ لـو ٧

٧ ٧ ٧ ٧ ٧

= ٢

مثال: أوجد قيمة المقدار

$$\frac{1}{2} \text{لـو}_{5} ٦٢٥ - \text{لـو}_{5} ٣٥ + \text{لـو}_{5} ١٤ - \text{لـو}_{5} ١٠$$

$$= \frac{1}{2} \text{لو}_{5}^{4} - \text{لو}_{5} (٧ \times ٥^{2}) + \text{لو}_{5} (٧ \times ٢) - \text{لـو}_{5} (٢ \times ٥)$$

$$= ٢\text{لـو}_{5} - \text{لـو}_{5} ٧ - \text{لـو}_{5} ٥ + \text{لو}_{5} ٧ + \text{لو}_{5} ٢ - \text{لـو}_{5} ٥ - \text{لـو}_{5} ٢$$

= ٢ -١ -١ = صفر

المحاضرة التاسعة

التباديل والتوافيق

التباديل

- وهى تشير إلى عدد طرق ترتيب الأشياء. ويمز لها بالرمز $ل^{ن}_{ر}$

فأذا كان لدينا ن من الأشياء نريد ترتيبها ر من الترتيبات فأن عدد طرق الترتيب هى $ل^{ن}_{ر}$.

$$ل^{ن}_{ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)!}$$

$$ل^{ن}_{ر} = ن (ن-١) (ن -٢) ..... (ن-ر+١)$$

- مثال: اوجد قيمة $ل^{٥}_{٢}$

$$ل^{٥}_{٢} = ٥ \times ٤ = ٢٠$$

مثال: أوجد قيمة $ل^{٦}_{٣}$

$$ل^{٦}_{٣} = ٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$$

- لاحظ أن $ل^{ن}_{ن} = ن!$

أى أن $ل^{ن}_{٣} = ٣! = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$

كما أن $ل^{٣}_{٥} = ٥! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠$

- مثال أختار الإجابة الصحيحة:

قيمة $ل^{٦}_{٢}$ هى

(أ) ١٢ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٦ (د)١٥

الحل:

$ل^{٦}_{٢} = ٥ \times ٦ = ٣٠$

الإجابة هي (ب)

- مثال أختار الإجابة الصحيحة:

قيمة $ل^{٦}_{٦}$ هى

(أ)٣٦ (ب)٢٦ (ج)٦! (د)٢٥٦

الحل

$ل^{٦}_{٦} = ٦ ! = ٧٢٠$

الإجابة هى جـ

مثال: أتفقت ٦ فرق رياضية على تكوين دورى خاص بها احسب عدد المباريات التى يتم لعبها؟

الحل:

عدد المباريات = $ل^{٦}_{٢} = ٦ \times ٥ = ٣٠$ مباراة

- مثال:
- بكم طريقة يمكن جلوس ٤ اشخاص على ٥ كراسى ؟

الحل:

عدد الطرق = $ل^{٥}_{٤} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ = ١٢٠$ طريقة

التوافيق

- وتشير إلى عدد طرق الاختيار. ويرمز لها بالرمز ق

فأذا كان لدينا ن من الأشياء ونريد أن نختار منها عدد ر فأن عدد طرق الاختيار هى ق . حيث أن

$ق^{ن}_{ر} = \frac{ل^{ن}_{ر}}{} = \frac{ن (ن-١) (ن-٢) .... (ن-ر+١)}{}$

ر ر! ر (ر-١) (ر-٢) ... ٣x ٢x١

٥

- مثال أوجد قيمة ق ؟

٥ ٢

ق = ٥ x ٤ = ١٠ طرق

٢ ٢ ١x

٧

- مثال أوجد قيمة ق ؟

٤

الحل:

٧

ق= ٧ x٦ x٥ x ٤ = ٣٥ طريقة

٤ ٤ ٣x ٢x ١

هام جداً

ن

ق =١

ن ٦ ٨ ١٢

أى أن ق = ١ ق = ١ ق= ١

١٢ ٨ ٦ ن

ق = ١

٠ ٤ ٧ ٩

أى أن ق =١ ق =١ ق= ١

٠ ٠ ٠

ق = ن

٥ ٧ ١١

أى أن ق = ٥ ق= ٧ ق=١١

١ ١ ١

مثال:

إدارة بها ١٢ موظف نريد أن نختار منهم ٣ لتكوين لجنة أحسب عدد طرق الاختيار؟

الحل:

١٢

عدد طرق الاختيار = ق = ١٢ x ١١ x ١٠ = ٢٢٠ طريقة

٣ ٣ ١ x٢ x ١

- مثال: بفرض فى المثال السابق إذا نص على أن مدير الأدارة لابد من اختياره أحسب عدد طرق الاختيار ؟

الحل: ١١

عدد طرق الاختيار = ق = ١١ = ١٠x ٥٥ طريقة

١X٢ ٢

تمارين

اولاً- أوجد قيمة ما يلى

١ - لـو ١٦ – **!٢٤** لـو ٢٥٦ + لـو ١٠ – لـو ١٠٠

= لـو ٤^{٢} - (½) لـو ٤^{٤} + ١ – لـو ١٠^{٢}

= ٢ لـو ٤ – ٢ لـو ٤ + ١ – ٢ = -١

٢ - $\frac{٣}{٢}$ لـو ٢٥٦ + لـو ١٠٢٤ - ٨ لـو ١٦

٢ ٢ ٢

= (٢/٣) لـو **٢**^{٨} + لـو ٢^{١٠} - ٨ لـو ٢^{٤}

٢ ٢ ٢

= ١٢ لـو ٢ + ١٠ لـو ٢ – ٣٢ لـو ٢

٢ ٢ ٢

= ١٢ + ١٠ – ٣٢ = - ١٠

ثانياً- أوجد قيمة

٨ ٥ ٧ ٤

ل =٨X٧=٥٦ ل= ٦٠ ل = ٨٤٠ ٣!=٦ ل =٤!=٢٤

٨ ٢ ٩ ٧ ٣ ٦ ٤ ٦ ٤ ٩

ق=٢٨ ق=٨٤ ق =٣٥ ق =١ ق =١ ق=٩

٢ ٣ ٤ ٦ ٠ ٠

ثالثاً-

١ -اتفقت ١٠ فرق رياضية على تكوين دورى فيما بينها أوجد عدد المباريات التى ١٠

يمكن لعبها؟ = ل=١٠ X ٩ = ٩٠ مباراة

٢

٢- إدارة بها ١٥ موظف نريد تكوين منهم لجنة مكونه من ثلاثة اوجد عدد طرق

١٥

الاختيار ؟ = ق = ٤٥٥ طريقة

٣

٣-فى السؤال السابق إذا كان لابد من وجود مدير الإدارة ضمن أعضاء اللجنة

١٤

أحسب عدد طرق الاختيار ؟ = ق = ٩١ طريقة

٢

المحاضرة العاشرة

نظرية ذات الحدين

الحد العام لنظرية ذات الحدين هو

$ح_{ر+1} = ق^{ن}_{ر}$ (الحد الثانى) ^{ر} (الحد الأول) $^{ن-ر}$

دائماً ر أقل من رتبة الحد بمقدار واحد

مثال

أوجد الحد الخامس فى مفكوك $(س + ٣)^{٩}$ ؟

الحل

$ح_{ر+1} = ق^{ن}_{ر}$ (الحد الثانى) ^{ر} (الحد الأول) $^{ن-ر}$

نجد أننا نريد $ح_{٥}$ لذلك ر= ٤ ن= ٩

$ح_{٥} = ق^{٩}_{٤} (٣)^{٤} (س)^{٥} = ١٢٦ x ٨١ س^{٥} = ١٠٢٠٦ س^{٥}$

أوجد الحد الرابع فى مفكوك $(٢ س - ٥ ص)^{٧}$ ؟

الحل

$ح_{ر+1} = ق^{ن}_{ر}$ (الحد الثانى) ^{ر} (الحد الأول) $^{ن-ر}$

نجد أننا نريد $ح_{٤}$ لذلك ر= ٣ ن= ٧

$ح_{٤} = ق^{٧}_{٣} (٢س)^{٣} (-٥ ص)^{٤} = ٣٥ x ٨ س^{٣} x ٦٢٥ ص^{٤}$

$= ١٧٥٠٠٠ س^{٣} ص^{٤}$

الحد الأوسط

يتوقف الحد الأوسط على الأس اذا كان فردى أو زوجى:

الأس زوجى يكون رتبة الحد الأوسط = (ن+٢)/٢

أما اذا كان لدينا الأس فردى يوجد حدان أوسطان رتبتهما هى

(ن+١)/٢ و (ن+٣) /٢

مثال: أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(س - ٢)^{١٠}$

الحل
رتبة الحد الوسط هى (١٠ +٢)/٢ = ٦
نجد أننا نريد ح٦ لذلك ر= ٥ ن= ١٠

$$ح_{٦} = ق^{١٠}_{٥} (-٢)^{٥} (س)^{٥} = ٢٥٢ \times -٣٢ س^{٥}$$

$$= - ٨٠٦٤ س^{٥}$$

الحد الخالى من س

أوجد الحد الخالي من س فى مفكوك $(س - \frac{٤}{س})^{١٢}$ ؟

الحل

$$ح_{ر+١} = ق^{١٢}_{ر} (-\frac{٤}{س})^{ر} (س)^{١٢-ر}$$

$$= ق^{١٢}_{ر} (-٤)^{ر} س^{-ر} (س)^{١٢-ر} = ق^{٩}_{ر} (-١)^{ر} س^{١٢-٢ر}$$

بما أننا نريد الحد الخالي من س لذلك نضع ١٢-٢ر = صفر

١٢ – ٢ر =صفر
١٢ = ٢ر
ر= ٦
أى هو الحد السابع

الحد الذى يحتوى على س٤

أوجد الحد الذى يحتوى على س٤ فى مفكوك $(س - \frac{٤}{س})^{١٢}$ ؟

الحل

$$ح_{ر+١} = ق^{١٢}_{ر} (-\frac{٤}{س})^{ر} (س)^{١٢-ر}$$

$$= ق^{١٢}_{ر} (-٤)^{ر} س^{-ر} (س)^{١٢-ر} = ق^{٩}_{ر} (-١)^{ر} س^{١٢-٢ر}$$

بما أننا نريد الحد الذى يحتوى على من س٤
لذلك نضع ١٢-٢ر = ٤

١٢ – ٢ر =٤
١٢-٤ = ٢ر
٢ر= ٨
ر= ٤
أى هو الحد الخامس

تمارين

أوجد الحد السادس فى مفكوك (س +٤)^{١٢} ؟

الحل

$ح_{ر+1} = ق_{ر}^{ن} (\text{الحد الثانى})^{ر} (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$

نجد أننا نريد $ح_{٦}$ لذلك ر= ٥ ن= ١٢

$ح_{٦} = ق_{٥}^{١٢} (٤)^{٥} (س)^{٧} = ٧٩٢ \times ١٠٢٤ س^{٧}$

$= ٨١١٠٠٨ س^{٧}$

أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(٥س + ص)^{٨}$ ؟

الحل

رتبة الحد الأوسط = (ن+٢)/ ٢ = (٨+٢)/٢= ٥

$ح_{ر+1} = ق_{ر}^{ن} (\text{الحد الثانى})^{ر} (\text{الحد الأول})^{ن-ر}$

نجد أننا نريد $ح_{٥}$ لذلك ر= ٤ ن= ٨

$ح_{٥} = ق_{٥}^{٨} (ص)^{٤} (٥س)^{٤} = ٧٠ ص^{٤} \times ٦٢٥ س^{٤}$

$= ٤٣٧٥٠ ص^{٤} س^{٤}$

أوجد الحد الخالي من س فى مفكوك $(س^{٢} - \frac{١}{س})^{٩}$ ؟

الحل

$ح_{ر+1} = ق_{ر}^{٩} (-\frac{١}{س})^{ر} (س^{٢})^{٩-ر}$

$= ق_{ر}^{٩} (-١)^{ر} س^{-ر} (٥س)^{١٨-٢ر} = ق_{ر}^{٩} (-١)^{ر} س^{١٨-٣ر}$

بما أننا نريد الحد الخالي من س لذلك نضع ١٨-٣ر = صفر

١٨ – ٣ر =صفر

١٨ = ٣ر

ر= ٦

أى هو الحد السابع

أوجد الحد الذى يحتوى على $س^{٣}$ فى مفكوك $(س^{٢} - \frac{١}{س})^{٩}$ ؟

الحل

من التمرين السابق وجدنا أن الحد العام هو

$ح_{ر+1} = ق_{ر}^{٩} (-\frac{١}{س})^{ر} (س^{٢})^{٩-ر}$

$= ق_{ر} (-١)^{ر} س^{ر} (٥س)^{١٨-٢ر} = ق_{ر} (-١) ر س^{١٨-٣ر}$

بما أننا نريد الذى يحتوى على $س^{٣}$ لذلك نضع $ق_{ر}$ ١٨-٣ر = ٣

١٨ – ٣ر =٣

١٨ -٣ = ٣ر

١٥ = ٣ ر

ر= ٥

أى هو الحد السادس

المحاضرة الحادية عشر

حل المعادلات

سنتعرض أن شاء الله إلى حل المعادلات:

اولاً– المعادلات الخطية فى مجهول واحد

ثانياً– المعادلات الخطية في مجهولين

ثالثاً– المعادلات من الدرجة الثانية في مجهول واحد

اولاً– المعادلات الخطية فى مجهول واحد

مثال:

حل المعادلة التالية ٥س = ٢ س + ١٢ ؟

الحل

٥ س – ٢ س = ١٢

٣ س = ١٢

س = ٤

مثال حل المعادلة التالية ٤ س + ٥ = س –٣ ؟

الحل:

٤ س –س = –٣ –٥

٣ س = –٨

س= –٨/ ٣ = – ٢,٦٧

مثال حل المعادلة التالية

٢ (ص + ٢) + ٥ (٣ص − ٧) = ٥ (٣ ص − ١١) +١٢

الحل:

يتم فك الأقواس اولاً كما يلى

٢ص + ٤ + ١٥ ص − ٣٥ = ١٥ ص − ٥٥ + ١٢

٢ص + ١٥ ص − ١٥ ص = −٥٥ + ١٢ −٤ + ٣٥

٢ص = − ١٢

ص = − ٦

مثال : حل المعادلة التالية

$$\frac{٣ س + ١}{٥} = \frac{٢ س − ١}{٣}$$

الحل: في هذه الحاله حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أى أن ٣ (٣س + ١) = ٥ (٢ س − ١)

٩س + ٣ = ١٠ س − ٥

٩س − ١٠ س = −٥ −٣

− س = −٨

س= ٨

مثال: حل المعادلة التالية

$$\frac{٥س − ١}{٣} + \frac{٤ س −٧}{٢} = \frac{٩س − ١١}{٧}$$

الحل: في هذه الحالة لابد من توحيد المقامات اولاً للطرف الأيمن

$$\frac{٢ (٥س−١) + ٣ (٤س −٧)}{٦} = \frac{٩س −١١}{٧}$$

$$\frac{١٠س −٢ + ١٢ س − ٢١}{٦} = \frac{٩س−١١}{٧}$$

$$\frac{٢٢س − ٢٣}{٦} = \frac{٩س −١١}{٧}$$

ثم حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٧ (٢٢س – ٢٣) = ٦ (٩س – ١١)

١٥٤س – ١٦١= ٥٤س –٦٦

١٥٤ س – ٥٤س = ١٦١–٦٦

١٠٠س = ٩٥

س = ٠,٩٥

ثانياً– حل المعادلات الخطية فى مجهولين

مثال حل المعادلات التالية :

٥س + ٢ ص = ١٢ ١ ←

٧س – ٣ ص =١١ ٢ ←

الحل : يتم ضرب المعادلة (١) X ٧ والمعادلة (٢) X ٥ لتكون

٣٥س + ١٤ص = ٨٤

٣٥ س – ١٥ ص= ٥٥ وبطرح المعادلتين ينتج

٢٩ ص = ٢٩

ص=١

وبالتعويض فى معادلة (١) عن قيمة ص =١ ينتج أن

٥ س + ٢ ص = ١٢

٥ س + ٢ (١) =١٢

٥ س +٢ = ١٢

٥ س = ١٢ –٢

٥ س = ١٠

س = ٢

أى أن الحل هو س = ٢ و ص =١

مثال حل المعادلات التالية :

٣س – ٥ ص = ٨ ١ ←

٨س + ٢ ص = ٦ ٢ ←

الحل : يتم ضرب المعادلة (١) X ٨ والمعادلة (٢) X ٣ لتكون

٢٤س – ٤٠ص = ٦٤

٢٤س + ٦ ص= ١٨ وبطرح المعادلتين ينتج

-٤٦ ص = ٤٦

ص= -١

وبالتعويض فى معادلة (١) عن قيمة ص = -١ ينتج أن

٣ س – ٥ ص = ٨

٣ س – ٥ (– ١) = ٨

٣ س + ٥ = ٨

٣ س = ٨ – ٥

٣ س = ٣

س = ١

أى أن الحل هو س = ١ و ص = -١

تمارين

١- حل المعادلة التالية ٩ص – ٣ = ٤ص + ٧؟

الحل:

٩ص – ٣ = ٤ص + ٧

٩ص – ٤ص = ٧+٣

٥ص = ١٠

ص= ٢

حل المعادلة التالية

٢- ٣ (س–٥) + ٢ (س+٢) = ٤ (س–١) + ١٥

الحل:

يتم فك الأقواس اولاً كما يلى

٣س – ١٥ + ٢س + ٤ = ٤س –٤ + ١٥

٣س + ٢س – ٤س = –٤+ ١٥ + ١٥ –٤

س= ٢٢

: حل المعادلة التالية

$$\frac{٤س - ١}{٢} = \frac{س + ٨}{٣}$$

الحل: في هذه الحاله حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أى أن ٢ (س + ٨) = ٣ (٤ س – ١)

٢س + ١٦ = ١٢ س – ٣

٢س – ١٢ س = –٣ –١٦

–١٠ س = –١٩

س= ١,٩

حل المعادلة التالية

$$-٤ \quad \frac{٢س+١}{٢} + \frac{س-١}{٥} = \frac{٧س - ٢}{٤}$$

الحل: في هذه الحالة لابد من توحيد المقامات اولاً للطرف الأيمن

$$\frac{٥ (٢س+١) + ٢ (س - ١)}{١٠} = \frac{٧س - ٢}{٤}$$

$$\frac{١٠س +٥ + ٢ س - ٢}{١٠} = \frac{٧س-٢}{٤}$$

$$\frac{١٢س + ٣}{١٠} = \frac{٧س - ٢}{٤}$$

ثم حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

٤ (١٢س + ٣) = ١٠ (٧س – ٢)

٤٨س + ١٢= ٧٠س –٢٠

٤٨ س – ٧٠س = –٢٠ –١٢

–٢٢س = –٣٢

س = –٣٢/ –٢٢= ١,٤٥٤٥

٥– حل المعادلات التالية :

٥س – ص = ١٧ ←١

٢س + ص = ٤ ← ٢

الحل : يتم ضرب المعادلة (١) X ٢ والمعادلة (٢) X ٥ لتكون

١٠س – ٢ص = ٣٤

١٠س + ٥ ص= ٢٠ وبطرح المعادلتين ينتج

–٧ ص = ١٤

ص= – ٢

وبالتعويض فى معادلة (١) عن قيمة ص = –٢ ينتج أن

٥ س – ص = ١٧

٥ س – (–٢) =١٧

٥ س +٢ = ١٧

٥ س = ١٧ –٢

٥ س = ١٥

س = ٣

أى أن الحل هو س = ٣ و ص = –٢

٦– حل المعادلات التالية :

٣س + ٧ ص = ٨ ←١

٥س – ٣ ص = ٦ ← ٢

الحل : يتم ضرب المعادلة (١) X ٥ والمعادلة (٢) X ٣ لتكون

١٥س + ٣٥ص = ٤٠

١٥س – ٩ ص= ١٨ وبطرح المعادلتين ينتج

٤٤ص = ٢٢

ص= ٠,٥

وبالتعويض فى معادلة (١) عن قيمة ص = ٠,٥ ينتج أن

٣ س + ٧ ص = ٨

٣ س + ٧ (٠,٥) = ٨

٣ س + ٣,٥ = ٨

٣ س = ٨ – ٣,٥

٣ س = ٤,٥

س = ١,٥

أى أن الحل هو س = ١,٥ و ص = ٠,٥

المحاضرة الثانية عشر

تكون صورة المعادلة من الدجة الثانية فى مجهول واحد هى

أ س^{٢} + ب س + جـ = صفر

ويمكن حلها باستخدام التحليل أو باستخدام القانون كما يلى

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

مثال: حل المعادلة التالية

س٢ − ٧س + ١٠ =صفر

الحل: يتم تحليل المقدار الثلاثى كما يلى

(س − ٢) (س− ٥) = صفر

اى أن

س−٢ =صفر ومنها س= ٢

أو س−٥ = صفر ومنها س=٥

حل أخر باستخدام القانون

أ= ١ ب= −٧ جـ = ١٠

$$س = \frac{٧ \pm \sqrt{٤٩ - (١٠ \times ١ \times ٤)}}{١ \times ٢}$$

$$س = \frac{٧ \pm ٣}{٢}$$

س= (٧+٣)/٢= ٥

س= (٧−٣)/ ٢= ٢

مثال : حل المعادلة التالية

س^{٢} − ٢س = ٢٤

الحل س^{٢}− ٢س −٢٤ = صفر

وبالتحليل (س −٦) (س+ ٤) =صفر

س−٦=صفر أى أن س= ٦

أو س+ ٤ =صفر س=-٤

حل أخر باستخدام القانون

أ= ١ ب= -٢ جـ = -٢٤

$$س = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - (١ \times ٤ \times -٢٤)}}{١ \times ٢}$$

$$س = \frac{٢ \pm ١٠}{٢}$$

س= (٢+١٠)/٢= ٦

س= (٢-١٠)/ ٢= -٤

مثال: حل المعادلة ١٢ س٢ + ٤س =٣٣

الحل: ١٢ س٢ +٤س -٣٣ = صفر

الحل باستخدام القانون

أ= ١٢ ب= ٤ جـ = -٣٣

$$س = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٦ - (١٢ \times ٤ \times -٣٣)}}{١٢ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٤ \pm ٤٠}{٢٤}$$

س= (-٤+٤٠)/٢٤= ١,٥

س= (-٤-٤٠)/ ٢٤= -١,٨٣٣٣

تمارين

حل المعادلات التالية:

١- س٢ − ١٠س + ٢٤ =صفر

(س− ٦) (س−٤) = صفر

س= ٦ أو س=٤

٢- س٢ +٤س = ٣٢

س٢ + ٤س − ٣٢ =صفر

(س+٨) (س−٤) =صفر

س= −٨ أو س= ٤

٣- ٢ س٢ − ١٧ س + ٨ = صفر

أ= ٢ ب= −١٧ جـ = ٨

$$س= \frac{١٧ \pm \sqrt{٢٨٩ - (٨ \times ٢ \times ٤)}}{٢ \times ٢}$$

$$س= \frac{١٧ \pm ١٥}{٤}$$

س= (١٧+١٥)/٤= ٨

س= (١٧−١٥)/ ٤= ٠,٥

المحاضرة الثالثة عشر

سيتم تدريس:

١- المتواليات العددية (الحسابية)

٢- المتواليات الهندسية

اولاً- المتواليات العددية

يطلق على متسلسلة الأعداد التي يكون الفرق فيها بين أى حد والحد السابق له مباشرة مقدار ثابت المتوالية العددية.

فمثلاً- ٢، ٥ ، ٨ ، ..

يطلق عليها المتوالية العددية حيث أن

٨-٥ = ٣

٥-٢ = ٣

الفرق الثابت يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز '' د''

الرموز المستخدمة:

أ الحد الأول

د أساس المتوالية (الفرق الثابت)

ل الحد الأخير

ح ن الحد العام

جـ ن مجموع المتوالية

القوانين المستخدمة

الحد العام

$ح_{ن} = أ + (ن - ١) د$

مجموع المتوالية يمكن إيجاده بطريقتين:

١- بمعلوميه الحد الأخير

$$جـ_{ن} = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$$

٢- بمعلوميه أساس المتوالية

$$جـ ن = \frac{ن}{٢} (٢أ + (ن-١) د)$$

مثال

فى المتوالية التالية ٣ ، ٧ ، ١١ ، ...

أوجد:

١- حدد نوع المتوالية؟

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد الخامس ؟

٤- الحد التاسع ؟

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل

بما أن ١١ - ٧ =٤ و ٧- ٣ = ٤

أذن الفرق مقدار ثابت

١- نوع المتوالية : متوالية عددية

٢- أساس المتوالية د= ٤

٣- الحد الخامس = ح٥ = أ + ٤د

= ٣ + ٤ X٤ = ١٩

٤- الحد التاسع = ح ٩ = أ + ٨ د

= ٣ + ٤ X٨ = ٣٥

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

جـ ن = ن/٢ (٢أ + (ن-١) د)

جـ١٠ = ١٠/٢ (٢ X ٣ + ٩ X ٤)

= ٥ (٦+ ٣٦) = ٥ (٤٢) =٢١٠

مثال

متوالية حدودها ٧٠، ٦٥ ، ٦٠، ....، ٢٥

١- حدد نوع المتوالية

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد السادس ؟

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

٥- عدد حدود المتوالية ؟

الحل:

١- بما أن ٦٥- ٧٠ = -٥ و ٦٠ - ٦٥ = -٥

أذن الفرق مقدار ثابت أى أن المتوالية عددية

٢- أساس المتوالية د =-٥

٣- الحد السادس = ح ٦ = أ + ٥ د

= ٧٠ + ٥ X-٥ = ٤٥

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$جـ ١٠ = \frac{١٠}{٢} (٢ \times ٧٠ + ٩ \times -٥)$$

$$= ٥ (١٤٠ - ٤٥) = ٥ (٩٥) = ٤٧٥$$

٥- عدد حدود المتوالية

الحد الأخير = ل = ٢٥ = أ + (ن-١) د

$$= ٧٠ + (ن-١) \times -٥$$

$$٢٥ = ٧٠ - ٥ن +٥$$

$$٢٥ = ٧٥ - ٥ن$$

$$٥ ن = ٥٠$$

$$ن = ١٠$$

مثال

متوالية عددية مجموعها ٨٦٤ وحدها الأول ٩ وحدها الأخير٩٩ أوجد عدد حدود المتوالية وحدها الأخير ؟

$$جـ ن = ٨٦٤ = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$$

$$٨٦٤ = \frac{ن}{٢} (٩+٩٩)$$

$$٨٦٤ = ٥٤ ن$$

$$ن = ١٦$$

إيجاد أساس المتوالية:

$$ح١٦ = أ + ١٥ د$$

٩٩ = ٩ + ١٥ د

٩٠ = ١٥ د

د = ٦

المتوالية الهندسية

يطلق علي متسلسلة الأعداد التى يكون خارج قسمة أى حد فيها على الحد السابق له مباشرة مقدار ثابت بالمتوالية الهندسية.

الرموز المستخدمة

أ الحد الأول

ر أساس المتوالية

جـ ن مجموع ن من الحدود

جـ ∞ مجموع المتوالية إلى ما لانهاية

القوانين المستخدمة

الحد العام $ح_{ن} = أ ر^{ن-١}$

مجموع عدد معين من الحدود

$$جـ ن = \frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

مجموع المتوالية إلى مالانهاية

$$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$$

مثال: فى المتوالية ٤ ، ٨ ، ١٦ ،... أوجد الحد العاشر ومجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل:

نجد أن (*؛٤) = (٨؛٨!؛) = ٢

أذن المتوالية هندسية وأساسها ر = ٢

الحد العاشر ح ١٠ = أ ر^{٩}

= ٤ (٢)^{٩} = ٢٠٤٨

مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية.

$$جـ ن = \frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

$$جـ ١٠ = \frac{٤ (٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ٤٠٩٢$$

مثال: فى المتوالية ٧٢٩ ، ٢٤٣ ، ٨١ ، .... أوجد الحد الثامن و مجموع العشر حدود الأولى ومجموع المتوالية إلى ما لانهاية ؟

الحل: نجد أن خارج قسمة أى حد على السابق له مقدار ثابت لذلك هى متوالية هندسية

أساسها ر = (٧٢٩/٢٤٣) = (٨١/ ٢٤٣) = ١ / ٣

الحد الثامن = ح ٨ = أ ر٧ = ٧٢٩ x (١ / ٣)^{٧} = ٠,٣٣٣

مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية.

$$جـ ن = \frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

$$جـ ١٠ = \frac{٧٢٩ ((١ / ٣)^{١٠} - ١)}{(١ / ٣) - ١} = ١٠٩٣,٥$$

مجموع المتوالية إلى مالانهاية

$$جـ \infty = \frac{أ}{١ - ر}$$

$$\text{جـ}_{\infty} = \frac{٧٢٩}{١ - (١ / ٣)} = ١٠٩٣,٥$$

أوجد مجموع المتوالية ١٩٩ ، −٩٩,٥ ، ٤٩,٧٥ ،... إلى ما لانهاية ؟

الحل أ = ١٩٩ ر = (−٩٩,٥ / ١٩٩) = (٤٩,٧٥/ −٩٩,٥) = −٠,٥

مجموع المتوالية إلى مالانهاية

$$\text{جـ}_{\infty} = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}} = ١٩٩ / (١ - (-٠,٥)) = ١٣٢,٦٦$$

المحاضرة الرابعة عشر

المحددات و المصفوفات

أولاً– المحددات

المحدد من الرتبة الثانية يكون على الصورة التالية

$$\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{vmatrix}$$

ويمكن الحصول على قيمة المحدد = (أ١١ x أ٢١) – (أ١٢xأ٢٢)

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٧ & ٨ \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد = (٥ X ٨) – (٣X ٧)

= ٤٠ – ٢١ = ١٩

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -٣ & -١ \\ ٤ & ٦ \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد = (–٣ X ٦) – (٤X –١)

= –١٨ + ٤ = –١٤

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} ١٢- & ٤ \\ ٣- & ٢- \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد = (−١٢ x −٢) − (−٣x ٤)

= ٢٤ + ١٢ = ٣٦

استخدام المحددات فى حل المعادلات

باستخدام المحددات حل المعادلات التالية :

٥ س + ٢ ص= ١٩

٤ س − ص = ١٠

الحل : حتى يمكن إيجاد قيمتى كلاً من س و ص يتم حساب

Δ وΔس وΔص كما يلى :

Δ ويحتوى على معاملات س و ص

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & ١- \end{vmatrix} = (٥ \text{ x} -١) - (٢ \text{ x}٤)$$

$$= -٥ - ٨ = -١٣$$

Δس ويتم أستبدال معاملات س بقيم النواتج كما يلى:

$$\Delta س = \begin{vmatrix} ١٩ & ٢ \\ ١٠ & ١- \end{vmatrix} = (١٩ \text{x} -١) - (٢ \text{ x}١٠)$$

$$= -١٩ - ٢٠ = -٣٩$$

Δص ويتم أستبدال معاملات ص بقيم النواتج كما يلى:

$$\Delta ص = \begin{vmatrix} ١٩ & ٥ \\ ١٠ & ٤ \end{vmatrix} = (١٩ \times ٤) - (١٠ \times ٥)$$

$$= ٧٦ - ٥٠ = -٢٦$$

وبالتالى يمكن الحصول على قيمة س و ص كما يلى :

س= Δس / Δ = −٣٩ / −١٣ = ٣

ص= Δص / Δ = −٢٦ / −١٣ = ٢

مثال: حل باستخدام المحددات المعادلات التالية :

٧س + ٣ ص= ٢

٤س − ٢ص = −١٠

الحل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٧ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{vmatrix} = (٧ \times -٢) - (٤ \times ٣)$$

$$= -١٤ - ١٢ = -٢٦$$

$$\Delta س = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ -١٠ & -٢ \end{vmatrix} = (٢ \times -٢) - (-١٠ \times ٣)$$

$$= -٤ + ٣٠ = ٢٦$$

$$\Delta ص = \begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ١٠- & ٤ \end{vmatrix} = (٢ \times ٤) - (١٠- \times ٧)$$

$$= ٨- ٧٠- = ٧٨-$$

وبالتالى يمكن الحصول على قيمة س و ص كما يلى :

$$س = \Delta س / \Delta = ٢٦- / ٢٦ = ١-$$

$$ص = \Delta ص / \Delta = ٧٨- / ٢٦- = ٣$$

المحددات من الرتبة الثالثة

مثال أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٥ & ٤ & ٢ \\ ١ & ١- & ٣ \\ ٠ & ٧ & ٢ \end{vmatrix}$

حتى يمكن إيجاد قيمة هذا المحدد يتم استخدام عناصر الصف الأول كما يلى:

قيمة المحدد = ٥ $\begin{vmatrix} ١- & ٣ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}$ **- ٤** $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ **+ ٢** $\begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ٠ & ٧ \end{vmatrix}$

$$= ٥ (-٢ - ٢١-) - ٤ (٢ - ٠) + ٢ (٧ - ٠)$$

$$= ٥ \times ٢٣- - ٤ \times ٢ + ٢ \times ٧$$

$$= ١١٥- - ٨- + ١٤ = ١٠٩-$$

مثال أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ٥- & ٧ \\ ٦ & ٤ & ١ \\ ٣- & ٨ & ٩ \end{vmatrix}$

حتى يمكن إيجاد قيمة هذا المحدد يتم استخدام عناصر الصف الأول كما يلى:

قيمة المحدد = ٢ $\begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{vmatrix}$ +٥ $\begin{vmatrix} ٦ & ١ \\ ٣- & ٩ \end{vmatrix}$

+ ٧ $\begin{vmatrix} ٦ & ٤ \\ ٣- & ٨ \end{vmatrix}$

= ٢ (٣٦–٨) +٥ (٥٤ +٣) + ٧ (٤٨ +١٢)

= ٢ x ٢٨ +٥ x ٥٧ + ٧ x ٦٠

= ٥٦+٢٨٥ + ٤٢٠ = ٧٦١

ثانياً– المصفوفات

يتم التركيز على العمليات الجبرية للمصفوفات كما يلى :

إذا كان ك = $\begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ٤- & ٦ \end{pmatrix}$ ، ط= $\begin{pmatrix} ٣ & ١- \\ ٧ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد ١– ك/ و ط/ ٢– ك + ط ٣– ٢ ك +ط

٤– ك ط

٥– ك$^{-١}$

الحل: يمكن الحصول على ك/ و ط/ بتبديل الصفوفة أعمدة والأعمدة صفوف كما يلى:

ك/ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٤- \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$

ط/ =

٧ ٦ -١ ١٢

٢- ك + ط يتم جمع كل رقم مع الموجود فى نفس مكانه من المصفوفة الأخرى كما يلى

$$\text{ك + ط} = \begin{Bmatrix} ٨ & ٦ \\ ٣ & ١٨ \end{Bmatrix}$$

٣- ٢ك + ط يتم ضرب كل عنصر فى ك x ٢ ثم جمع الناتج مع الموجود فى نفس مكانه من المصفوفة ط كما يلى

$$\text{ك + ط} = \begin{Bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٦ & ٣٦ \end{Bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

٤- ك ط يتم ضرب عناصر الصفوف فى المصفوفة ك x عناصر أعمدة المصفوفة ط ثم جمع الناتج كما يلى

$$\text{ك ط} = \begin{Bmatrix} ٧x٧+٣x٥ & ١٢x٧+١-x٥ \\ ٧x٦+٣x٤- & ١٢x٦+١-x٤- \end{Bmatrix}$$

$$ك\ ط = \begin{Bmatrix} ٧٩ & ٦٤ \\ ٧٦ & ٣٠ \end{Bmatrix}$$

مقلوب المصفوفة

٥- يرمز إلى مقلبو بالمصفوفة ك بـ ك-١ حيث أن

مقلوب المصفوفة = $\frac{١}{\text{المحدد}}$ X مصفوفة المرافقات المبدلة

$$\text{محدد المصفوفة ك} = \begin{vmatrix} ٥ & ٧ \\ -٤ & ٦ \end{vmatrix}$$

$$= (٥ \times ٦) - (٧ \times -٤)$$

$$= ٣٠ + ٢٨ = ٥٨$$

ويمكن الحصول على مصفوفة المرافقات المبدلة :

تبديل أماكن عناصر القطر الرئيسى

تبديل أشارات عناصر القطر الأخر

$$\text{مصفوفة المرافقات المبدلة} = \begin{Bmatrix} ٦ & -٧ \\ ٤ & ٥ \end{Bmatrix}$$

$$\text{مقلوب المصفوفة ك}^{-١} = \frac{١}{\quad} \begin{Bmatrix} ٦ & -٧ \\ & \end{Bmatrix}$$

٥٨

٤ ٥

وفى النهاية أتمنى للجميع كل التوفيق والنجاح أن شاء الله

وأخر دعواهم أن الحمد لله رب العالمين

د. أسامة حنفي محمود

هذه الملزمه هي مجرد نسخ محتوى المقرر من برنامج باوربوينت إلى برنامج ورد وذلك لتسهيل طباعتها والمراجعة منها

أخوكم / شبيه الريح