اسم المقرر

مبادىء الرياضيات (١)

د.أسامة حنفي محمود

الأستاذ المشارك بقسم الأساليب الكمية

جامعة الملك فيصل

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

محاضرة ١٢

المتواليات

المتواليات

سيتم تدريس:

١- المتواليات العددية (الحسابية)

٢- المتواليات الهندسية

اولاً- المتواليات العددية

يطلق على متسلسلة الأعداد التي يكون الفرق فيها بين أى حد والحد السابق له مباشرة مقدار ثابت المتوالية العددية.

فمثلاً $2,5,8,....$

يطلق عليها المتوالية العددية حيث أن

$$8-5=3$$
$$5-2=3$$

الفرق الثابت يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز d

الرموز المستخدمة:

a الحد الأول

d أساس المتوالية (الفرق الثابت)

L الحد الأخير

H_n الحد العام

S_n مجموع المتوالية

القوانين المستخدمة

الحد العام

$$H_n = a + (n-1)d$$

مجموع المتوالية يمكن إيجاده بطريقتين:

١- بمعلوميه الحد الأخير

$$S_n = \frac{n}{2}(a + L)$$

٢- بمعلوميه أساس المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

مثال

فى المتوالية التالية $3,7,11,\ldots$

أوجد:

١- حدد نوع المتوالية؟

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد الخامس ؟

٤- الحد التاسع ؟

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل

بما أن $7-3=4$ $\quad 11-7=4$

أذن الفرق مقدار ثابت

١- نوع المتوالية : متوالية عددية

٢- أساس المتوالية $d=4$

٣- الحد الخامس

$$H_n = a+(n-1)d$$

$$H_5 = a+4d$$

$$H_5 = 3+4(4)=19$$

٤- الحد التاسع من المتوالية

$$H_9 = a + 8d$$
$$H_9 = 3 + 4(8) = 35$$

٥-مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \times 3 + 9 \times 4) = 5(6 + 36) = 210$$

مثال

متوالية حدودها $70,65,60,\ldots,25$

١- حدد نوع المتوالية

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد السادس ؟

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

٥- عدد حدود المتوالية ؟

الحل:

١- بما أن $60-65=-5$ $\quad 70-65=-5$

أذن الفرق مقدار ثابت أى أن المتوالية عددية

٢- أساس المتوالية $d=-5$

٣- الحد السادس

$$H_6 = a+5d$$
$$= 70+5(-5) = 45$$

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \times 70 + 9 \times -5)$$

$$= 5(140 - 45) = 5 \times 95 = 475$$

٥- عدد حدود المتوالية

الحد الأخير

$$L = a + (n-1)d = 25$$

$$70 + (n-1) \times -5 = 25$$

$$70 - 5n + 5 = 25$$

$$70 + 5 - 25 = 5n$$

$$50 = 5n$$

$$n = \frac{50}{5} = 10$$

مثال

متوالية عددية مجموعها 864 وحدها الأول 9 وحدها الأخير 99
أوجد عدد حدود المتوالية وأساس المتوالية ؟

اولاً- إيجاد عدد حدود المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(a + L)$$

$$864 = \frac{n}{2}(9 + 99)$$

$$864 = 54n$$

$$n = \frac{864}{54} = 16$$

إيجاد أساس المتوالية:

بما أن عدد الحدود = 16 يكون الحد الأخير هو H_{16}

$$H_{16} = L = a + 15d = 99$$

$$9 + 15 \times d = 99$$

$$15\mathrm{d} = 99 - 9$$

$$15d = 90$$

$$\mathrm{d} = \frac{90}{15} = 6$$

مثال: متوالية عددية حدها الثانى 8 و حدها الخامس 23 اوجد حدها العاشر ومجموع العشرين حداً الأولى منها ؟

الحل

$$H_5 = a + 4d = 23$$
$$H_2 = a + \quad d = 8$$

بطرح المعادلتين فأن

$$3d = 15$$
$$d = \frac{15}{3} = 5$$

بالتعويض فى أى معادلة لإيجاد قيمة الحد الأول

$$a + d = 8$$

$$a + 5 = 8$$

$$a = 3$$

الحد العاشر

$$H_{10} = a + 9d$$

$$= 3 + 9(5) = 48$$

مجموع العشرين حداً الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2\times 3 + 19\times 5)$$

$$= 10(6+95) = 10\times 101 = 1010$$

مثال: متوالية عددية مكونة من خمس حدود ومجموع حديها الثانى والرابع 52 ومجموع حديها الثالث والخامس 66 أوجد المتوالية؟

الحل:

مجموع الحدين الثانى والرابع = 52

$$H_2 + H_4 = a + d + a + 3d$$

$$= 2a + 4d = 52 \qquad \rightarrow (1)$$

مجموع الحدين الثالث والخامس=66

$$H_3 + H_5 = a + 2d + a + 4d$$
$$= 2a + 6d = 66 \qquad \rightarrow (2)$$

بطرح المعادلة (١) من (٢) يكون الناتج

$$2d = 14$$
$$d = \frac{14}{2} = 7$$

إيجاد الحد الأول للمتوالية

يتم التعويض فى المعادلة الأولى

$$2a + 4d = 52$$
$$2a + 4(7) = 52$$
$$2a + 28 = 52$$
$$2a = 52 - 28$$
$$2a = 24$$
$$a = \frac{24}{2} = 12$$

وبذلك تكون المتوالية هى

$$12,19,26,33,40$$

تمارين

١- فى المتوالية التالية $18,21,24,\ldots$

أوجد:

١- حدد نوع المتوالية؟

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد الثامن ؟

٤- الحد الثانى عشر ؟

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

تمارين

٢- فى المتوالية التالية 86,82,78, . . .

أوجد:

١- حدد نوع المتوالية؟

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد العاشر ؟

٤- الحد الثانى عشر ؟

٥- مجموع العشرين حداً الأولى من المتوالية ؟

٣- متوالية حسابية حدها الاول = 5و حدها الاخير = 35
و مجموعها 220 فماهو عدد حدودها وأساسها؟

٤- متوالية عددية حدها الثانى 68 وحدها الرابع 50 أوجد المتوالية ومجموع العشر حدود الأولى منها؟

٥- متوالية حسابية مكونه من اربع حدود وكان مجموع الحدين الأول والرابع=70 ومجموع الحدين الثانى والثالث = 70 أوجد المتوالية؟

المتوالية الهندسية

يطلق علي متسلسلة الأعداد التى يكون خارج قسمة أى حد فيها على الحد السابق له مباشرة مقدار ثابت بالمتوالية الهندسية.

الرموز المستخدمة

أ الحد الأول

ر أساس المتوالية

جـ ن مجموع ن من الحدود

جـ ∞ مجموع المتوالية إلى ما لانهاية

القوانين المستخدمة

الحد العام $ح_{ن} = أ\ ر^{ن-١}$

مجموع عدد معين من الحدود

$$جـ_{ن} = \frac{أ\ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

مجموع المتوالية إلى مالانهاية

$$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$$

مثال: فى المتوالية ٤ ، ٨ ، ١٦ ،... أوجد الحد العاشر ومجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل:

نجد أن (٤/٨) = (٨/١٦) = ٢

أذن المتوالية هندسية وأساسها ر = ٢

الحد العاشر $ح_{١٠} = أ\ ر^{٩}$

$= ٤\ (٢)^{٩} = ٢٠٤٨$

مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية.

$$جـ_{ن} = \frac{أ\ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

$$جـ_{١٠} = \frac{٤\ (٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ٤٠٩٢$$

مثال: فى المتوالية ٧٢٩ ، ٢٤٣ ، ٨١ ، .... أوجد الحد الثامن و مجموع العشر حدود الأولى ومجموع المتوالية إلى ما لانهاية ؟

الحل: نجد أن خارج قسمة أى حد على السابق له مقدار ثابت لذلك هى متوالية هندسية

أساسها ر = (٢٤٣/٧٢٩) = (٨١/ ٢٤٣) = ١ / ٣

الحد الثامن = ح ٨ = أ ر٧ = ٧٢٩x (١ / ٣) ^{٧}= ٠,٣٣٣

مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية.

$$جـ_{ن} = \frac{أ\ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

$$جـ_{١٠} = \frac{٧٢٩\ ((١ / ٣)^{١٠} - ١)}{(١ / ٣) - ١} = ١٠٩٣,٥$$

مجموع المتوالية إلى مالانهاية

$$جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$$

$$جـ_{\infty} = \frac{٧٢٩}{١ - (١ / ٣)} = ١٠٩٣,٥$$

أوجد مجموع المتوالية ١٩٩ ، -٩٩,٥ ، ٤٩,٧٥ ،... إلى ما لانهاية ؟

الحل أ = ١٩٩ ر = (-٩٩,٥ / ١٩٩) = (٤٩,٧٥/ -٩٩,٥) = - ٠,٥

مجموع المتوالية إلى مالانهاية

$$جـ_{\infty} = \frac{أ}{1 - (-٠,٥)} = ١٩٩ / (١ - (-٠,٥)) = ١٣٢,٦٦$$

١- ر

تمت بحمد الله