بسم الله الرحمن الرحيم

① ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $Q(x_2, y_2)$ & $P(x_1, y_1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

مثال

أوجد ميل المستقيم الواصل بين النقطتين $P(1,-3)$ & $Q(3,7)$

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-3)}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

لاحظ

① إذا كان الميل = صفر ∴ المستقيم يوازي محور السينات

② " " الميل = ∞ (بسط لبناي / صفر) ∴ المستقيم يوازي محور الصادات

---

③ ميل المستقيم الذي معادلته الصورة $ax + by + c = 0$ حيث $a, b \neq$ صفر هو

$$\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = m = \frac{-a}{b}$$

مثال

أوجد ميل المستقيم الذي معادلته $2x + 4y - 7 = 0$

الحل $a = 2$ ، $b = 4$

$$\therefore m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

المستقيمات المتوازية يقال أن المستقيم L_1 يوازي المستقيم L_2 إذا كان $m_1 = m_2$

مثال هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ & $y = 4x + 1$ متوازيان؟

الحل $m_1 = \frac{-4}{-1} = 4$ & $m_2 = \frac{-4}{-1} = 4$ ∴ المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة يقال أن المستقيم L_1 متعامد مع المستقيم L_2 إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ و $3y + x - 15 = 0$ متعامدان

$$m_1 = \frac{-(-3)}{1} = \frac{3}{1} = 3 \quad \& \quad m_2 = \frac{-1}{3}$$

$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{-1}{3} = -1$$

∴ المستقيمان متعامدان

(١)

(أ) معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطة وميل m $P(x_1, y_1)$

هى $y - y_1 = m(x - x_1)$

مثال

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(5, -3)$ وميله يساوى -2

الحل $y_1 = -3 \quad x_1 = 5 \quad \& \quad m = -2$

$\therefore y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-3) = -2(x - 5)$

$y + 3 = -2x + 10$

$\therefore y = -2x + 10 - 3 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 7}$

(ب) معادلة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ & $P_2(x_2, y_2)$ هى

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال

x_2, y_2 $\quad$ x_1, y_1

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(5, 6)$ ، $(1, -2)$

الحل

$$\therefore \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \therefore \frac{y - (-2)}{x - 1} = \frac{6 - (-2)}{5 - 1} \quad \therefore \frac{y + 2}{x - 1} = \frac{6 + 2}{4} = \frac{8}{4}$$

$$\frac{y + 2}{x - 1} = \frac{2}{1} \quad \therefore y + 2 = 2x - 2 \quad \boxed{\therefore y = 2x - 4}$$

(ج) معادلة الخط المستقيم بدلالة ميل والمحور الصادى هى

$\boxed{y = mx + b}$ حيث m هى الميل & b الجزء المقطوع من المحور الصادى

مثال أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $m = 3$ ويقطع جزء من محور الصادات ومقطوعه الصادى $b = -2$

الحل $\quad \because y = mx + b$

$$\boxed{\therefore y = 3x - 2}$$

إذا طلب الميل والمقطوع الصادى

مثال أوجد الميل والمقطوع الصادى للمستقيم $2x + 3y = 6$

الحل نحول المعادلة الى الشكل $\boxed{y = mx + b}$ كالتالى

$\frac{3y}{3} = \frac{-2x}{3} + \frac{6}{3}$ نقسم المعادلة ÷ ٣

$y = \frac{-2}{3}x + 2$

$\therefore m = \frac{-2}{3}$ الرقم الذى أمام x هو الميل

$\therefore b = 2$ الرقم الأخير هو المقطوع الصادى

(٢)

(٤) معادلة المستقيم بدلالة الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات هي

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

حيث a الجزء المقطوع من محور السينات

b " " " " الصادات

مثال أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله ٣ سم ومن محور الصادات جزءاً طوله ٢ سم وهي

الكل $a = 3$ ، $b = 2$

$$\therefore \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

نوحد المقامات $\therefore \frac{2x}{6} + \frac{3y}{6} = 1$

$$\frac{2x+3y}{6} = 1$$

$$\therefore 2x + 3y = 6$$

إذا طلب الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات لمستقيم معادلته

$$ax + by = 2k$$

مثال أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته

$$2x - 3y = 5$$

نجعل المعادلة على الشكل

الكل

$$\therefore a = \frac{5}{2} \quad , \quad b = \frac{5}{-3}$$

a = العدد المقابل لـ x ، b = العدد المقابل لـ y

الفترات

١) فترة مغلقة $[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$

٢) فترة مفتوحة $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$

٣) فترة نصف مغلقة، نصف مفتوحة $[a,b) = \{x \in R \; a \le x < b\}$

٤) فترة نصف مفتوحة، نصف مغلقة $(a,b] = \{x \in R \; a < x \le b\}$

حل المتباينة ① الأولى

$4X+7 \geq 2X-3$

$4X-2X \geq -3-7$

$\frac{2X}{2} \geq \frac{-10}{2}$ $\quad X \geq -5$

مجموعة الحل هي الفترة

$[-5, \infty)$

حل المتباينة ② الأولى

$-5 < 3X-2 < 1$

$+2 \quad -5+2 < 3X < 1+2$

$\frac{-3}{3} < \frac{3X}{3} < \frac{3}{3}$

$-1 < X < 1$

مجموعة الحل هي الفترة $(-1, 1)$

حل المتباينة ③ الأولى

$X^2 \leq 4X+12$

$X^2 - 4X - 12 \leq 0$

$(X-6)(X+2) \leq 0$

$X \quad \overline{\quad} \quad 6$

$X \quad \underline{\quad} \quad -2$

$\therefore X \leq 6$ و $X \geq -2$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $[-2, 6]$

حل المتباينة ④

$X^2+X-12 > 0$

$X \quad \overline{\quad} \quad 3$

$X \quad \underline{\quad} \quad -4$

$X > -4$ و $X > 3 \therefore (X+4)(X-3) > 0$

أو $(X+4)(X-3) < 0$

$X < -4$ و $X < 3 \therefore$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

* في حالة $>$ أو $<$ نستبعد النقط

حل المتباينة ⑤ الأولى

$|2X+4| \leq 3$

القيمة المطلقة

$-3 \leq 2X+4 \leq 3$

$-4-3 \leq 2X \leq 3-4$

$\frac{-7}{2} \leq \frac{2X}{2} \leq \frac{-1}{2}$

$-\frac{7}{2} \leq X \leq -\frac{1}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي الفترة $[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}]$

حل المتباينة ⑥ الأولى

$|2X-5| > 3$

$-3 > 2X-5 > 3$

$+5 \quad -3+5 > 2X > 3+5$

$\frac{2}{2} > \frac{2X}{2} > \frac{8}{2}$

$1 > X > 4$

$\therefore$ مجموعة الحل هي مجموعة كل الأعداد الحقيقية الواقعة بين 1 و 4

$(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

الدوال ① الدالة الأسية $f(X) = 2^X$

② الدوال المثلثية $y = \sin X$ ، $y = \cos X$

$y = \tan X = \frac{\sin X}{\cos X}$

$y = \sec X = \frac{1}{\cos X}$

③ الدالة اللوغاريتمية $f(X) = \log_4 (2X+4)$

~~$\log_b XY = \log_b X + \log_b Y$~~

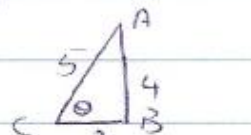
$y = \csc X \Rightarrow \frac{1}{\sin X}$

$y = \cot X \Rightarrow \frac{\cos X}{\sin X}$

التفسير الهندسي للدوال المثلثية

$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ ، $\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ ، $\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

مثال: إذا كان $\cot\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{3}{4}$ فأوجد النسب المثلثية $\tan\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\sin\theta$



$\therefore AB = \sqrt{25} = 5$ ← من فيثاغورث $25 = 16+9 = 4^2+3^2 = \overline{AC}^2$

$\therefore \sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5}$ ، $\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5}$ ، $\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{4}{3}$

الدالة البسيطة مقام بسط مثال $f(x) = \frac{x+7}{x+5}$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2}$

الدالة الصريحة مثال $y = 2x+3$

الدالة الضمنية مثال $x^2+y^2=25$ ، $(x-3)^2+(y+5)^2=49$

الدالة الزوجية تعتبر الدالة $y=f(x)$ زوجية إذا كانت $f(-x)=f(x)$

مثال: هل الدالة $f(x)=x^2$ دالة زوجية؟

الحل: $f(-x) = (-x)^2$

$f(-x) = x^2 = f(x)$

∴ الدالة زوجية

الدالة الفردية تعتبر الدالة $y=f(x)$ فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$

مثال: هل الدالة $f(x)=x^3+x$ فردية؟

الحل: $f(-x) = (-x)^3 + (-x)$

$= -x^3 - x = -(x^3+x)$

$\therefore f(-x) = -f(x)$ ∴ الدالة فردية

تطبيقات اقتصادية

دالة الطلب على سلعة معينة

$Q_D = 25 - 5P$

أوجد: ١) الكمية المطلوبة من السلعة عندما $P=3$

٢) سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 18$

٣) الكمية المطلوبة من السلعة إذا كانت بدون مقابل $P=0$

٤) أعلى سعر يمكن أن يدفعه شخص لأجل السلعة

1) $Q_D = 25 - 5\times 3 = 25-15$

$Q_D = 10$ ← عندما $P=3$

2) $18 = 25 - 5P$ ، $18-25 = 5P$ ، $-7 = 5P$

$\therefore P = \frac{7}{5}$

3) $Q_D = 25 - 5\times 0 = 25$ ← بدون مقابل $P=0$

4) $Q_D = 0$ ← أعلى سعر عندما

$\therefore 0 = 25 - 5P$ ، $\therefore 25 = 5P$ ، $\frac{25}{5} = \frac{5P}{5}$ ، $\therefore P = 5$

(٦)

دالة العرض (الانتاج) لسلعة Q_S

إذا كانت $Q_S = 3P - 2$

1) Q_S إذا كانت $P = 5$

$Q_S = 3 \times 5 - 2 = 15 - 2 = 13$

---

2) P إذا كانت $Q_S = 10$

$10 = 3P - 2 \quad \therefore 10 + 2 = 3P \quad \frac{12}{3} = \frac{3P}{3} \quad \therefore P = 4$

3) أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتقنع شركة الانتاج أن تنتجها $Q_S = 0$

$0 = 3P - 2 \quad \therefore 3P = 2 \quad \therefore P = \frac{2}{3}$

---

(٣) التوازن في السوق بين دالتي العرض والطلب الخطيتين

بفرض إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 2 - P$ ودالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = P - 1$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

الحل

يحدث التوازن عندما تتساوى الكمية المعروضة والمطلوبة

$\therefore Q_S = Q_D$

$\therefore P - 1 = 2 - P \quad \therefore P + P = 2 + 1 \quad \therefore \frac{2P}{2} = \frac{3}{2}$

$\therefore P = \frac{3}{2}$ سعر التوازن

نعوض عن سعر التوازن في أحدى الدالتين ولتكن دالة العرض

$Q_S = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

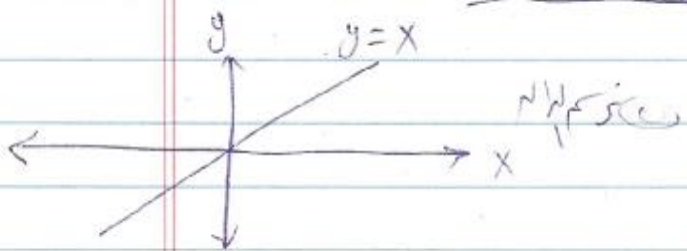
رسم الدوال

① رسم دالة الصفة لقياسية للدالة $y = f(x) = x$

نكون جدول

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y أو $f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

نختار $x = 1$ ونعوض $f(x) = 1$ وهكذا



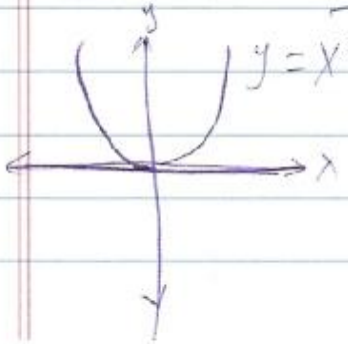
نرسم الدالة

② الدالة التربيعية مثال أرسم الدالة

$y = f(x) = x^2$

نكون جدول

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y أو $f(x)$	9	4	1	0	1	4	9



ثم نرسمها

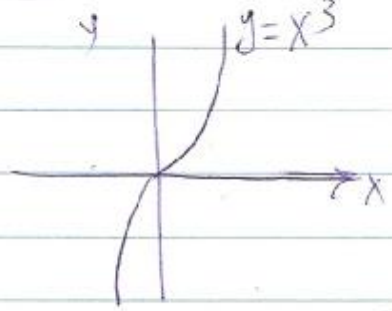
③ الدالة التكعيبية

مثال ارسم الدالة $y = f(x) = x^3$

الحل ① تكون الجدول

x	-2	-1	0	1	2
y = f(x)	-8	-1	0	1	8

② نرسم الدالة بالجدول



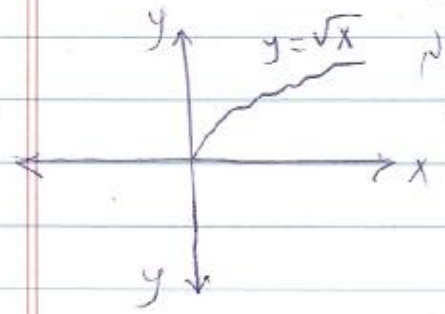
④ الدالة الجذر التربيعي

مثال ارسم الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$

الحل ① تكون الجدول

x	0	1	2	3	4
y = f(x)	0	1	1.4	1.7	2

② نرسم الدالة بالجدول



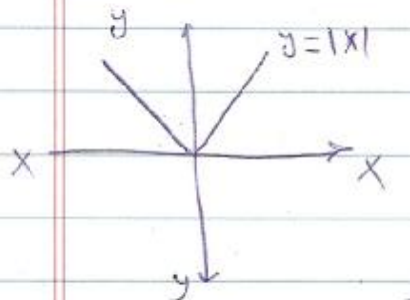
⑤ دالة القيمة المطلقة

مثال ارسم الدالة $y = f(x) = |x|$

الحل ① تكون الجدول

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y = f(x)	3	2	1	0	1	2	3

② نرسم الدالة بالجدول

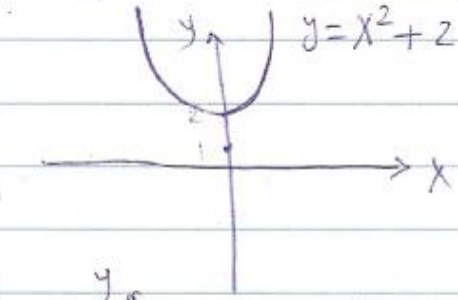


الإزاحة الى أعلى

مثال ارسم منحنى الدالة $y = x^2 + 2$

نرسم أولا منحنى الدالة التربيعية الأم $y = x^2$

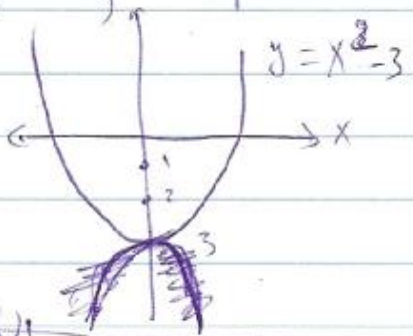
ونزاحه الى أعلى بمقدار وحدتين



الإزاحة الى أسفل

مثال ارسم الدالة $y = x^2 - 3$

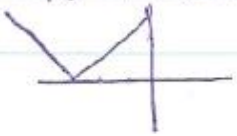
ثم نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = x^2$ ثلاث وحدات لأسفل



الإزاحة الى اليسار والإزاحة الى اليمين

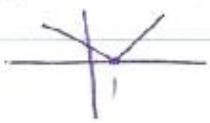
مثال ارسم الدالة $y = |x+3|$

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = |x|$ ٣ وحدات الى اليسار



مثال ارسم الدالة $y = |x-1|$

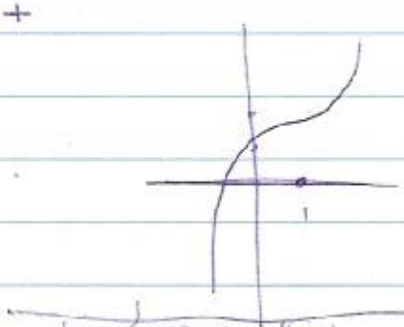
نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = |x|$ وحدة واحدة لليمين



انتقال الدالة الأسية الزاحة لليمين واليسار وينتقل لوحدات لأعلى وأسفل

مثال ارسم الدالة $y=(x-1)^3+2$

نحصل على منحنى هذه الدالة بازاحة منحنى الدالة $y=x^3$ وحدة واحدة لليمين ثم وحدتان لأعلى



ملاحظة الاشارة مع الأس — لليمين + لليسار

الاشارة خارج القوس + لأعلى — لأسفل

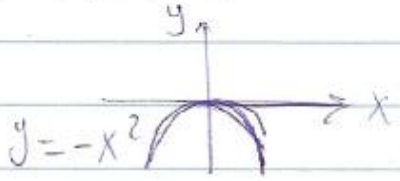
الانعكاس على محور X

الانعكاس على محور السينات

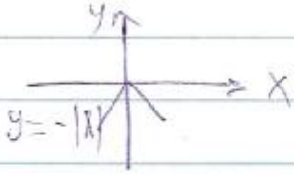
— يتم الحصول على منحنى $y=-f(x)$ بانعكاس منحنى $y=f(x)$ على محور X

مثال ارسم الدالة $y=-x^2$

∴ هي انعكاس لمنحنى الدالة $y=x^2$ على محور X

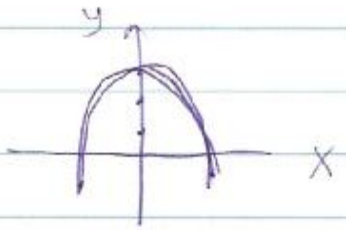


ارسم الدالة $y=-|x|$ ∴ هي انعكاس للدالة $y=|x|$



ارسم الدالة $y=-x^2+3$ ∴

∴ هي انعكاس لمنحنى الدالة $y=x^2$ على محور X ثم ازاحة ٣ وحدات لأعلى



الانعكاس على محور Y

انعكاسات الصادرات

— يتم الحصول على منحنى $y=f(-x)$ بانعكاس منحنى $y=f(x)$ على محور Y

مثال

ارسم الدالة $y=\sqrt{-x}$

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y=\sqrt{x}$ على محور الصادات Y كالتالي