المجموعات

المجموعة ببساطة هي تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماماً. وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شئ آخر.

يستخدم الرمز ϵ يستخدم الرمز "ينتمي إلى" ليبين عناصر المجموعة ، فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصرا من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \notin A$

المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز Φ أو { } .

المجموعة المنتهية: المجموعة التي تكون عناصرها محدودة

المجموعة غير المنتهية: المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة.

المجموعة الكلية: هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية منها، ويرمز لها بالرمزU.

تساوي المجموعات: تكون المجموعتان A ،B متساويتان إذا كانت $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصورة $A \equiv B$

الاتحاد اتحاد المجموعتين A، B($A \cup B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما

التقاطع: تقاطع المجموعتين A، B($A \cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً. أي العناصر المشتركة بين A و B

المكملة: يقال أن مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A

الضرب الديكارتي: يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A، B بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x,y)التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B.

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، وكان المسقط الثاني في الزوج الأول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني، .

معادلات الخط المستقيم

1- ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين:

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ يعرف على انه النسبة بين التغير في y والتغير في x ، ويرمز له عادة بالحرف m

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2- ميل الخط المستقيم الذي معادلته في الصورة العامة ax+by+c=0 حيث a,b,c ثوابت والثابتان a,b لا يساويان الصفر معاً، هو:

$$m = \frac{-a}{b}$$

المستقيمات المتوازية: يقال أن المستقيم L_1 موازياً للمستقيم L_2 أي $L_1 // L_2$ إذا وفقط إذا كان $m_1 = m_2$

المستقيمات المتعامدة: يقال أن المستقيم L_1 يعامد المستقيم L_2 أي $L_1 \perp L_2$ إذا وفقط إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

طرق تحديد معادلة الخط المستقيم:

بمعلومية نقطة وميل	معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة p(x1,y1) هي $y - y_1 = m(x - x_1)$
معلومية نقطتين	معادلة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
بمعلومية ميل والمحصور الصادي	معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويقطع من محور الصادات جزءا طوله b هي y=mx+b
بمعلومية الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات	المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءا طوله a = ومن محور الصادات جزءا طوله يساوي b = تكون معادلته: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

المتباينات

أي تعبير يتضمن احد الرموز $<$ ، $\le$ ، $>$ ، $\ge$ يسمى متباينة

تستخدم المتباينات في تعريف نوع خاص من المجموعات الجزئية من الأعداد الحقيقية والتي تسمى الفترة.

قوانين اللوغاريتمات:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b x^n = n \log_b x$$

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

الدوال المثلثية:

$(i) \quad y = \sin x$

$(ii) \quad y = \cos x$

وهناك دوال تعرف بواسطة هاتين الدالتين مثل:

$$(iii)\ y = \tan x \qquad \left(\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \cos x \neq 0 \right)$$

$$(iv)\ y = \sec x \qquad \left(\frac{1}{\cos x} \quad , \cos x \neq 0 \right)$$

$$(v)\ y = \csc x \qquad \left(\frac{1}{\sin x} \quad , \sin x \neq 0 \right)$$

$$(vi)\ y = \cot x \qquad \left(\frac{\cos x}{\sin x} \quad , \sin x \neq 0 \right)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

الدالة الزوجية:

تعتبر الدالة y=f(x) دالة زوجية إذا كانت f(-x)= f(x)

الدالة الفردية:

تعتبر الدالة y=f(x) دالة فردية إذا كانت f(-x)= -f(x)

تطبيقات اقتصادية:

1- دوال الطلب الخطية:

هناك علاقة عكسية بين كمية الطلب على سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما قل الطلبعليها. ونرمز لكمية الطلب على السلعة بالرمز Q_D بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

2-دالة العرض (الإنتاج) الخطية:

هناك علاقة طردية بين كمية الإنتاج من سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما زادت كمية الإنتاج. ونرمز لكمية العرض (الإنتاج) من سلعة ما بالرمز Q_S بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

التوازن في السوق بين دالتي العرض والطلب الخطيتين:

يحدث التوازن في السوق إذا كانت الكمية المعروضة من سلعة ما مساوياً للكمية المطلوبة منها. وهذه الحقيقة تعين سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن.

النهايات

مفهوم النهاية:

نهاية الدالة يقصد بها إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة. وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \to a} f(x)$ وتقرأ

نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a ($x \to a$)

إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ، وكانت $\lim_{x \to a} g(x) = k$ وكانت c أي عدد حقيقي، فأن:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = l \pm k$$

$$\lim_{x \to a} cf(x) = c \times \lim_{x \to a} f(x) = c \times l$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = l \times k$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{l}{k} \quad , k \neq 0$$

إذا كانت النهاية $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فان

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n$$

الاشتقاق

إذا كانت y=f(x) فان أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها تحدث تغير في المتغير التابع y قدره Δy . النسبة بين التغير في y إلى التغير في x تسمى متوسط التغير للدالة.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

تعريف المشتقة الأولى

نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \to 0$ (ان وجدت)
تسمى المشتقة الاولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير
ويرمز لها باحد الرموز التالية:

$$\frac{dy}{dx} \qquad f'(x) \qquad y' \qquad \frac{d}{dx}f(x)$$

إذا كانت $y = x^n$ حيث c عدد حقيقي فان	$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$
إذا كانت $y = c$ حيث c كمية ثابتة فان :	$\frac{dy}{dx} = 0$
إذا كانت $y = cx^n$ فان :	$\frac{dy}{dx} = ncx^{n-1}$
إذا كانت $y = [f(x)]^n$ فان	$\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1} . f'(x)$
إذا كانت $y = (f(x).g(x))$ فان :	$\frac{dy}{dx} = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$
إذا كانت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x))}{[g(x)]^2}$
إذا كانت $y = \frac{c}{f(x)}$ حيث c ثابت فان :	$\frac{dy}{dx} = \frac{-c . f'(x)}{[f(x)]^2}$
إذا كانت $y = f(u)$ و $u = g(x)$ ،	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$

عندما نشتق الدالة للمرة الثانية فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:	$\frac{d^2y}{dx^2} , f''(x) , y''$
وعندما نشتق الدالة للمرة الثالثة فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثالثة ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:	$\frac{d^3y}{dx^3} , f'''(x) , y'''$

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة

أولاً: عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ نعالج الحالة كما يلي:

1. إذا كانت البسط والمقام كثيرتا حدود: التحليل والاختصار ثم التعويض
2. إذا احتوت الدالة على جذر: نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ونقوم بالتحليل والاختصار ثم التعويض

ثانيا: عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ نتبع ما يلي:
نقسم كل حد من حدود البسط والمقام على x بأكبر أس أو نستخدم النتيجة التالية إذا كان البسط والمقام كثيرتا حدود.

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتا حدود و $x \to \infty$ فان:

إذا كانت درجة البسط <u>أقل</u> من درجة المقام.	$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
إذا كانت درجة البسط <u>تساوي</u> درجة المقام.	نضع معامل x بأكبر أس في البسط ، و نضع معامل x بأكبر أس في المقام
إذا كانت درجة البسط <u>أكبر</u> من درجة المقام.	$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

إيجاد القيم العظمى والصغرى للدالة:

أسلوب المشتقة الثانية:

الخطوات :

أ- إيجاد المشتقة الأولى للدالة ($f'(x)$).

ب- نضع $f'(x) = 0$ لإيجاد قيم x التي تحقق المعادلة (القيم الحرجة).

ج- إيجاد المشتقة الثانية للدالة ($f''(x)$).

عند القيمة الحرجة $x = x_1$ تكون للدالة ......

i. قيمة صغرى محلية إذا كانت $f''(x_1) > 0$

ii. قيمة عظمى محلية إذا كانت $f''(x_1) < 0$

iii. ويفشل الاختبار إذا كانت $f''(x_1) = 0$

مشتقة الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

مشتقة الدوال الاسية:

$y=e^{x}$	$\frac{dy}{dx}=e^{u}.\frac{du}{dx}$
$y=a^{x}$	$\frac{dy}{dx}=a^{u}.\ln a.\frac{du}{dx}$

مشتقة الدوال اللوغاريتمية:

$y=\ln x$ أما في حالة الدالة $y=\ln u$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}$
$y=\log_{a}x$ اما في لوغاريتم الدالة $y=\log_{a}u$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ln a}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}.\frac{1}{\ln a}$

مشتقة الدوال المثلثية:

$y=\sin x$	$\frac{dy}{dx}=\cos u.\frac{du}{dx}$
$y=\cos x$	$\frac{dy}{dx}=-\sin u.\frac{du}{dx}$
$y=\tan x$	$\frac{d}{dx}(\tan u)=\sec^{2}u.\frac{du}{dx}$
$y=\sec x$	$\frac{d}{dx}(\sec u)=\sec u.\tan u.\frac{du}{dx}$
$y=\csc x$	$\frac{d}{dx}(\csc u)=-\csc u.\cot u.\frac{du}{dx}$
$y=\cot x$	$\frac{d}{dx}(\cot u)=-\csc^{2}u.\frac{du}{dx}$

التكامل

أولا: التكامل الغير محدد:

التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق ، وتسمى عملية ايجاد y إذا علمت y' بعملية التكامل . ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل. فإذا كانت f دالة للمتغير x، فتكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل $\int f(x).dx$ ، حيث الرمز $\int$ يدل على عملية التكامل غير المحدد وان dx تدل على أن هذه العملية تجرى بالنسبة للمتغير x .

1. $\int dx=x+c$
2. $\int a\,dx=ax+c$
3. $\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\,,n\neq-1$
4. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$
5. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
6. $\int e^{x}dx=e^{x}+c$
7. $\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c\,,x\neq0$
8. $\int\sin x\,dx=-\cos x+c$
9. $\int\cos x\,dx=\sin x+c$
10. $\int\sec^{2}x\,dx=\tan x+c$
11. $\int\csc^{2}x\,dx=-\cot x+c$
12. $\int\sec x\tan x\,dx=\sec x+c$
13. $\int\csc x\cot x\,dx=-\csc x+c$

ملاحظات :

$$1.\ \int [f(x)]^n . f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c\ , n \neq -1$$

$$2.\ \int [f(x)]^n . f'(x)\,dx = \ln|f(x)| + c\ , n = -1$$

$$3.\ \int f'(x).e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

ثانيا: التكامل المحدد

إذا كانت g(x) دالة بحيث $g'(x) = f(x)$ فان:

$$\int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$$

ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدد للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ و يسمى a بالحد الأدنى و b بالحد الأعلى أو يسميان معاً بحدي التكامل.

بعض خواص التكامل المحدد:

$$1.\ \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$2.\ \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3.\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$4.\ \int_c^d f(x)dx = -\int_d^c f(x)dx$$

$$5.\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$