المحاضرة التاسعة

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة

(حالات عدم التعيين) والاتصال

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

الكمية الغير معينة هي الكمية التي ليس لها جواب محدد.

من أهم حالات عدم التعيين التي تظهر عند حساب النهايات هي:

$\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

يمكن إزالة حالة عدم التعيين بإحدى الطرق التالية:

أولاً: عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ نعالج الحالة كما يلي:

أ- إذا كانت البسط والمقام كثيرتا حدود:

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

التحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

1. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$$

الحل:

بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(-1)^2-1}{-1+1}=\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

تابع: النهايات:

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to -1}(x-1)=-1-1=-2$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

الحل:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x - 3)}(x + 3)}{\cancel{x - 3}} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

الحل:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{1^2 - 3 \times 1 + 2}{1 - 1} = \frac{1 - 3 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} (x-2) = 1 - 2 = -1$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{2x}$$

الحل:

كمية غير معينة

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{2x}=\frac{0^2+0}{2\times 0}=\frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}\times 2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ب- إذا احتوت الدالة على جذر:

نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ونقوم بالتحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

$$1. \quad \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

الحل:

كمية غير معينة

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9} = \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط $\left(\sqrt{x}+3\right)$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}$$

$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2. \quad \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

الحل:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2} = \frac{\sqrt{4}-2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2} = \frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط $\left(\sqrt{x+2}+2\right)$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ثانياً: عندما $x \to \infty$

عندما تكون نتيجة التعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ نتبع ما يلي:

نقسم كل حد من حدود البسط والمقام على x بأكبر أس أو نستخدم النتيجة التالية إذا كان البسط والمقام كثيرتا حدود.

نتيجة:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتا حدود و$x \to \infty$ فان:

$$1- \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

$$2- \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في البسط}}{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في المقام}}$$

إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام.

$$3- \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

ملاحظة:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right]^n=0$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right]^3=0$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

1. $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5}$$

الحل:

بما أن درجة البسط = درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5} = \frac{1}{3}$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+2x+1}$$

الحل:

بما أن درجة البسط أقل من من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2+2x+1} = 0$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

3. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+5}$$

الحل:

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^2+5} = \infty$$

تابع: نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

4. $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2}{2x^3+7}$$

الحل:

بما أن درجة البسط = من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2}{2x^3+7}=\frac{5}{2}$$

تابع: تمارين:

أوجد النهايات التالية:

1. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16}$

2. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6}$

3. $\lim_{x \to -4} \frac{x + 4}{x^2 + 5x + 4}$

4. $\lim_{x \to 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9}$

تابع: تمارين:

5. $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1}$$

6. $$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 4}$$

7. $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 6x - 21}{x^2 + 1}$$

الاتصال:

تعريف:

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في نقطة a إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

أ- الدالة معرفة في a أي أن f(a) معرفة

ب- $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة

ج- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

تابع: الاتصال:

مثال(١):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} x-9 & , x\neq -3 \\ -6 & , x=-3 \end{cases}$$

متصلة في x=-3 ؟

تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(-3) = -6$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} x - 9 = -3 - 9 = -12$$

بما أن

$$\lim_{x\to -3} f(x) \neq f(-3)$$

اذاً الدالة غير متصلة في x=-3

تابع: الاتصال:

مثال(٢):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} 6x & , 0<x<5 \\ 25+2x & , \quad x\geq 5 \end{cases}$$

متصلة في x=5 ؟

تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(5) = 25 + 2\times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5}(25 + 2x) = 25 + 2\times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5} 6x = 6\times 5 = 30$$

بما أن

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) \neq \lim_{x\to 5^-} f(x)$$

اذاً

$\lim_{x\to 5} f(x)$ غير موجودة

اذاً الدالة غير متصلة في x=5

تابع: الاتصال:

مثال(٣):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} 5x^2-3 & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

متصلة في x=0 ؟

تابع: الاتصال:

الحل:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (5x^2 - 3) = 5(0)^2 - 3 = -3$$

بما أن

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

اذاً الدالة غير متصلة في x=0

تابع: الاتصال:

مثال(٤):

أثبت أن الدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ غير متصلة في x=-2

الحل:

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{4 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$ غير معرفة

اذاً الدالة غير متصلة في x=-2

تمارين:

بين فيما إذا كانت الدالة المعطاة متصلة أو غير متصلة في العدد x المعطى

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 2+x & , x<2 \\ 2-x & , x \geq 2 \end{cases}$$

في x=2

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq -1 \\ x-1 & , x<-1 \end{cases}$$

في x=-1

تمارين:

3. $$f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\le 1 \\ 2 & , x>1 \end{cases}$$

في x=1

4. $$f(x)=\begin{cases} x+1 & , x<2 \\ 1 & , x=2 \\ 5-x & , x>2 \end{cases}$$

في x=2

تمت

بحمد الله