المحاضرة الثانية عشرة

التكامل

التكامل:

التكامل غير المحدد:

التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق ، وتسمى عملية ايجاد y إذا علمت y' بعملية التكامل . ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل. فإذا كانت f دالة للمتغير x، فتكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل $\int f(x)\,dx$ ، حيث الرمز $\int$ يدل على عملية التكامل غير المحدد وان dx تدل على أن هذه العملية تجرى بالنسبة للمتغير المستقل x .

تابع: التكامل:

قواعد التكامل:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \,, n \neq -1$ حيث c ثابت التكامل

2. $\int k\, dx = kx + c$ حيث k أي عدد حقيقي

3. $\int dx = x + c$

تابع: التكامل:

4. $\int [kf(x)]dx = k\int f(x)\, dx$ حيث k أي عدد حقيقي

5. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

6. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

تابع: التكامل:

7. $\int e^x dx = e^x + c$

8. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \; , x \neq 0$

9. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

تابع: التكامل:

10. $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

11. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

12. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

تابع: التكامل:

13. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

14. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

تابع: التكامل:

أمثلة:

1. $\int 5dx = 5x + c$

2. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$

3. $\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$

4. $\int (7x+3)dx = \frac{7x^2}{2} + 3x + c$

تابع: التكامل:

$$5.\quad \int (3\sin x + 2x)dx = -3\cos x + \frac{2x^2}{2} + c$$

$$= -3\cos x + x^2 + c$$

$$6.\quad \int (x^{\frac{1}{2}} + 4)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 4x + c$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + c$$

تابع: التكامل:

$$7.\quad \int (4e^x + x^{-1})dx = \int \left(4e^x + \frac{1}{x}\right)dx = 4e^x + \ln|x| + c$$

$$8.\quad \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin x}.\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

تابع: التكامل:

$$9. \quad \int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4}\,dt = \int (t^{-2} - 2)\,dt$$

$$= \frac{t^{-2+1}}{-2+1} - 2t + c = -t^{-1} - 2t + c$$

$$10. \quad \int (x + \sec^2 x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \tan x + c$$

تابع: التكامل:

$$11. \quad \int \left(\frac{x^3 + 2x - 7}{x} \right) dx = \int \left(x^2 + 2 - \frac{7}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 2x - 7\ln|x| + c$$

تمارين

١. أوجد ناتج التكاملات الآتية:

i. $\int \left(5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6\right)dx$

ii. $\int \left(x^{1/2} - 3x^{2/3} + 5x^{-1/2}\right)dx$

iii. $\int 2x dx$

تمارين

v. $\int (3\cos x + 2x)dx$

vi. $\int \left(\sec^2 x - 1\right)dx$

vii. $\int -2e^x dx$

viii. $\int \frac{x^5 + 2}{x^3}dx$

المحاضرة الثالثة عشر

التكامل بالتعويض

وحل المعادلات التفاضلية

التكامل بالتعويض:

اذا كانت $\frac{d}{dx}[F(g(x))] = f(g(x))g'(x)$ بفرض $f(g(x)) = F'(g(x))$

فان

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$$

يمكن ايجاد التكامل أعلاه بأتباع الخطوات التالية

بفرض ان

$$\boxed{\begin{array}{l} u = g(x) \\ \dfrac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)dx \end{array}}$$

اذاً

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = \int f(u)du = F(u) + c$$

أمثلة: أوجد التكاملات التالية:

1. $\int (x^2+1)^{50}.2x\,dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2+1 \\ du &= 2xdx \end{aligned}}$$

$$\int (x^2+1)^{50}.2xdx = \int u^{50}\,du = \frac{u^{51}}{51}+c$$

$$= \frac{1}{51}(x+1)^{51}+c$$

تابع: التكامل:

2. $\int (x^2+1)^3\,x\,dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2+1 \\ du &= 2x\,dx \end{aligned}}$$

$$\int (x^2+1)^3\,x\,dx = \frac{1}{2}\int 2(x^2+1)^3\,x\,dx = \frac{1}{2}\int u^3\,du$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{u^4}{4}+c$$

$$= \frac{1}{8}(x^2+1)^4+c$$

تابع: التكامل:

3. $\int \sin x \cos x \, dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x \, dx \end{array}}$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

تابع: التكامل:

4. $\int x \cos(x^2) \, dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x \, dx \end{array}}$$

$$\int x \cos(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int \cos u \, du = \frac{1}{2} \sin u + c$$

$$= \frac{1}{2} \sin(x^2) + c$$

تابع: التكامل:

5. $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 1 + x^4 \\ du = 4x^3\,dx \end{array}}$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+x^4}\,4x^3dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{4}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|1+x^4\right| + c$$

تابع: التكامل:

6. $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 1 + x^2 \\ du = 2x\,dx \end{array}}$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,2x dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c$$

$$= \ln\left|1+x^2\right| + c$$

تابع: التكامل:

7. $\int e^{\sin x} \cos x \, dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= \cos x \, dx \end{aligned}}$$

$$\int e^{\sin x} \cos x \, dx = \int e^{u} \, du = e^{u} + c$$
$$= e^{\sin x} + c$$

تابع: التكامل:

8. $\int x e^{x^2} \, dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2 \\ du &= 2x \, dx \end{aligned}}$$

$$\int x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int 2 x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int e^{u} \, du = \frac{1}{2} e^{u} + c$$
$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

تابع: التكامل:

9. $\int x^2 e^{3x^3} dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 3x^3 \\ du &= 9x^2\ dx \end{aligned}}$$

$$\int x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9}\int 9x^2 e^{3x^3} dx = \frac{1}{9}\int e^u\ du = \frac{1}{9}e^u + c$$

$$= \frac{1}{9}e^{3x^3} + c$$

تابع: التكامل:

حل المعادلات التفاضلية:

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = xy^{-2}$

الحل:

نفصل المتغيرين x، y عن بعضهما بحيث يصبح تفاضل كل منهما مضروباً في دالة لذلك المتغير فقط، كما نبين أدناه.

$$\frac{dy}{dx} = xy^{-2} = \frac{x}{y^2}$$

$$y^2 dy = xdx$$

تابع: التكامل:

بإجراء التكامل للطرفين

$$\int y^{2} dy = \int x dx$$

$$\frac{y^{3}}{3} = \frac{x^{2}}{2} + c$$

تابع: التكامل:

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 4x^{3}y^{3}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^{3}y^{3} = \frac{4x^{3}}{y^{-3}}$$

$$y^{-3} dy = 4x^{3} dx$$

تابع: التكامل:

$$\int y^{-3}\,dy = \int 4x^{3}\,dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = \frac{4x^{4}}{4} + c$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = x^{4} + c$$

تمارين

١. أوجد التكاملات التالية:

i. $\int \cos 3x\,dx$

ii. $\int \left(\sec^{2} 2x - 1\right) dx$

iii. $\int e^{2x}\,dx$

iv. $\int \frac{x^{2}\,dx}{x^{3}+1}$ ، $x \neq -1$

تمارين

٢. حل المعادلة التفاضلية المعطاة:

i. $\dfrac{dy}{dx} = 2x + 3$

ii. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$

iii. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

تمت
بحمد الله

المحاضرة الرابعة عشر

التكامل المحدد

التكامل المحدد:

إذا كانت g(x) دالة بحيث $g'(x) = f(x)$ فان:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[g(x)\right]_a^b = g(b) - g(a)$$

ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدد للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ و يسمى a بالحد الأدنى و b بالحد الأعلى أو يسميان معاً بحدي التكامل.

تابع: التكامل المحدد:

مثال:

أوجد $\int_1^3 x^3 dx$

الحل:

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81-1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

تابع: التكامل المحدد:

بعض خواص التكامل المحدد:

1. $\int_a^b [kf(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx$

2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

تابع: التكامل المحدد:

$$4.\quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$5.\quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$6.\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

تابع: التكامل المحدد:

أمثلة:

أوجد التكاملات التالية:

$$1.\quad \int_0^3 2\,dx$$

الحل:

$$\int_0^3 2\,dx = [2x]_0^3 = 2\times 3 - 0 = 6$$

تابع: التكامل المحدد:

2. $\int_0^2 (x+6)dx$

الحل:

$$\int_0^2 (x+6)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2$$
$$= \left[\frac{2^2}{2} + 6(2)\right] - 0$$
$$= 2 + 12 = 14$$

تابع: التكامل المحدد:

3. $\int_1^3 (3x^2 - 4x - 5)dx$

الحل:

$$\int_1^3 (3x^2 - 4x - 5)dx = \left[x^3 - 2x^2 - 5x\right]_1^3$$
$$= \left[3^3 - 2(3)^2 - 5(3)\right] - \left[1^3 - 2(1)^2 - 5(1)\right]$$
$$= [27 - 18 - 15] - [1 - 2 - 5]$$
$$= -6 + 6 = 0$$

تابع: التكامل المحدد:

4. $\int_{-2}^{2} (5x+4)dx$

الحل:

$$\int_{-2}^{2} (5x+4)dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\frac{5(2)^2}{2} + 4(2)\right] - \left[\frac{5(-2)^2}{2} + 4(-2)\right]$$

$$= [10+8] - [10-8]$$

$$= 18 - 2 = 16$$

تابع: التكامل المحدد:

5. $\int_{0}^{2} (3x^2 + e^x)dx$

الحل:

$$\int_{0}^{2} (3x^2 + e^x)dx = \left[x^3 + e^x\right]_0^2$$

$$= \left[2^3 + e^2\right] - \left[0^3 + e^0\right]$$

$$= \left[8 + e^2\right] - [1]$$

$$= 8 + e^2 - 1 = 7 + e^2$$

تابع: التكامل المحدد:

6. $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$

الحل:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = [\ln x]_1^2$$

$$= \ln 2 - \ln 1$$

$$= \ln 2 - 0 = \ln 2$$

تابع: التكامل المحدد:

7. $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$

الحل:

$$\int_0^{\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= -\cos \pi - (-\cos 0)$$

$$= -(-1) + 1 = 2$$

تابع: التكامل المحدد:

8. $\int_0^2 (2x+1)^3\,dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 2x+1 \\ du &= 2\,dx \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow u = 1 \\ x = 2 &\Rightarrow u = 5 \end{aligned}}$$

تابع: التكامل المحدد:

$$\int_0^2 (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2(2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_1^5 u^3 du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^5 = \frac{1}{8}\left[5^4 - 1^4\right]$$

$$= \frac{1}{8}\times 624 = 78$$

تابع: التكامل المحدد:

9. $\int_{-1}^{2} 2(x^2-1)^4 x\,dx$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2-1 \\ du &= 2x\,dx \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x = -1 &\Rightarrow u = 0 \\ x = 2 &\Rightarrow u = 3 \end{aligned}}$$

تابع: التكامل المحدد:

$$\int_{-1}^{2} 2(x^2-1)^4 x\,dx = \int_{0}^{3} u^4\,du$$

$$\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^3 = \left[3^5 - 0^5\right]$$

$$= \frac{243}{5}$$

تابع: التكامل المحدد :

١٠. إذا كان $\int_{2}^{3} f(x)dx = 5$ ، $\int_{3}^{4} f(x)dx = 10$ فأوجد

$$i.\ \int_{2}^{4} f(x)dx \qquad ii.\ \int_{2}^{2} f(x)dx$$

$$iii.\ \int_{4}^{3} f(x)dx \qquad iv.\ \int_{2}^{3} 6f(x)dx$$

الحل:

$$i.\ \int_{2}^{4} f(x)dx = \int_{2}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx$$

$$= 5 + 10 = 15$$

$$ii.\ \int_{2}^{2} f(x)dx = 0$$

تابع: التكامل المحدد :

$$iii.\quad \int_4^3 f(x)\,dx = -\int_3^4 f(x)\,dx = -10$$

$$iv.\quad \int_2^3 6f(x)\,dx = 6\int_2^3 f(x)\,dx = 6\times 5 = 30$$

تمارين:

١. أوجد التكاملات التالية:

$$i.\quad \int_0^2 (5x^3 - 3x + 6)\,dx$$

$$ii.\quad \int_{-2}^3 7\,dx$$

$$iii.\quad \int_4^4 (x-16)\,dx$$

تابع: تمارين:

$$iv. \quad \int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)^3 x\,dx$$

$$v. \quad \int_{-1}^{2}(x^3+1)^2\,dx$$

$$vi. \quad \int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$$

تابع: تمارين:

$$vii. \quad \int_{-2}^{3}\left(6x^2-5\right)dx$$

$$viii. \quad \int_{2}^{10}\frac{1}{\sqrt{5x-1}}\,dx$$

$$ix. \quad \int_{0}^{\pi}\sec^2 x\,dx$$

مجهودي :

أختكم حقق أمنياتي