حل تمارين المحاظره العاشره

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$\boxed{y=\sqrt[5]{3x^2+4}}$$

الحل:

$$y=\left(3x^2+4\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}\left(3x^2+4\right)^{\frac{1}{5}-1}.\,6x=\frac{6}{5}x\left(3x^2+4\right)^{-\frac{4}{5}}$$

$$\boxed{y=\left(4x^2+5x-2\right)^8}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=8\left(4x^2+5x-2\right)^7.\,(8x+5)$$

$$=(64x+40)\left(4x^2+5x-2\right)^7$$

$$y = u^2 - u \quad , \quad u = 4x + 3$$

الحل:

$$\frac{dy}{du} = 2u - 1$$

$$\frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u - 1) \times 4 = 8u - 4 = 8(4x + 3) - 4$$

$$= 32x + 24 - 4 = 32x + 20$$

$$y = u + \frac{1}{u} \quad , \quad u = 5 - 2x$$

الحل:

$$\frac{dy}{du} = 1 - \frac{1}{u^2}$$

$$\frac{du}{dx} = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (1 - \frac{1}{u^2})(-2)$$

$$= (-2 + \frac{2}{u^2})$$

$$= \left(-2 + \frac{2}{(5-2x)^2} \right)$$

$$= \frac{-2(25 - 20x + 4x^2) + 2}{25 - 20x + 4x^2}$$

$$= \frac{-50 + 40x - 8x^2 + 2}{25 - 20x + 4x^2} = \frac{-8x^2 + 40x - 48}{4x - 20x + 25}$$

أوجد المشتقات الثلاث الاولى :

$$\boxed{y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1}$$

الحل:

$$y' = 12x^3 - 15x^2 + 14x$$

$$y'' = 36x^2 - 30x + 14$$

$$y''' = 72x - 30$$

أوجد المشتقات الثلاث الاولى :

$$\boxed{y = \frac{1}{3x+1}}$$

الحل:

$$y' = \frac{-1\times 3}{(3x+1)^2} = \frac{-3}{(3x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-(-3)(2(3x+1)\times 3)}{(3x+1)^4} = \frac{18(3x+1)}{(3x+1)^4} = \frac{18}{(3x+1)^3}$$

$$y''' = \frac{-18\times 3(3x+1)^2\times 3}{(3x+1)^6} = \frac{-162}{(3x+1)^4}$$

اذا كانت $y = 4x^2 - 3x^4$ فأوجد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8x - 12x^3$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 8(2) - 12(2)^3 = 16 - 96 = -80$$

حل تمارين المحاضرة الحادي عشرة الجزء الأول

أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$\boxed{y = e^{x^2-2x}}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2-2x}.(2x-2)$$

$$\boxed{y = (2x+3)e^{-2x}}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = (2x+3).e^{-2x}.(-2) + e^{-2x}.(2)$$
$$= (-4x-6)e^{-2x} + 2e^{-2x}$$

ملاحظة: تم تطبيق قانون مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$\boxed{y = e^{\cos x}}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x}.(-\sin\ x)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(e^{3x} + e^{-3x}\right)}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{3x}.(3) + e^{-3x}.(-3)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3e^{3x} - 3e^{-3}\right)$$

$$\boxed{y=\log_2 3x}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x}.\frac{1}{\ln 2}.3=\frac{1}{x\ln x}$$

$$\boxed{y=7^{x^3}}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=7^{x^3}.\ln 7.(3x^2)$$

$$\boxed{y = \ln(\sin x)}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin\ x} . \cos\ x = \frac{\cos\ x}{\sin\ x} = \cot\ x$$

$$\boxed{y = x^2 e^{2x}}$$

الحل:

$$\frac{dyy}{dx} = x^2 . e^{2x} . (2) + e^{2x} . (2x)$$

$$= 2x^2 e^{2x} + 2xe^{2x}$$

$$y = e^{2x}\cos 3x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}.(-\sin 3x)(3) + \cos 3x(e^{2x})(2)$$

$$= -3e^{2x}\sin 3x + 2e^{2x}\cos 3x$$

$$9x^2 + 4y^2 = 40$$

الحل:

$$18x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$8y\frac{dy}{dx} + = -18x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-18x}{8y} = -\frac{9x}{4y}$$

$$\boxed{y^4+3y-4x^3=5x+1}$$

الحل:

$$4y^3\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}-12x^2=5$$

$$4y^3\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}=12x^2+5$$

$$\left(3y^3+3\right)\frac{dy}{dx}=12x^2+5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12x^2+5}{3y^3+3}$$

$$\boxed{5x^2+2x^2y+y^2=8}$$

الحل:

$$10x+2x^2\frac{dy}{dx}+4xy+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=-10x-4xy$$

$$\left(2x^2+2y\right)\frac{dy}{dx}=-10x-4xy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-10x-4xy}{2x^2+2y}=\frac{-2(5x+2xy)}{2(x^2+y)}=\frac{-(5x+2xy)}{(x^2+y)}$$

إذا كانت $y^2-4x^2=5$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=-1$ و $y=3$

الحل:

$$2y\frac{dy}{dx}-8x^2=0$$

$$2y\frac{dy}{dx}=8x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8x}{2y}=\frac{4x}{y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1,\,y=3}=\frac{4\times -1}{3}=\frac{-4}{3}$$

إذا كانت $xy^2+3y=27$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x=2$ و $y=3$

الحل:

$$2xy\frac{dy}{dx}+y^2+3\frac{dy}{dx}=0$$

$$2xy\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}=-y^2$$

$$(2xy+3)\frac{dy}{dx}=-y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2}{2xy+3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2,\,y=3}=\frac{-(3)^2}{2\times 2\times 3+3}=\frac{-9}{15}=\frac{-3}{5}$$

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اذا كانت:

$$\boxed{z = x^3 - 2xy + y^3}$$

الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 3y^2$$

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اذا كانت:

$$\boxed{z = xy - \ln xy}$$

الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{1}{xy}.y = y - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{1}{xy}.x = x - \frac{1}{y}$$

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اذا كانت:

$$\boxed{z = x \ln y + y \ln x - xe^{xy}}$$

الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y + \frac{y}{x} - (xe^{xy} \times y + e^{xy} \times 1)$$

$$= \ln y + \frac{y}{x} - xye^{xy} - e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} + \ln x - xe^{xy} \times x$$

$$= \frac{x}{y} + \ln x - x^2 e^{xy}$$

تابع حل تمارين محاظرة الحادي عشرة الجزء الثاني

ما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ للدوال التالية:

$$\boxed{i.\ \ f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x}$$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0$$

$$3(x^2 - 6x + 8) = 0 \qquad \div 3$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4) = 0$$

إما $(x-2) = 0$

اذاً $x = 2$

أو $(x-4) = 0$

اذاً $x = 4$

$$f''(x) = 6x - 18$$

عند $x = 2$

$$f''(2) = 6 \times 2 - 18 = 12 - 18 = -6$$

$$\because f''(2) < 0$$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 2$ وهي:

$$f(2) = 2^3 - 9 \times 2^2 + 24 \times 2$$
$$= 8 - 36 + 48 = 56 - 36 = 20$$

عند $x = 4$

$$f''(4) = 6 \times 4 - 18 = 24 - 18 = 6$$

$$\because f''(4) > 0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 4$ وهي:

$$f(4) = 4^3 - 9 \times 4^2 + 24 \times 4$$
$$= 64 - 144 + 96 = 160 - 144 = 16$$

$$ii.\ \ f(x)=x^3+6x^2+9x+3$$

الحل:

$$f'(x)=3x^2+12x+9$$

$$3x^2+12x+9=0$$

$$3(x^2+4x+3)=0 \qquad \div 3$$

$$x^2+4x+3=0$$

$$(x+1)(x+3)=0$$

إما $(x+1)=0$

اذاً $x=-1$

أو $(x+3)=0$

اذاً $x=-3$

$$f''(x)=6x+12$$

عند $x = -1$

$$f''(1) = 6(-)1 + 12 = -6 + 12 = 6$$

$$\because f''(1) > 0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = -1$ وهي:

$$f(-1) = (-1)^3 + 6(-)1^2 + 9(-1) + 3$$
$$= -1 + 6 - 9 + 3 = -1$$

عند $x = -3$

$$f''(-3) = 6(-3) + 12 = -18 + 12 = -6$$

$$\because f''(-3) < 0$$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -3$ وهي:

$$f(-3) = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) + 3$$
$$= -27 + 54 - 27 + 3 = 3$$

$iii.\ f(x)=x^2+2x+18$

الحل:

$$f'(x) = 2x + 2$$
$$2x + 2 = 0$$
$$2(x + 1) = 0 \qquad \div 2$$
$$x + 1 = 0$$
$$x = -1$$
$$f''(x) = 2$$

عند $x = -1$

$$f''(1) = 2$$

$$\because f''(1) > 0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ وهي:

$$f(2) = (2)^2 + 2 \times 2 + 18$$
$$= 4 + 4 + 18 = 26$$

أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة :

$$\boxed{f(x)=2x^3-3x^2-12x+5}$$

الحل:

$$f'(x)=6x^2-6x-12$$

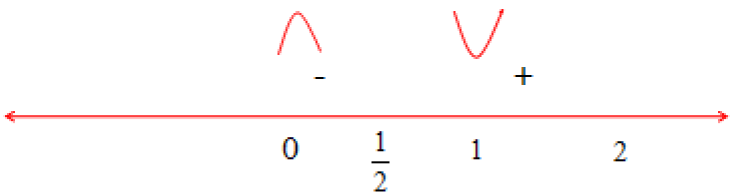
$$f''(x)=12x-6$$

$$12x-6=0$$

$$12x=6$$

$$x=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

تابع: الحل:



$$f''(0)=12(0)-6=-6$$

$$f''(1)=12(1)-6=12-6=+6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد $\frac{1}{2}$ اذا توجد نقطة انقلاب عند $x=\frac{1}{2}$ وهي $\left(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})\right)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12\times\frac{1}{2} + 5$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 6 + 5 = \frac{-1}{2} - 1 = \frac{-1-2}{2} = \frac{-3}{2}$$

نقطة الانقلاب هي $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة :

$$\boxed{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}$$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$$

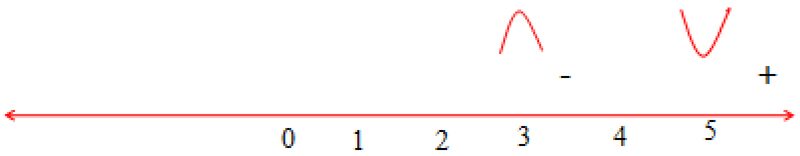
$$f''(x) = 6x - 24$$

$$6x - 24 = 0$$

$$6x = 24$$

$$x = \frac{24}{6} = 4$$

تابع: الحل:



$$f''(3) = 6(3) - 24 = 18 - 24 = -6$$

$$f''(5) = 6(5) - 24 = 30 - 24 = +6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد 4 اذا توجد نقطة انقلاب عند $x = 4$ وهي $(4, f(4))$

$$f(4) = (4)^3 - 12 \times (4)^2 + 36(4)$$
$$= 64 - 192 + 144 = 208 - 192 = 16$$

نقطة الانقلاب هي $(4,16)$

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education
[١٠]
جامعة الملك فيصل
King Faisal University