المحاضرة الخامسة

المتباينات والقيمة المطلقة

المتباينات:

أي تعبير يتضمن احد الرموز $<$ ، $\leq$ ، $>$ ، $\geq$ يسمى متباينة. فمثلا كل مما يلي هي متباينات:

$(i)\ 3x+4 \leq 8-2x$

$(ii)\ \dfrac{2x+4}{x+5} < 3$

$(iii)\ (x+4)(x-1) > 9$

تستخدم المتباينات في تعريف نوع خاص من المجموعات الجزئية من الأعداد الحقيقية والتي تسمى الفترة. وهناك أربعة أنواع من الفترات تعرف كما يلي:

١. فترة مغلقة $[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$

٢. فترة مفتوحة $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$

٣. نصف مغلقة (نصف مفتوحة) $[a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$

٤. فترة نصف مفتوحة (نصف مغلقة) $(a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$

خواص المتباينات:

١. $a^2 \geq 0$ لكل $a \in R$

٢. إذا كانت a<b و b<c فان a<c

٣. إذا كانت a<b فان a+c<b+c وكذلك a-c<b-c

٤. إذا كانت a<b وكانت c>0 فان ac<bc

٥. إذا كانت a<b وكانت c<0 فان ac>bc

٦. إذا كانت a>0 فان $\frac{1}{a} > 0$

٧. إذا كانت a>0 و b>0 بحيث a<b فان $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

حل المتباينات:

حل المتباينة هو القيمة أو مجموعة القيم التي تجعل المتباينة صحيحا.

مثال(١): حل المتباينة $4x+7 \geq 2x-3$

الحل:

$4x+7-7 \geq 2x-3-7$

$4x \geq 2x-10$

$4x-2x \geq -10$

$$2x \geq -10$$

$$\frac{1}{2} \times 2x \geq \frac{1}{2} \times -10$$

$$x \geq -5$$

مجموعة الحل هي الفترة $[-5,\infty)$.

مثال(٢): حل المتباينة $-5 < 3x - 2 < 1$

الحل:

$$-5 + 2 < 3x < 1 + 2$$

$$-3 < 3x < 3$$

$$\frac{1}{3} \times -3 < \frac{1}{3} \times 3x < \frac{1}{3} \times 3$$

$$-1 < x < 1$$

مجموعة الحل هي الفترة $(-1,1)$.

مثال(٣): حل المتباينة $x^2 + x - 12 > 0$

الحل:

$$(x-3)(x+4) > 0$$

الحالة الأولى $(x-3) > 0$ و $(x+4) > 0$

اذا $x > 3$ و $x > -4$

أي أن $x > 3$

الحالة الثانية $(x-3) < 0$ و $(x+4) < 0$

اذا $x < 3$ و $x < -4$

أي أن $x < -4$

اذا مجموعة الحل هي $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

تمارين:

حل المتباينات التالية:

1. $5 > 2 - 9x > -4$
2. $5x - 6 > 11$
3. $-6 \leq 1 - 3x \leq 2$
4. $4 \leq 2x + 2 \leq 10$
5. $3x - 5 < 10$
6. $x^2 + x > 12$
7. $3 \leq 4x - 7 < 9$
8. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \leq 2$

القيمة المطلقة:

تعريف:

القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي (ويرمز له بالرمز | x |) تعرف كالآتي:

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

خواص القيمة المطلقة:

١. $|x| < a$ تكافئ $-a < x < a$ حيث $a > 0$

٢. $|x| \leq a$ تكافئ $-a \leq x \leq a$ حيث $a > 0$

٣. $|x| > a$ تكافئ $x > a$ أو $x < -a$ حيث $a > 0$

٤. $|x| \geq a$ تكافئ $x \geq a$ أو $x \leq -a$ حيث $a > 0$

٥. $|ab| = |a||b|$

مثال (١):

حل المتباينة $|2x+4| \leq 3$

الحل:

$$|2x+4| \leq 3 \quad \Rightarrow \quad -3 \leq 2x+4 \leq 3$$
$$-7 \leq 2x \leq -1$$
$$-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

مجموعة الحل هي الفترة $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

مثال(٢):

حل المتباينة $|2x-5| > 3$

الحل:

$$2x-5 > 3 \quad \text{أو} \quad 2x-5 < -3$$
$$2x > 8 \quad \text{أو} \quad 2x < 2$$
$$x > 4 \quad \text{أو} \quad x < 1$$

مجموعة حل المتباينة هي $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

مثال(٣):

حل المتباينة $\left|\frac{3x+1}{2}\right| < 1$

الحل:

$$-1 < \frac{3x+1}{2} < 1$$

$$-2 < 3x+1 < 2$$

$$-3 < 3x < 1$$

$$-1 < x < \frac{1}{3}$$

مجموعة الحل هي $(-1, \frac{1}{3})$

تمارين:

حل المتباينات التالية:

1. $|x + 2| < 1$
2. $|3x| > 12$
3. $|3x - 2| \leq 4$
4. $|1 - 2x| > 3$
5. $|2x - 3| < 7$
6. $|3x + 4| \geq 5$
7. $|2x| < 6$
8. $\left|\frac{7 - 3x}{2}\right| \leq 1$