المحاضرة الرابعة عشر
التكامل المحدد

التكامل المحدد:

إذا كانت g(x) دالة بحيث $g'(x)=f(x)$ فان:

$$\int_a^b f(x)dx=[g(x)]_a^b=g(b)-g(a)$$

ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدد للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ و يسمى a بالحد الأدنى و b بالحد الأعلى أو يسميان معاً بحدي التكامل.

مثال:

أوجد $\int_1^3 x^3dx$

الحل:

$$\int_1^3 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3=\frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=\frac{81-1}{4}=\frac{80}{4}=20$$

بعض خواص التكامل المحدد:

1. $\int_a^b [kf(x)]dx=k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^a f(x)dx=0$
5. $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$
6. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

أمثلة:

أوجد التكاملات التالية:

1. $\int_0^3 2\,dx$

الحل:

$$\int_0^3 2\,dx=[2x]_0^3=2\times3-0=6$$

طلاب التعليم عن بعد - جامعة الملك فيصل > ادارة اعمال ١٤٣٣ > laly

2. $\int_0^2 (x+6)dx$

الحل:

$$\int_0^2 (x+6)dx = \left[\frac{x^2}{2}+6x\right]_0^2$$
$$= \left[\frac{2^2}{2}+6(2)\right]-0$$
$$= 2+12 = 14$$

3. $\int_1^3 (3x^2-4x-5)dx$

الحل:

$$\int_1^3 (3x^2-4x-5)dx = \left[x^3-2x^2-5x\right]_1^3$$
$$= \left[3^3-2(3)^2-5(3)\right]-\left[1^3-2(1)^2-5(1)\right]$$
$$= \left[27-18-15\right]-\left[1-2-5\right]$$
$$= -6+6 = 0$$

4. $\int_{-2}^2 (5x+4)dx$

الحل:

$$\int_{-2}^2 (5x+4)dx = \left[\frac{5x^2}{2}+4x\right]_{-2}^2$$
$$= \left[\frac{5(2)^2}{2}+4(2)\right]-\left[\frac{5(-2)^2}{2}+4(-2)\right]$$
$$= \left[10+8\right]-\left[10-8\right]$$
$$= 18-2 = 16$$

5. $\int_0^2 (3x^2+e^x)dx$

الحل:

$$\int_0^2 (3x^2+e^x)dx = \left[x^3+e^x\right]_0^2$$
$$= \left[2^3+e^2\right]-\left[0^3+e^0\right]$$
$$= \left[8+e^2\right]-\left[1\right]$$
$$= 8+e^2-1 = 7+e^2$$

6. $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

الحل:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^2$$
$$= \ln 2 - \ln 1$$
$$= \ln 2 - 0 = \ln 2$$

7. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

الحل:

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$
$$= -\cos\pi - (-\cos 0)$$
$$= -(-1) + 1 = 2$$

8. $\int_0^2 (2x+1)^3\,dx$

الحل:

$u = 2x+1$, $du = 2\,dx$, $x = 0 \Rightarrow u = 1$, $x = 2 \Rightarrow u = 5$

$$\int_0^2 (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2(2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_1^5 u^3 du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^5 = \frac{1}{8}\left[5^4 - 1^4\right]$$
$$= \frac{1}{8}\times 624 = 78$$

9. $\int_{-1}^2 2(x^2-1)^4 x\,dx$

الحل:

$u = x^2 - 1$, $du = 2x\,dx$, $x = -1 \Rightarrow u = 0$, $x = 2 \Rightarrow u = 3$

$$\int_{-1}^2 2(x^2-1)^4 x\,dx = \int_0^3 u^4\,du$$
$$\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^3 = \left[3^5 - 0^5\right]$$
$$= \frac{243}{5}$$

تابع التكامل المحدد

١٠. إذا كان $\int_2^3 f(x)dx = 5$ ، $\int_3^4 f(x)dx = 10$ فأوجد:

$i.\ \int_2^4 f(x)dx$ $ii.\ \int_2^2 f(x)dx$ $iii.\ \int_4^3 f(x)dx$ $iv.\ \int_2^3 6f(x)dx$

الحل:

$$i.\ \int_2^4 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$$
$$= 5 + 10 = 15$$

$$ii.\ \int_2^2 f(x)dx = 0$$

$$iii.\ \int_4^3 f(x)dx = -\int_3^4 f(x)dx = -10$$

$$iv.\ \int_2^3 6f(x)dx = 6\int_2^3 f(x)dx = 6\times 5 = 30$$

تمارين:

أوجد التكاملات التالية:

$i.\ \int_0^2 (5x^3 - 3x + 6)dx$ $ii.\ \int_{-2}^3 7dx$ $iii.\ \int_4^4 (x-16)\,dx$ $iv.\ \int_{-2}^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right)^3 x\,dx$

$v.\ \int_{-1}^2 (x^3+1)^2 dx$

$vi.\ \int_0^{\pi} \cos x\,dx$ $vii.\ \int_{-2}^3 (6x^2 - 5)dx$ $viii.\ \int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{5x-1}}dx$ $ix.\ \int_0^{\pi} \sec^2 x\,dx$

تم الانتهاء والحمد لله

اتمنى للجميع التوفيق والنجاح

طلاب التعليم عن بعد - جامعة الملك فيصل > ادارة اعمال ١٤٣٣ > laly