# حلول التمارين



١. إذا كانت المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من 10، وكانت $A=\{1,3,5\}$ ، $B=\{2,4,6\}$

كون المجموعات الآتية:

$(i)\ A\cup B \quad (ii)\ A\cap B \quad (iii)\ \overline{A} \quad (iv)\ \overline{A\cup B} \quad (v)\ \overline{A\cap B}$

الحل:

$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ و $B=\{2,4,6\}$ ، $A=\{1,3,5\}$

$$(i)\ A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$$

$$(ii)\ A\cap B=\phi$$

$$(iii)\ \overline{A}=\{2,4,6,7,8,9\}$$

$$(iv)\ \overline{A\cup B}=\{7,8,9\}$$

$$(v)\ \overline{A\cap B}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}=U$$



٢. للدالة g(x)=x +1 أوجد $2[g(2)]^2-g(2)+5$

الحل:

$$g(2)=2+1=3$$

$$\begin{aligned}2[g(2)]^2-g(2)+5&=2[3]^2-3+5\\&=2(9)+2=18+2=20\end{aligned}$$

٣. للدالة $f(x)=2x^2-1$ أوجد $f(1)+f(2)+f(3)$

الحل:

$$f(1)=2(1)^2-1=2-1=1$$

$$f(2)=2(2)^2-1=8-1=7$$

$$f(3)=2(3)^2-1=18-1=17$$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)=1+7+17=25$$



٤. للدالة $f(x)=x^2+2x-3$ أوجد $f(2c-3)-5f(c)$

الحل:

$$f(2c-3)=(2c-3)^2+2(2c-3)-3$$
$$=4c^2-12c+9+4c-6-3=4c^2-8c$$

$$f(c)=c^2+2c-3$$

$$\therefore f(2c-3)-5f(c)=4c^2-8c-5(c^2+2c-3)$$
$$=4c^2-8c-5c^2-10c+15=-c^2-18c+15$$

٥. للدالة g(x)=x² -5x+8 أوجد $g(5a-2)+3g(2a)$

الحل:

$$g(5a-2)=(5a-2)^2-5(5a-2)+8$$
$$=25a^2-20a+4-25a+10+8=25a^2-45a+20$$

$$g(2a)=(2a)^2-5(2a)+8=4a^2-10a+8$$

$$\therefore g(5a-2)+3g(2a)=25a^2-45a+20+3(4a^2-10a+8)$$
$$=25a^2-45a+20+12a^2-30a+24=37a^2-75a+44$$



٦. اذا كان $f(x)=x^2-7x+2$ ، $g(x)=x+4$ ، فأوجد

$(i)\ (f+g)(x)$

$(ii)\ (f-g)(x)$

$(iii)\ (f\cdot g)(x)$

$(iv)\ \dfrac{f}{g}(x)$

$(v)\ (f\circ g)(x)$

## الحل:

$$(i)\,(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2-7x+2+x+4$$
$$=x^2-6x+6$$

$$(ii)\,(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$=x^2-7x+2-(x+4)$$
$$=x^2-7x+2-x-4$$
$$=x^2-8x-2$$

$$(iii)\,(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x^2-7x+2)(x+4)$$
$$=x^3+4x^2-7x^2-28x+2x+8$$
$$=x^3-3x^2-26x+8$$



$$(iv)\;\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-7x+2}{x+4}$$

$$(v)\,(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f(x+4)$$
$$=(x+4)^2-7(x+4)+2$$
$$=x^2+8x+16-7x-28+2$$
$$=x^2+x-10$$

٧. أوجد معكوس الدالة $g(x)=5x$

الحل:

$$g(x)=5x \rightarrow y=5x$$

$$x=5y$$

$$\frac{x}{5}=y$$

$$y=\frac{x}{5} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{5}$$



٨. أوجد معكوس الدالة $f(x)=\frac{x-4}{3}$

الحل:

$$f(x)=\frac{x-4}{3} \rightarrow y=\frac{x-4}{3}$$

$$x=\frac{y-4}{3}$$

$$3x=y-4$$

$$3x+4=y$$

$$y=3x+4 \rightarrow f^{-1}(x)=3x+4$$

٩- أوجد كل خط من الخطوط المستقيمة الذي يحقق الشروط المعطاة فيما يلي:

أ- المستقيم المار بالنقطة (1, -2) وميله m=-3
ب- المستقيم المار بنقطة الاصل وميله 2
ج- المستقيم المار بالنقطتين (3,4) و (7,2)
د- المستقيم الذي ميله m=-2 ومقطوعه الصادي b=3
ه- المستقيم الذي يمر (3,5) ويوازي المستقيم 3x+5y-2=0
و- المستقيم الذي يمر (3,2) وعمودي على المستقيم y=-3x+2

٩- أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذب معادلته 2x+7y=14

١٠. أوجد الميل والمقطوع الصادي للمستقيم 3x+5y=15



أ- المستقيم المار بالنقطة (1,-2) وميله يساوي m= -3 .

الحل:

$$m=-3\,,\;x_1=1\,,\;y_1=-2$$
$$y+2=-3(x-1)$$
$$y+2=-3x+3$$
$$y=-3x+3-2$$
$$y=-3x+1$$

ب - المستقيم المار بنقطة الاصل وميله 2

الحل:

$$m = 2, x_1 = 0, y_1 = 0$$

$$y - 0 = 2(x - 0)$$

$$\therefore y = 2x$$



ج. المستقيم المار بالنقطتين (3,4) و (7,2)

الحل:

$$x_1 = 3, y_1 = 4, x_2 = 7, y_2 = 2$$

$$\frac{y-4}{x-3} = \frac{2-4}{7-3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$2(y-4)=-1(x-3)$$

$$2y-8=-x+3$$

$$2y=-x+3+8=-x+11$$

$$y=\frac{-x+11}{2}$$



د. المستقيم الذي ميله m=-2 ومقطوعه الصادي b=3

**الحل:**

$$y=mx+b$$

$$\therefore\ y=-2x+3$$

هـ-المستقيم الذي يمر بالنقطة (3,5) يوازي على المستقيم 3x+5y-2=0

**الحل:**

نفرض ميل المستقيم 3x+5y-2=0 هو $m_1$ وميل المستقيم الموازي $m_2$

اذاً

$$m_1 = \frac{-a}{b}$$

$$a = 3,\ b = 5$$

$$m_1 = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$m_2 = m_1 = -\frac{3}{5}$$ (شرط التوازي)



$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$x_1 = 3\ ,\ y_1 = 5$$

$$y - 5 = -\frac{3}{5}(x-3) = -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5}$$

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} + 5 = -\frac{3}{5}x + \frac{9+25}{5}$$

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{34}{5}$$

و- المستقيم الذي يمر (3,2) وعمودي على المستقيم y=-3x+2

**الحل:**

نفرض ميل المستقيم y=-3x+2 هو $m_1$ وميل المستقيم العمودي عليه $m_2$

اذاً

$$m_1 = -3$$

$$m_1 \times m_2 = -1 \quad \text{(شرط التعامد)}$$

$$m_2 = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$



$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$x_1 = 3\,,\; y_1 = 2$$

$$y - 2 = \frac{1}{3}(x-3) = \frac{1}{3}x - 1$$

$$y = \frac{1}{3}x - 1 + 2$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x + 1$$

١٠- أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته 2x+7y=14

الحل:

المقطوع السيني للخط =a وهذا يعني أن الخط يمر بالنقطة (a,0)

$$2a+7(0)=14 \quad \Rightarrow a=7$$

المقطوع الصادي للخط =b وهذا يعني أن الخط يمر بالنقطة (0,b)

$$2(0)+7b=14 \quad \Rightarrow b=2$$



١١- أوجد الميل والمقطوع الصادي للمستقيم 3x+5y=15

الحل:

لإيجاد المطلوب نضع أولا المعادلة المعطاة على الصورة :

Y=mx+b

من المعادلة المعطاة نجد أن

$$5y=-3x+15$$

$$y=-\frac{3}{5}x+3$$

بمقارنة هذه المعادلة الأخيرة بالمعادلة y=mx+b

نجد أن

الميل هو $m=-\frac{3}{5}$ والمقطوع الصادي هو b=3



١٢. حل المتباينة $5>2-9x>-4$

**الحل:**

$$5-2>-9x>-4-2$$

$$3>-9x>-6$$

$$-\frac{1}{9}\times 3<x<-\frac{1}{9}\times -6$$

$$-\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$$

مجموعة الحل هي الفترة $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

١٣. حل المتباينة $4 \le 2x+2 \le 10$

**الحل:**

$$4-2 \le 2x+2-2 \le 10-2$$

$$2 \le 2x \le 8$$

$$\frac{1}{2}\times 2 \le \frac{1}{2}\times 2x \le \frac{1}{2}\times 8$$

$$1 \le x \le 4$$

مجموعة الحل هي الفترة $[1, 4]$



١٤. حل المتباينة $|3x| > 12$

**الحل:**

$3x < -12$ أو $3x > 12$

$\frac{1}{3}\times 3x < \frac{1}{3}\times -12$ أو $\frac{1}{3}\times 3x > \frac{1}{3}\times 12$

$x < -4$ أو $x > 4$

مجموعة الحل هي الفترة $(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$

١٥. هل الدالة $f(x)=3x^2-4x$ دالة زوجية؟

**الحل:**

$$f(-x)=3(-x)^2-4(-x)$$
$$=3x^2+4x$$
$$\neq f(x)$$

اذاً ليست زوجية.



١٦. هل الدالة $f(x)=3x^3-4x$ دالة فردية ؟

**الحل:**

$$f(-x)=3(-x)^3-4(-x)$$
$$=-3x^3+4x$$

$$
\begin{aligned}
-f(x) &= -(3x^2 - 4x) \\
&= -3x^2 + 4x \\
&= f(-x)
\end{aligned}
$$

اذاً فردية.



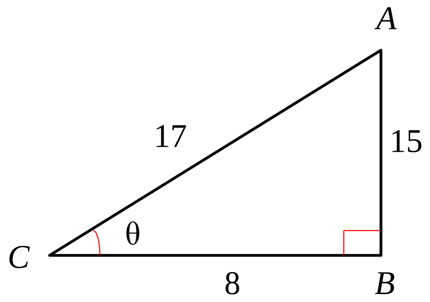
١٧. إذا كان $\tan\theta = \dfrac{15}{8}$

فأوجد $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\sec\theta$ ، $\csc\theta$ ، $\cot\theta$

## الحل:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{15}{8}}$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$
$$= 15^2 + 8^2$$
$$= 225 + 64 = 289$$
$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{289} = 17$$




$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{17}, \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{17}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{17}{8}, \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{17}{15}, \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{8}{15}$$



١٨. إذا دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D = 100 - 5P$ فأوجد

أ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 19$ .

ب) سعر وحدة السلعة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 50$ .

جـ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل، أي $P = 0$ .

# الحل:

أ- عندما $P = 19$

$$Q_D = 100 - 5 \times 19$$
$$= 100 - 95$$
$$= 5$$

ب- عندما $Q_D = 50$

$$Q_D = 100 - 5P$$
$$50 = 100 - 5P$$
$$5P = 100 - 50 = 50$$
$$\therefore P = \frac{50}{5} = 10$$



ج. عندما $P = 0$

$$Q_D = 100 - 5 \times 0$$
$$= 100$$

١٩. إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 3P - 4$ .
وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = 36 - 2P$ .
أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن



الحل:

يحدث التوازن عندما تتساوي الكميتان المطلوبة والمعروضة .

$$Q_D = Q_S$$
$$3P - 4 = 36 - 2P$$
$$3P + 2P = 36 + 4$$
$$5P = 40$$
$$\therefore P = \frac{40}{5} = 8$$

# تابع: الحل:

نعوض سعر التوازن في إحدى الدالتين، ولتكن دالة العرض

$$\therefore Q_S = 36 - 2(8)$$
$$= 36 - 16 = 20$$



٢٠. أوجد مجالات الدوال التالية:

I. $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$

II. $f(x) = \log(3x + 7)$

III. $f(x) = \dfrac{2x+8}{x+4}$

IV. $f(x) = \sqrt{x+1}$

V. $f(x)=\dfrac{3x+8}{x^3-1}$

VI. $f(x)=\begin{cases}1-x & ,0\le x<1\\ 2x-1 & ,\ 1\le x\le 2\end{cases}$



I. $f(x)=3x^2+5x+2$

الحل:

مجالها كافة الاعداد الحقيقية ( $R$ ) لانها دالة كثيرة الحدود.

II. $f(x)=\log(3x+7)$

الحل:

بسبب وجود اللوغاريتم يجب أن يكون:

$$3x+7>0$$

$$3x>-7$$

$$x>-\frac{7}{3}$$

اذا المجال هو الفترة $(-\frac{7}{3},\infty)$



III. $f(x)=\frac{2x+8}{x+4}$

الحل:

يجب أن لا يكون المقام صفراً ، ويكون x+4=0 عندما x=-4، اذاً المجال هو

$R-\{-4\}$

IV. $f(x)=\sqrt{x+1}$

الحل:

بما ان الدليل زوجي يجب ان يكون $x+1\geq 0$ أي $x\geq -1$ اذاً

المجال هو $[-1,\infty)$



V. $f(x)=\dfrac{3x+8}{x^3-1}$

الحل:

يجب ان لا يكون المقام صفرا، والقيمة الوحيدة في $R$ التي تجعل مقام

هذه الدالة صفراً هي 1 اذاً المجال هو $R-\{1\}$

VI. $f(x)=\begin{cases}1-x & , 0\le x<1\\ 2x-1 & , 1\le x\le 2\end{cases}$

الحل:

الدالة معرفة بقاعدتين و هناك قيدا بان $0\le x\le 2$ اذاً المجال هو الفترة $[0,2]$



٢١. الامثلة الواردة تحت هذا التنبيه من تمارين رسم الدوال :

**تنبيه هام:** أسئلة الجزء الخاص برسم الدوال في الاختبار النهائي تكون بالصيغة التالية: أمثلةً

أ. **يمكن الحصول على منحنى** الدالة $f(x)=x^2-4$ **بإزاحة منحنى** $f(x)=x^2$ **بمقدار .....**

أ. ٤ وحدات إلى اليمين
ب. ٤ وحدات إلى اليسار
ج. ٤ وحدات إلى أسفل
د. ٤ وحدات إلى أعلى

**ب. يمكن الحصول على منحنى** الدالة $f(x) = x^2 + 1$ **بإزاحة منحنى** $f(x) = x^2$ **بمقدار .....**

أ. وحدة واحدة إلى اليمين
ب. وحدة واحدة إلى اليسار
ج. وحدة واحدة إلى أسفل
**د. وحدة واحدة إلى أعلى**



**ج. يمكن الحصول على منحنى** الدالة $f(x) = (x+2)^2 - 1$ **بإزاحة منحنى** $f(x) = x^2$ **بمقدار .....**

أ. وحدتين الى اليمين
ب. وحدتين الى اليسار
ج. وحدتين الى اليمين ثم وحدة واحدة إلى أعلى
**د. وحدتين الى اليسار ثم وحدة واحدة إلى أسفل**

**د. يمكن الحصول على منحنى** الدالة $f(x)=|x-3|+4$ **بإزاحة منحنى** $f(x)=|x|$ **بمقدار .....**

**أ. ثلاث وحدات الى اليمين ثم أربع وحدات إلى أعلى**

ب. ثلاث وحدات الى اليسار ثم أربع وحدات إلى أسفل

ج. أربع وحدات الى اليمين ثم ثلاث وحدات الى أسفل

د. أربع وحدات الى اليسار ثم ثلاث وحدات الى أعلى



**هـ. يمكن الحصول على منحنى** الدالة $f(x)=-|x|-2$ **بإنعكاس منحنى** $f(x)=|x|$ على محور x ثم إزاحته بمقدار **.....**

أ. وحدتين الى اليمين

ب. وحدتين الى اليسار

**ج. وحدتين إلى أسفل**

د. وحدتين الى أعلى

**و. يمكن الحصول على منحنى الدالة $f(x) = (x-2)^3$ بإزاحة منحنى $f(x) = x^3$ بمقدار .....**

**أ. وحدتين إلى اليمين**

ب. وحدتين إلى اليسار

ج. وحدتين إلى أسفل

د. وحدتين إلى أعلى



٢٢. اذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$

فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x\to 2}[5f(x) - 4h(x)]$

ii. $\lim_{x\to 2}\left[-\frac{1}{2}g(x)\times h(x)\right]$

iii. $\lim_{x\to 2}[f(x) + 2h(x) + 3g(x) - 2]$

iv. $\lim_{x\to 2}[8f(x)-g(x)\times h(x)]$

v. $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

vi. $\lim_{x\to 2}\dfrac{h(x)}{2f(x)}$



## الحل:

i. $\lim_{x\to 2}(5f(x)-4h(x)) = 5\lim_{x\to 2} f(x) - 4\lim_{x\to 2} h(x)$

$= 5\times 5 - 4\times 10.5 = 25 - 42 = -17$

ii. $\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{2}g(x)\times h(x)\right) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 2} g(x)\times\lim_{x\to 2} h(x)$

$= (-\frac{1}{2}\times -8)\times 10.5 = 42$

iii. $\lim_{x\to 2}\left(f(x)+2h(x)+3g(x)-2\right)=\lim_{x\to 2} f(x)+2\lim_{x\to 2} h(x)+3\lim_{x\to 2} g(x)-2$

$$=5+2\times 10.5+(3\times -8)-2$$

$$=5+21-24-2=0$$

iv. $\lim_{x\to 2}\left(8f(x)-g(x)\times h(x)\right)=8\lim_{x\to 2} f(x)-\lim_{x\to 2} g(x)\times\lim_{x\to 2} h(x)$

$$=8\times 5-(-8\times 10.5)$$

$$=40+84=124$$



v. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)}=\frac{5}{-8}=-\frac{5}{8}$

vi. $\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to 2} h(x)}{\lim_{x\to 2} f(x)}=\frac{10.5}{5}=2.1$

أوجد النهايات التالية إذا وجدت:

1. $\lim_{x\to 2}(x^2-2x+1)=2^2-2(2)+1=4-4+1=1$

2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2+2)}{(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$

3. $\lim_{x\to -2}\frac{2x-3}{x+4}=\frac{2(-2)-3}{-2+4}=\frac{-4-3}{2}=-\frac{7}{2}$

4. $\lim_{x\to 0}e^x=e^0=1$



5. $\lim_{x\to 6}\sqrt[4]{x^2-3x-8}=\sqrt[4]{\lim_{x\to 6}(x^2-3x-8)}=\sqrt[4]{36-18-8}=\sqrt[4]{36-26}=\sqrt[4]{10}$

6. $\lim_{x\to 3}\log(2x+4)=\log(2\times 3+4)=\log 10=1$

7. $\lim_{x\to 2}\ln(x^2+1)=\ln(4+1)=\ln 5$

8. $\lim_{x\to -1}(2x^2+5x+1)^2=\left[\lim_{x\to -1}(2x^2+5x+1)\right]^2=\left[2(-1)^2+5(-1)+1\right]^2=\left[-2-5+1\right]^2=(-6)^2=36$

9. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=\sqrt{\lim_{x\to 1}x}=\sqrt{1}=1$

## أوجد النهايات التالية:

$$\boxed{\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{x^2+5x+4}}$$

بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{x^2+5x+4}=\frac{-4+4}{(-4)^2+5\times -4+4}=\frac{-4+4}{16-20+4}=\frac{0}{0}$$ كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل المقام إلى عوامله الأولية



## تابع: الحلول:

$$\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{x^2+5x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{\cancel{x+4}}{(\cancel{x+4})(x+1)}=\lim_{x\to -4}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-4+1}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

## تابع: الحلول:

$$\boxed{\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}=\frac{3-\sqrt{9}}{9-9}=\frac{3-3}{9-9}=\frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط ( $3+\sqrt{x}$ )



## تابع: الحلول:

$$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{(x-9)(3+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 9}\frac{9-x}{(x-9)(3+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{-(x-9)}{(x-9)(3+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{-1}{3+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{-1}{3+\sqrt{9}}=\frac{-1}{3+3}=\frac{-1}{6}$$

## تابع: الحلول:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1}$$

**الحل:**

بما أن درجة البسط أقل من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1} = 0$$



## تابع: الحلول:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 4}$$

**الحل:**

بما أن درجة البسط = درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 4} = \frac{7}{2}$$

## تابع: الحلول:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+6x-21}{x^2+1}}$$

**الحل:**

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام اذاً:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+6x-21}{x^2+1}=\infty$$



هل الدالة المعرفة بـ

$$1.\quad f(x)=\begin{cases}2x & , x\geq -1\\ x-1 & , x<-1\end{cases}$$

متصلة في x=-1 ؟

## الحل:

$$f(-1) = 2 \times -1 = -2$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} 2x = 2 \times -1 = -2$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x-1) = -1-1 = -2$$



بما أن

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} f(x)$$

اذاً

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -2$$

و بما أن

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = -2$$

اذاً الدالة متصلة في x=-1

هل الدالة المعرفة بـ

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & , \ x<2 \\ 1 & , \ x=2 \\ 5-x & , \ x>2 \end{cases}$$

متصلة في x=2؟



## الحل:

$$f(2)=1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (5-x) = 5-2 = 3$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+1) = 2+1 = 3$$

بما أن

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

اذاً

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

و بما أن

$$\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$$

اذاً الدالة غير متصلة في x=2



## أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$\boxed{y = \sqrt[5]{3x^2+4}}$$

**الحل:**

$$y = \left(3x^2+4\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\left(3x^2+4\right)^{\frac{1}{5}-1} . 6x = \frac{6}{5}x\left(3x^2+4\right)^{-\frac{4}{5}}$$

$$y=\left(4x^2+5x-2\right)^8$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=8\left(4x^2+5x-2\right)^7.(8x+5)$$

$$=(64x+40)\left(4x^2+5x-2\right)^7$$



$$y=u^2-u \quad , \quad u=4x+3$$

الحل:

$$\frac{dy}{du}=2u-1$$

$$\frac{du}{dx}=4$$

$$y = u + \frac{1}{u} \quad , \quad u = 5 - 2x$$

الحل:

$$\frac{dy}{du} = 1 - \frac{1}{u^2}$$

$$\frac{du}{dx} = -2$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = (1 - \frac{1}{u^2})(-2)$$

$$= (-2 + \frac{2}{u^2})$$

$$= \left( -2 + \frac{2}{(5-2x)^2} \right)$$

$$= \frac{-2(25 - 20x + 4x^2) + 2}{25 - 20x + 4x^2}$$

$$= \frac{-50 + 40x - 8x^2 + 2}{25 - 20x + 4x^2} = \frac{-8x^2 + 40x - 48}{4x - 20x + 25}$$

## أوجد المشتقات الثلاث الاولى :

**الحل:**

$$y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$$

$$y' = 12x^3 - 15x^2 + 14x$$

$$y'' = 36x^2 - 30x + 14$$

$$y''' = 72x - 30$$



## أوجد المشتقات الثلاث الاولى :

**الحل:**

$$y = \frac{1}{3x+1}$$

$$y' = \frac{-1\times 3}{(3x+1)^2} = \frac{-3}{(3x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-(-3)(2(3x+1)\times 3)}{(3x+1)^4} = \frac{18(3x+1)}{(3x+1)^4} = \frac{18}{(3x+1)^3}$$

$$y''' = \frac{-18 \times 3(3x+1)^2 \times 3}{(3x+1)^6} = \frac{-162}{(3x+1)^4}$$



اذا كانت $y = 4x^2 - 3x^4$ فأوجد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8x - 12x^3$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 8(2) - 12(2)^3 = 16 - 96 = -80$$

## أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$\boxed{y = e^{x^2-2x}}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2-2x}.(2x-2)$$



$$\boxed{y = (2x+3)e^{-2x}}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = (2x+3).e^{-2x}.(-2) + e^{-2x}.(2)$$

$$= (-4x-6)e^{-2x} + 2e^{-2x}$$

**ملاحظة: تم تطبيق قانون مشتقة حاصل ضرب دالتين**

$$\boxed{y = e^{\cos x}}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x}.(-\sin x)$$



$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(e^{3x} + e^{-3x}\right)}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{3x}.(3) + e^{-3x}.(-3)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3e^{3x} - 3e^{-3}\right)$$

$$y = \log_2 3x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{\ln 2} .3 = \frac{1}{x \ln x}$$



$$y = 7^{x^3}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 7^{x^3} .\ln 7.(3x^2)$$

$$y = \ln(\sin x)$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}.\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$



$$y = x^2 e^{2x}$$

الحل:

$$\frac{dyy}{dx} = x^2.e^{2x}.(2) + e^{2x}.(2x)$$

$$= 2x^2 e^{2x} + 2xe^{2x}$$

$$\boxed{y = e^{2x}\cos 3x}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}.(-\sin 3x)(3) + \cos 3x(e^{2x})(2)$$

$$= -3e^{2x}\sin 3x + 2e^{2x}\cos 3x$$



$$\boxed{9x^2 + 4y^2 = 40}$$

الحل:

$$18x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$8y\frac{dy}{dx} + = -18x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-18x}{8y} = -\frac{9x}{4y}$$

$$\boxed{y^4+3y-4x^3=5x+1}$$

الحل:

$$4y^3\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}-12x^2=5$$

$$4y^3\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}=12x^2+5$$

$$(3y^3+3)\frac{dy}{dx}=12x^2+5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12x^2+5}{3y^3+3}$$



$$\boxed{5x^2+2x^2y+y^2=8}$$

الحل:

$$10x+2x^2\frac{dy}{dx}+4xy+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=-10x-4xy$$

$$(2x^2+2y)\frac{dy}{dx}=-10x-4xy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-10x-4xy}{2x^2+2y}=\frac{-2(5x+2xy)}{2(x^2+y)}=\frac{-(5x+2xy)}{(x^2+y)}$$

إذا كانت $y^2 - 4x^2 = 5$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$ و $y = 3$

**الحل:**

$$2y\frac{dy}{dx} - 8x^2 = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 8x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{2y} = \frac{4x}{y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1, y=3} = \frac{4\times -1}{3} = \frac{-4}{3}$$



إذا كانت $xy^2 + 3y = 27$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 2$ و $y = 3$

**الحل:**

$$2xy\frac{dy}{dx} + y^2 + 3\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$(2xy + 3)\frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{2xy + 3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2, y=3} = \frac{-(3)^2}{2\times 2\times 3 + 3} = \frac{-9}{15} = \frac{-3}{5}$$

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اذا كانت:

$$\boxed{z = x^3 - 2xy + y^3}$$

الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 3y^2$$



أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اذا كانت:

$$\boxed{z = xy - \ln xy}$$

الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{1}{xy}.y = y - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{1}{xy}.x = x - \frac{1}{y}$$

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اذا كانت:

$$z = x\ln y + y\ln x - xe^{xy}$$

الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y + \frac{y}{x} - (xe^{xy} \times y + e^{xy} \times 1)$$

$$= \ln y + \frac{y}{x} - xye^{xy} - e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} + \ln x - xe^{xy} \times x$$

$$= \frac{x}{y} + \ln x - x^2 e^{xy}$$



ما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ للدوال التالية:

$$i. \quad f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0$$

$$3(x^2 - 6x + 8) = 0 \qquad \div 3$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4) = 0$$

إما $(x-2)=0$

اذاً $x=2$

أو $(x-4)=0$

اذاً $x=4$

$$f''(x)=6x-18$$



عند $x=2$

$$f''(2)=6\times 2-18=12-18=-6$$

$$\because\ f''(2)<0$$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x=2$ وهي:

$$f(2)=2^3-9\times 2^2+24\times 2$$
$$=8-36+48=56-36=20$$

عند $x = 4$

$$f''(4) = 6 \times 4 - 18 = 24 - 18 = 6$$

$$\because f''(4) > 0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 4$ وهي:

$$f(4) = 4^3 - 9 \times 4^2 + 24 \times 4$$
$$= 64 - 144 + 96 = 160 - 144 = 16$$



$$\boxed{ii.\ \ f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3}$$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$3x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$3(x^2 + 4x + 3) = 0 \qquad \div 3$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x+1)(x+3) = 0$$

| | |
|---|---|
| إما | $(x+1)=0$ |
| اذاً | $x=-1$ |
| أو | $(x+3)=0$ |
| اذاً | $x=-3$ |

$$f''(x)=6x+12$$



عند $x=-1$

$$f''(1)=6(-)1+12=-6+12=6$$

$$\because f''(1)>0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x=-1$ وهي:

$$f(-1)=(-1)^3+6(-)1^2+9(-1)+3$$
$$=-1+6-9+3=-1$$

عند $x=-3$

$$f''(-3)=6(-3)+12=-18+12=-6$$

$$\because f''(-3)<0$$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x=3$ وهي:

$$f(-3)=(-3)^3+6(-3)^2+9(-3)+3$$
$$=-27+54-27+3=3$$



$$\boxed{iii.\ \ f(x)=x^2+2x+18}$$

**الحل:**

$$f'(x)=2x+2$$
$$2x+2=0$$
$$2(x+1)=0 \qquad \div 2$$
$$x+1=0$$
$$x=-1$$
$$f''(x)=2$$

عند $x = -1$

$$f''(1) = 2$$

$$\because\ f''(1) > 0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ وهي:

$$f(2) = (2)^2 + 2 \times 2 + 18$$
$$= 4 + 4 + 18 = 26$$



## أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة :

$$\boxed{f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5}$$

الحل:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$12x - 6 = 0$$
$$12x = 6$$
$$x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

# تابع: الحل:

$-$ $\quad\quad$ $+$

$0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2$

$$f''(0) = 12(0) - 6 = -6$$

$$f''(1) = 12(1) - 6 = 12 - 6 = +6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد $\frac{1}{2}$ اذا توجد نقطة انقلاب عند $x = \frac{1}{2}$ وهي $\left(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})\right)$



$$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})^3 - 3 \times (\frac{1}{2}) + 5$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 5 = \frac{1 - 6 + 20}{4} = \frac{15}{4}$$

نقطة الانقلاب هي $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{5}\right)$

## أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة :

$$\boxed{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}$$

**الحل:**

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$$

$$f''(x) = 6x - 24$$

$$6x - 24 = 0$$

$$6x = 24$$

$$x = \frac{24}{6} = 4$$



## تابع: الحل:

- +

0 1 2 3 4 5

$$f''(3) = 6(3) - 24 = 18 - 24 = -6$$

$$f''(5) = 6(5) - 24 = 30 - 24 = +6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد 4 اذا توجد نقطة انقلاب عند $x = 4$ وهي $(4, f(4))$

$$f(4) = (4)^3 - 12 \times (4)^2 + 36(4)$$
$$= 64 - 192 + 144 = 208 - 192 = 16$$

نقطة الانقلاب هي $(4,16)$



أوجد ناتج التكاملات الآتية:

$$i.\ \int (5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6)dx$$

الحل:

$$\int (5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6)dx = \frac{5x^7}{6} - \frac{2x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} - 6x + c$$
$$= \frac{5x^7}{6} - \frac{2x^5}{5} + x^3 - 6x + c$$

$$ii.\ \int\left(x^{1/2}-3x^{2/3}+5x^{-1/2}\right)dx$$

الحل:

$$\int\left(x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{2}{3}}+5x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2}-3\frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3}+5\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}+c$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+10x^{\frac{1}{2}}+c$$



$$iii.\ \int 2xdx$$

الحل:

$$\int 2x\,dx=\frac{2x^2}{2}+c$$

$$=x^2+c$$

$$v. \quad \int (3\cos x + 2x)dx$$

الحل:

$$\int (3\cos x + 2x)dx = -3\sin x + \frac{2x^2}{2} + c$$
$$= -3\sin x + x^2 + c$$



$$vi. \quad \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx$$

الحل:

$$\int \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \int \sec^2 x \, dx - \int 1.\, dx = \tan x - x + c$$

$$vii.\quad \int -2e^{x}dx$$

الحل:

$$\int -2e^{x}dx = -2e^{x} + c$$



$$viii.\quad \int \frac{x^{5}+2}{x^{3}}dx$$

الحل:

$$\int \frac{x^{5}+2}{x^{3}}dx \quad = \int \left(x^{2} + 2x^{-3}\right)dx = \frac{x^{3}}{3} + 2\frac{x^{-2}}{(-2)} + c$$

$$= \frac{x^{3}}{3} - x^{-2} + c$$

## أوجد التكاملات التالية:

$$\int \cos 3x \, dx$$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 3x \\ du &= 3\,dx \end{aligned}}$$

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}\int 3\cos 3x \; du =$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos u \, du \quad = -\frac{1}{3}\sin u + c = -\frac{1}{3}\sin 3x + c$$



$$\int e^{2x} dx$$

الحل:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= 2x \\ du &= 2\,dx \end{aligned}}$$

$$\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x} \; du =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{u} \, du \quad = \frac{1}{2} e^{u} + c = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3+1} \quad , x \neq -1$$

الحل:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3+1} = \int x^2 (x^3+1)^{-1} dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^3+1 \\ du &= 3x^2\, dx \end{aligned}}$$

$$\int x^2 (x^3+1)^{-1}\, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 (x^3+1)^{-1}\, du = \frac{1}{3}\int u^{-1}\, du \quad = \frac{1}{3}\ln|u| + c = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right) + c$$



حل المعادلة التفاضلية المعطاة:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 2x+3}$$

الحل:

$$dy = (2x+3)dx$$

$$\int dy = \int (2x+3)dx$$

$$y = \frac{2x^2}{2} + 3x + c$$

$$\therefore\ y = x^2 + 3x + c$$

## حل المعادلة التفاضلية المعطاة:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}}$$

الحل:

$$y\,dy = x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+c$$



$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\sqrt{xy}}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{1/2}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2/3}+c$$

$$2y^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c$$

أوجد التكاملات التالية :

$$i. \quad \int_0^2 (5x^3 - 3x + 6)dx$$

**الحل:**

$$\int_0^2 (5x^3 - 3x + 6)dx = \left[\frac{5x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 6x\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{5(2)^4}{4} - \frac{3(2)^2}{2} + 6(2)\right] - 0$$

$$= [20 - 6 + 12] = 26$$



$$ii. \quad \int_{-2}^{3} 7dx$$

**الحل:**

$$\int_{-2}^{3} 7dx = [7x]_{-2}^{3}$$

$$= [7(3)] - [7(-2)]$$

$$= 21 - (-14) = 21 + 14 = 35$$

$$iii. \quad \int_{4}^{4} (x-16)\, dx$$

الحل:

$$\int_{4}^{4} (x-16)\, dx = 0$$



$$v. \quad \int_{-1}^{2} (x^3+1)^2 dx$$

الحل:

$$\int_{-1}^{2} (x^3+1)^2 dx = \int_{-1}^{2} (x^6+2x^3+1) dx$$

$$= \left[\frac{x^7}{7} + \frac{2x^4}{4} + x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{(2)^7}{7} + \frac{2(2)^4}{4} + 2\right] - \left[\frac{(-1)^7}{7} + \frac{2(-1)^4}{4} + (-1)\right]$$

$$=\left[\frac{128}{7}+8+2\right]-\left[\frac{-1}{7}+\frac{1}{2}-1\right]$$

$$=\frac{128}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+11$$

$$=\frac{129}{7}-\frac{1}{2}+11$$

$$=\frac{158}{14}-\frac{7}{14}+\frac{154}{14}=\frac{305}{14}$$



$$vi.\quad \boxed{\int_0^{\pi}\cos x\,dx}$$

الحل:

$$\int_0^{\pi}\cos x\,dx=[-\sin x]_0^{\pi}=(-\sin\pi)-(-\sin 0)=0$$

$$ix.\quad \int_0^{\pi} \sec^2 x\, dx$$

الحل:

$$\int_0^{\pi} \sec^2 x\, dx = [\tan x]_0^{\pi}$$

$$= \tan \pi - \tan 0 = 0$$