المحاضره الثالثه

الـدوال

الـداله :

يعتبر مفهوم الدالة واحداً من أهم المفاهيم في الرياضيات. وكلمة دالة تعبّر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو (تتعين بواسطة) كمية أخرى .

فمثلاً:

- حجم الكرة يعتمد على نصف قطرها.
- متوسط إنتاج الفدان من المحاصيل يعتمد على كمية السماد المستخدمة.
- الاستهلاك الشهري لأسرة ما يعتمد على دخلها الشهري.

تعريف مجرد لمفهوم الداله :

إذا كانت A , B مجموعتين فإن f داله من A إلى B ، أي $f : A \longrightarrow B$

إذا كانت f مجموعه جزئيه من AxB بحيث أنه لكل $x \in A$ توجد y واحده في B بحيث $(x,y) \in f$

يسمى y قيمة الدالة f عند x ويكتب ذلك رمزاً على النحو $y = f(x)$ ، ويسمى y بالمتغير التابع

و x بالمتغير المستقل .

ملاحظه :

إذا كانت f داله من A إلى B ، فإن A تسمى مجال الداله ، و تسمى B المجال المقابل لها ، كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .

مثال 1 :

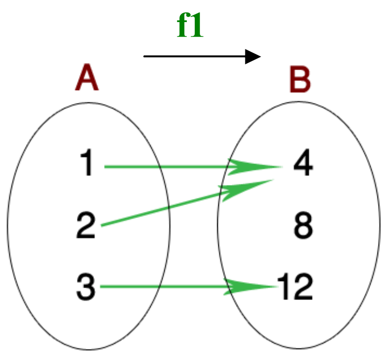
إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ **و** $B=\{4,8,12\}$ ، **وكانت** $f1 = \{(1,4),(2,4),(3,12)\}$

و $f2 = \{(1,4),(2,8)\}$ **و** $f3 = \{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$

فهل f1 و f2 و f3 دوال من A إلى B ؟

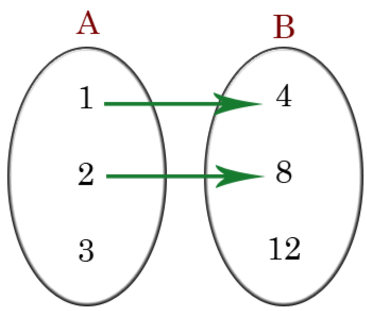
الحـــل :

يمكن توضيح ذلك من خلال تمثيل f1 و f2 و f3 بالمخطط السهمي كما يلي :



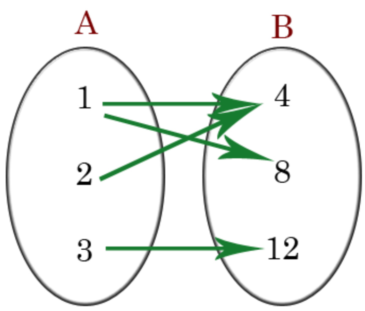
- لايوجد عنصر في A لم يرتبط ي عنصر في B .
- لايوجد عنصر في A له أكثر من صوره .
إذاً الإجابه هي ، نعم . . f1 داله لأن كل عنصر في المجال له صوره واحده في المجال المقابل

$\xrightarrow{f2}$



- f2 ليست داله ، لأن هناك عنصر في المجال لايوجد له صوره في المجال المقابل .
$A \ni 3$ وليس له صوره في B .

$\xrightarrow{f3}$

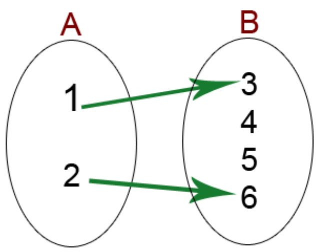


- f3 ليست داله ، لأن كل عنصر في المجال يجب أن يكون له صوره واحده فقط في المجال المقابل
$A \ni 1$ وله صورتان في B .

- أسهل طريقه للإجابه على مثل هذه الأسئله هو (المخطط السهمي) .

مثال 2 :
إذا كان $A=\{1,2\}$ ، $B=\{3,4,5,6\}$ ، $f=\{(1,3),(2,6)\}$
مـّثل f بالمخطط السهمي ثم أوجد مداها ؟

الحـــل :



- كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر في المجال المقابل .
- لايوجد عنصر له أكثر من صوره
- تحقق الشرط ، إذاً هي دالـه .
- مدى f هو $\{3,6\}$.

مثال 3 :

إذا كان $f(x)=x^2+4x-3$ ، فأوجد :

1) $f(2) =$

$2^2+4\times2-3=4+8-3=9$

2) $f(-1) =$

$(-1)^2+(4\times-1)-3=1-4-3=-6$

3) $f(a) =$

$= a^2+4\times a-3$

a^2+4a-3 (الإجابة النهائيه لهذه الفقره لأن a قيمه مجهوله)

4) $f(x+1) =$

$= (x+1)^2+4(x+1)-3$

$= x^2+2x+1+4x+4-3$

x^2+6x+2

- **طبقنا على الفقره (4) القاعدة التالية :** $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

مثال 4 :

إذا كان $f(x)=3xx^2-7x+2$ ، فأوجد :

1) $f(a) =$

$= 3\times(a)^2-7\times a+2$

$3a^2-7a+2$

2) $f(-3) =$

$= 3(-3)^2-7(-3)+2$

$50 = 27+21+2$

3) $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^2-7\left(\frac{1}{2}\right)+2 = \frac{3}{4}-\frac{7}{2}+2 = \frac{3}{4}-\frac{14}{4}+\frac{8}{4} = \frac{11-14}{4} = \frac{-3}{4}$$

$= f\left(\frac{-2}{3}\right)$ (4

$$8 = \frac{4}{3}+\frac{14}{3}+\frac{6}{3} = \frac{4}{3}+\frac{14}{3}+2 = 3\left(\frac{-2}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{-2}{3}\right)+2$$

ملاحظه :
سنقتصر في دراستنا للدوال على دراسة بعض أنواع الدوال الحقيقية .

الـدوال الحقيقيه :
الدالة الحقيقية هي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية . أي
$f : R \longrightarrow R$

ـ دالة كثيرة الحدود :
هي الدالة التي على الصورة $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a$
حيث $a_n, a_{n-1}, \cdots, a$ أعداد حقيقية وتسمى معاملات كثيرة الحدود، n عدد طبيعي. تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) .

*** دائماً نسمي الداله حسب أعلى أس فيها ، مثل :**
- إذا كان أعلى أس 3 تكون داله تكعيبية .
- إذا كان أعلى أس 2 تكون داله تربيعية .
- إذا كان أعلى أس 4 تكون داله من الدرجة الرابعة .
- إذا كان أعلى أس 5 سكون داله من الدرجة الخامسة .. .. وهكذا .

مثال 5 : ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :

(1 $f(x) = 3$ ⟵ الدرجة الصفرية ويسمى أيضا دالة ثابتة

(2 $f(x) = 3x - 4$ ⟵ الدرجة الأولى ويسمى أيضا دالة خطية

(3 $f(x) = x^2 - x + 1$ ⟵ الدرجة الثانية ويسمى أيضا دالة تربيعية

(4 $f(x) = 2 - 3x + x^3$ ⟵ الدرجة الثالثة أو دالة تكعيبية

(5 $f(x) = x^3 + x^5 + 5 - 6$ ⟵ الدرجة الخامسه

العمليـات على الدوال :
يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة معطيات. وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع وطرح وضرب وقسمة وتركيب وعملية أحادية واحدة هي المعكوس.

لتكن f ،g دالتين فان:

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ ← عملية جمع

نجمع الحدود المتشابهه

2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ ← عملية طرح

نطرح الحدود المتشابهه ، إذا كان يوجد تربيع نطرح التربيع وإذا ثوابت نطرح الثوابت

3) $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$ ← عملية ضرب

4) $\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x)\neq 0$ ← عملية قسمه

نقسم $\frac{f(x)}{g(x)}$ بشرط أن $g(x)$ لاتساوي صفر

5) $(fog)(x)=f(g(x))$

(fog) ← يطلق عليها تركيب g مع f

(gof) ← يطلق عليها تركيب f مع g

o : يطلق عليها تركيب

6) معكوس الدالة

إذا كانت y=f(x) دالة فان معكوسها يعني إيجاد x كدالة في y أي $x=f^{-1}(y)$ ، حيث $\mathbf{f^{-1}}$ يرمز لمعكوس الدالة f

---

مثال 6 :

إذا كانت $f(x)=3x+5$ ، $g(x)=x^2+1$ ، فأوجد :

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$= 3x+5+x^2+1$

x^2+3x+6

2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$= 3x+5-(x^2+1)$

$= 3x+5-x^2-1$

$-x^2+3x+4$

3) $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$

$= (3x+5)(x^2+1)$

$= 3x^3+3x+5x^2+5$

$3x^3+5x^2+3x+5$

4) $\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x)\neq 0$

الدالة كسريه و الإجابة هي $\frac{3x+5}{x^2+1}$

5) $(fog)(x) = f\left(g(x)\right)$ تركيب g مع f

$$= 3(x^2+1)+5$$
$$= 3x^2+3+5$$
$$3x^2+8$$

6) f^{-1}

$$y = 3\times +5$$
$$y-5 = 3x$$

$\frac{y-5}{3} = x$ أو تكتب هكذا $(y) = \frac{y-5}{3}$

مثال 7 :

أفرض أن $f(x) = 1/(x-1)$ و $g(x) = \sqrt{x}$ **فـأوجد :**

1) $(fog)(9)$

$$f\left(g(9)\right) = f(3) = \frac{1}{3-2} = 1$$

2) $(fog)(x)$

$$f\left(g(x)\right) = \frac{1}{g(x)-2} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

3) $(gof)(6)$

$$g\left(f(6)\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

4) $(gof)(x)$

$$g\left(f(x)\right) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$$