

حلول التمارين المنقحة



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



١. إذا كانت المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من 10، وكانت $A = \{1, 3, 5\}$ ، $B = \{2, 4, 6\}$ كون المجموعات الآتية:

$$(i) A \cup B \quad (ii) A \cap B \quad (iii) \bar{A} \quad (iv) \overline{A \cup B} \quad (v) \overline{A \cap B}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



الحل:

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \text{ و } B = \{2,4,6\}, A = \{1,3,5\}$$

$$(i) A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$(ii) A \cap B = \emptyset$$

$$(iii) \overline{A} = \{2,4,6,7,8,9\}$$

$$(iv) \overline{A \cup B} = \{7,8,9\}$$

$$(v) \overline{A \cap B} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = U$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$٢. \text{ للدالة } g(x)=x+1 \text{ أوجد } 2[g(2)]^2 - g(2) + 5$$

الحل:

$$g(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\begin{aligned} 2[g(2)]^2 - g(2) + 5 &= 2[3]^2 - 3 + 5 \\ &= 2(9) + 2 = 18 + 2 = 20 \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٤]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



٣. للدالة $f(x)=2x^2-1$ أوجد $f(1)+f(2)+f(3)$

الحل:

$$f(1) = 2(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$f(2) = 2(2)^2 - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$f(3) = 2(3)^2 - 1 = 18 - 1 = 17$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) = 1 + 7 + 17 = 25$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٥]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



٤. للدالة $f(x)=x^2+2x-3$ أوجد $f(2c-3)-5f(c)$

الحل:

$$\begin{aligned} f(2c-3) &= (2c-3)^2 + 2(2c-3) - 3 \\ &= 4c^2 - 12c + 9 + 4c - 6 - 3 = 4c^2 - 8c \end{aligned}$$

$$f(c) = c^2 + 2c - 3$$

$$\begin{aligned} \therefore f(2c-3) - 5f(c) &= 4c^2 - 8c - 5(c^2 + 2c - 3) \\ &= 4c^2 - 8c - 5c^2 - 10c + 15 = -c^2 - 18c + 15 \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٦]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



٥. للدالة $g(x)=x^2-5x+8$ أوجد $g(5a-2) + 3g(2a)$

الحل:

$$g(5a-2) = (5a-2)^2 - 5(5a-2) + 8$$

$$= 25a^2 - 20a + 4 - 25a + 10 + 8 = 25a^2 - 45a + 20$$

$$g(2a) = (2a)^2 - 5(2a) + 8 = 4a^2 - 10a + 8$$

$$\therefore g(5a-2) + 3g(2a) = 25a^2 - 45a + 20 + 3(4a^2 - 10a + 8)$$

$$= 25a^2 - 45a + 20 + 12a^2 - 30a + 24 = 37a^2 - 75a + 44$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٧]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



٦. إذا كان $f(x) = x^2 - 7x + 2$ ، $g(x) = x + 4$ ، فأوجد

(i) $(f + g)(x)$

(ii) $(f - g)(x)$

(iii) $(f \cdot g)(x)$

(iv) $\frac{f}{g}(x)$

(v) $(f \circ g)(x)$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٨]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



الحل:

$$(i) (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 7x + 2 + x + 4 \\ = x^2 - 6x + 6$$

$$(ii) (f - g)(x) = f(x) - g(x) \\ = x^2 - 7x + 2 - (x + 4) \\ = x^2 - 7x + 2 - x - 4 \\ = x^2 - 8x - 2$$

$$(iii) (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 7x + 2)(x + 4) \\ = x^3 + 4x^2 - 7x^2 - 28x + 2x + 8 \\ = x^3 - 3x^2 - 26x + 8$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٩]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$(iv) \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 7x + 2}{x + 4}$$

$$(v) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 4) \\ = (x + 4)^2 - 7(x + 4) + 2 \\ = x^2 + 8x + 16 - 7x - 28 + 2 \\ = x^2 + x - 10$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٠]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



٧. أوجد معكوس الدالة $g(x) = 5x$

الحل:

$$g(x) = 5x \rightarrow y = 5x$$

$$x = 5y$$

$$\frac{x}{5} = y$$

$$y = \frac{x}{5} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{5}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



٨. أوجد معكوس الدالة $f(x) = \frac{x-4}{3}$

الحل:

$$f(x) = \frac{x-4}{3} \rightarrow y = \frac{x-4}{3}$$

$$x = \frac{y-4}{3}$$

$$3x = y - 4$$

$$3x + 4 = y$$

$$y = 3x + 4 \rightarrow f^{-1}(x) = 3x + 4$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



٩- أوجد كل خط من الخطوط المستقيمة الذي يحقق الشروط المعطاة فيما يلي:

- أ- المستقيم المار بالنقطة (1, -2) وميله $m = -3$
- ب- المستقيم المار بنقطة الاصل وميله 2
- ج- المستقيم المار بالنقطتين (3,4) و (7,2)
- د- المستقيم الذي ميله $m = -2$ ومقطوعه الصادي $b = 3$
- هـ- المستقيم الذي يمر (3,5) ويوازي المستقيم $3x + 5y - 2 = 0$
- و- المستقيم الذي يمر (3,2) وعمودي على المستقيم $y = -3x + 2$
- ٩- أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذب معادلته $2x + 7y = 14$
- ١٠. أوجد الميل والمقطوع الصادي للمستقيم $3x + 5y = 15$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أ- المستقيم المار بالنقطة (1,-2) وميله يساوي $m = -3$.

الحل:

$$m = -3 , x_1 = 1 , y_1 = -2$$

$$y + 2 = -3 (x - 1)$$

$$y + 2 = -3x + 3$$

$$y = -3x + 3 - 2$$

$$y = -3x + 1$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٤]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



ب - المستقيم المار بنقطة الاصل وميله 2

الحل:

$$m = 2, x_1 = 0, y_1 = 0$$

$$y - 0 = 2 (x - 0)$$

$$\therefore y = 2x$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٥]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



ج. المستقيم المار بالنقطتين (3,4) و (7,2)

الحل:

$$x_1 = 3, y_1 = 4, x_2 = 7, y_2 = 2$$

$$\frac{y - 4}{x - 3} = \frac{2 - 4}{7 - 3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٦]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$2(y - 4) = -1(x - 3)$$

$$2y - 8 = -x + 3$$

$$2y = -x + 3 + 8 = -x + 11$$

$$y = \frac{-x + 11}{2}$$



د. المستقيم الذي ميله $m=-2$ ومقطوعه الصادي $b=3$
الحل:

$$y = mx + b$$

$$\therefore y = -2x + 3$$



هـ-المستقيم الذي يمر بالنقطة (3,5) يوازي على المستقيم $3x+5y-2=0$

الحل:

نفرض ميل المستقيم $3x+5y-2=0$ هو m_1 وميل المستقيم الموازي m_2

إذاً

$$m_1 = \frac{-a}{b}$$

$$a = 3, b = 5$$

$$m_1 = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$m_2 = m_1 = -\frac{3}{5} \quad (\text{شرط التوازي})$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٩]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$x_1 = 3, y_1 = 5$$

$$y - 5 = -\frac{3}{5}(x - 3) = -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5}$$

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} + 5 = -\frac{3}{5}x + \frac{9 + 25}{5}$$

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{34}{5}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٢٠]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



و- المستقيم الذي يمر (3,2) وعمودي على المستقيم $y=-3x+2$

الحل:

نفرض ميل المستقيم $y=-3x+2$ هو m_1 وميل المستقيم العمودي عليه m_2

إذاً

$$m_1 = -3$$

$$m_1 \times m_2 = -1 \quad (\text{شرط التعامد})$$

$$m_2 = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٢١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

$$x_1 = 3, y_1 = 2$$

$$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 3) = \frac{1}{3}x - 1$$

$$y = \frac{1}{3}x - 1 + 2$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x + 1$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٢٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



١٠- أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته $2x+7y=14$

الحل:

المقطع السيني للخط $a=$ وهذا يعني أن الخط يمر بالنقطة $(a,0)$

$$2a + 7(0) = 14 \Rightarrow a = 7$$

المقطع الصادي للخط $b=$ وهذا يعني أن الخط يمر بالنقطة $(0,b)$

$$2(0) + 7b = 14 \Rightarrow b = 2$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٢٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



١١- أوجد الميل والمقطع الصادي للمستقيم $3x+5y=15$

الحل:

لإيجاد المطلوب نضع أولاً المعادلة المعطاة على الصورة :

$$Y=mx+b$$

من المعادلة المعطاة نجد أن

$$5y = -3x + 15$$

$$y = -\frac{3}{5}x + 3$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٢٤]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



بمقارنة هذه المعادلة الأخيرة بالمعادلة $y=mx+b$
نجد أن

الميل هو $m = -\frac{3}{5}$ والمقطع الصادي هو $b=3$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٢٥]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



١٢. حل المتباينة $5 > 2 - 9x > -4$

الحل:

$$5 - 2 > -9x > -4 - 2$$

$$3 > -9x > -6$$

$$-\frac{1}{9} \times 3 < x < -\frac{1}{9} \times -6$$

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$$

مجموعة الحل هي الفترة $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٢٦]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



١٣. حل المتباينة $4 \leq 2x + 2 \leq 10$

الحل:

$$4 - 2 \leq 2x + 2 - 2 \leq 10 - 2$$

$$2 \leq 2x \leq 8$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \leq \frac{1}{2} \times 2x \leq \frac{1}{2} \times 8$$

$$1 \leq x \leq 4$$

مجموعة الحل هي الفترة $[1, 4]$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٢٧]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



١٤. حل المتباينة $|3x| > 12$

الحل:

$$3x < -12 \quad \text{أو} \quad 3x > 12$$

$$\frac{1}{3} \times 3x < \frac{1}{3} \times -12 \quad \text{أو} \quad \frac{1}{3} \times 3x > \frac{1}{3} \times 12$$

$$x < -4 \quad \text{أو} \quad x > 4$$

مجموعة الحل هي الفترة $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٢٨]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



١٥. هل الدالة $f(x) = 3x^2 - 4x$ دالة زوجية؟

الحل:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^2 - 4(-x) \\ &= 3x^2 + 4x \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

إذاً ليست زوجية.



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٢٩]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



١٦. هل الدالة $f(x) = 3x^3 - 4x$ دالة فردية؟

الحل:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^3 - 4(-x) \\ &= -3x^3 + 4x \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٣٠]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\begin{aligned}
 -f(x) &= -(3x^2 - 4x) \\
 &= -3x^2 + 4x \\
 &= f(-x)
 \end{aligned}$$

إذا فردية.



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٣١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



١٧. إذا كان $\tan \theta = \frac{15}{8}$

فأوجد $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، $\sec \theta$ ، $\csc \theta$ ، $\cot \theta$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٣٢]

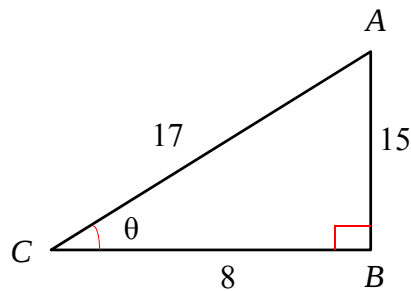
جامعة الملك فيصل
King Faisal University



الحل:

$$\tan \theta = \frac{15}{8}$$

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \\ &= 15^2 + 8^2 \\ &= 225 + 64 = 289 \\ \therefore \overline{AC} &= \sqrt{289} = 17\end{aligned}$$



$$\sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{17}, \cos \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{17}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{17}{8}, \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{17}{15}, \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{8}{15}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٣٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



١٨. إذا دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D = 100 - 5P$ فأوجد

أ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 19$.

ب) سعر وحدة السلعة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 50$.

ج) الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل، أي $P = 0$.



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٣٤]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



الحل:

أ- عندما $P = 19$

$$\begin{aligned} Q_D &= 100 - 5 \times 19 \\ &= 100 - 95 \\ &= 5 \end{aligned}$$

ب- عندما $Q_D = 50$

$$\begin{aligned} Q_D &= 100 - 5P \\ 50 &= 100 - 5P \\ 5P &= 100 - 50 = 50 \\ \therefore P &= \frac{50}{5} = 10 \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٣٥]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University

ج. عندما $P = 0$

$$\begin{aligned} Q_D &= 100 - 5 \times 0 \\ &= 100 \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٣٦]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



١٩. إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 3P - 4$.
 وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = 36 - 2P$.
 أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن



الحل:

يحدث التوازن عندما تتساوي الكميتان المطلوبة والمعرضة .

$$Q_D = Q_S$$

$$3P - 4 = 36 - 2P$$

$$3P + 2P = 36 + 4$$

$$5P = 40$$

$$\therefore P = \frac{40}{5} = 8$$



تابع: الحل:

نعوض سعر التوازن في إحدى الدالتين، ولتكن دالة العرض

$$\begin{aligned}\therefore Q_s &= 36 - 2(8) \\ &= 36 - 16 = 20\end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٣٩]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



٢٠. أوجد مجالات الدوال التالية:

I. $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$

II. $f(x) = \log(3x + 7)$

III. $f(x) = \frac{2x+8}{x+4}$

IV. $f(x) = \sqrt{x+1}$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٤٠]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$V. \quad f(x) = \frac{3x + 8}{x^3 - 1}$$

$$VI. \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x & , 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



$$I. \quad f(x) = 3x^2 + 5x + 2$$

الحل:

مجالاتها كافة الاعداد الحقيقية (R) لانها دالة كثيرة الحدود.



II. $f(x) = \log(3x + 7)$

الحل:

بسبب وجود اللوغاريتم يجب أن يكون:

$$3x + 7 > 0$$

$$3x > -7$$

$$x > -\frac{7}{3}$$

إذا المجال هو الفترة $(-\frac{7}{3}, \infty)$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٤٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



III. $f(x) = \frac{2x+8}{x+4}$

الحل:

يجب أن لا يكون المقام صفراً ، ويكون $x+4=0$ عندما $x=-4$ ، إذاً المجال هو

$$R - \{-4\}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٤٤]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\text{IV. } f(x) = \sqrt{x+1}$$

الحل:

بما ان الدليل زوجي يجب ان يكون $x+1 \geq 0$ أي $x \geq -1$ اذاً
المجال هو $[-1, \infty)$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٤٥]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\text{V. } f(x) = \frac{3x+8}{x^3-1}$$

الحل:

يجب ان لا يكون المقام صفراً، والقيمة الوحيدة في R التي تجعل مقام
هذه الدالة صفراً هي 1 اذاً المجال هو $R - \{1\}$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٤٦]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\text{VI. } f(x) = \begin{cases} 1 - x & , 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

الحل:

الدالة معرفة بقاعدتين وهناك قيودا بان $0 \leq x \leq 2$ اذاً المجال هو الفترة $[0, 2]$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٤٧]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



٢١. الامثلة الواردة تحت هذا التنبيه من تمارين رسم الدوال :

تنبيه هام: أسئلة الجزء الخاص برسم الدوال في الاختبار النهائي تكون بالصيغة التالية: أمثلة

أ. يمكن الحصول على منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 4$ بإزاحة منحنى $f(x) = x^2$ بمقدار

أ. ٤ وحدات إلى اليمين

ب. ٤ وحدات إلى اليسار

ج. ٤ وحدات إلى أسفل

د. ٤ وحدات إلى أعلى



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٤٨]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



ب. يمكن الحصول على منحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ بإزاحة منحنى $f(x) = x^2$ بمقدار

- أ. وحدة واحدة إلى اليمين
- ب. وحدة واحدة إلى اليسار
- ج. وحدة واحدة إلى أسفل
- د. وحدة واحدة إلى أعلى



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٤٩]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



ج. يمكن الحصول على منحنى الدالة $f(x) = (x+2)^2 - 1$ بإزاحة منحنى $f(x) = x^2$ بمقدار

- أ. وحدتين إلى اليمين
- ب. وحدتين إلى اليسار
- ج. وحدتين إلى اليمين ثم وحدة واحدة إلى أعلى
- د. وحدتين إلى اليسار ثم وحدة واحدة إلى أسفل



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٥٠]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



د. يمكن الحصول على منحنى الدالة $f(x) = |x - 3| + 4$ بإزاحة منحنى $f(x) = |x|$ بمقدار

- ثلاث وحدات الى اليمين ثم أربع وحدات إلى أعلى
- ثلاث وحدات الى اليسار ثم أربع وحدات إلى أسفل
- أربع وحدات الى اليمين ثم ثلاث وحدات الى أسفل
- أربع وحدات الى اليسار ثم ثلاث وحدات الى أعلى



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٥١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



هـ. يمكن الحصول على منحنى الدالة $f(x) = -|x| - 2$ بإنعكاس منحنى $f(x) = |x|$ على محور x ثم إزاحته بمقدار

- وحدتين الى اليمين
- وحدتين الى اليسار
- وحدتين إلى أسفل
- وحدتين الى أعلى



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٥٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



و. يمكن الحصول على منحنى الدالة $f(x) = (x - 2)^3$ بإزاحة منحنى $f(x) = x^3$ بمقدار

- أ. وحدتين إلى اليمين
- ب. وحدتين إلى اليسار
- ج. وحدتين إلى أسفل
- د. وحدتين إلى أعلى



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٥٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



٢٢. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ ، و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x \rightarrow 2} [5 f(x) - 4 h(x)]$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \left[-\frac{1}{2} g(x) \times h(x) \right]$

iii. $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + 2 h(x) + 3 g(x) - 2]$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٥٤]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 2} [8 f(x) - g(x) \times h(x)]$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{2 f(x)}$$



الحل:

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{x \rightarrow 2} (5 f(x) - 4 h(x)) &= 5 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \\ &= 5 \times 5 - 4 \times 10.5 = 25 - 42 = -17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{2} g(x) \times h(x) \right) &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \\ &= \left(-\frac{1}{2} \times -8 \right) \times 10.5 = 42 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + 2h(x) + 3g(x) - 2) &= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2} h(x) + 3 \lim_{x \rightarrow 2} g(x) - 2 \\ &= 5 + 2 \times 10.5 + (3 \times -8) - 2 \\ &= 5 + 21 - 24 - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 2} (8f(x) - g(x) \times h(x)) &= 8 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \\ &= 8 \times 5 - (-8 \times 10.5) \\ &= 40 + 84 = 124 \end{aligned}$$



$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} h(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)} = \frac{10.5}{5} = 2.1$$



أوجد النهايات التالية إذا وجدت:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 1) = 2^2 - 2(2) + 1 = 4 - 4 + 1 = 1$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2 + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 3}{x + 4} = \frac{2(-2) - 3}{-2 + 4} = \frac{-4 - 3}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٥٩]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 6} \sqrt[4]{x^2 - 3x - 8} = \sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow 6} (x^2 - 3x - 8)} = \sqrt[4]{36 - 18 - 8} = \sqrt[4]{36 - 26} = \sqrt[4]{10}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 3} \log(2x + 4) = \log(2 \times 3 + 4) = \log 10 = 1$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x^2 + 1) = \ln(4 + 1) = \ln 5$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 5x + 1)^2 = \left[\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 5x + 1) \right]^2 = [(2(-1)^2 + 5(-1) + 1)]^2 = [2 - 5 + 1]^2 = (-2)^2 = 4$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} x} = \sqrt{1} = 1$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٦٠]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{x^2+5x+4}$$

بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{x^2+5x+4} = \frac{-4+4}{(-4)^2+5 \times -4+4} = \frac{-4+4}{16-20+4} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل المقام إلى عوامله الأولية



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٦١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



تابع: الحل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{x^2+5x+4} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{(x+4)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-4+1} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٦٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



تابع: الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9} = \frac{3 - \sqrt{9}}{9 - 9} = \frac{3 - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط ($3 + \sqrt{x}$)



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٦٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



تابع: الحل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})}{(x - 9)(3 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{(x - 9)(3 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-(x - 9)}{(x - 9)(3 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-1}{3 + \sqrt{x}} \\ &= \frac{-1}{3 + \sqrt{9}} = \frac{-1}{3 + 3} = \frac{-1}{6} \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٦٤]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



تابع: الحل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1}$$

الحل:

بما أن درجة البسط أقل من درجة المقام إذاً:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1} = 0$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٦٥]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



تابع: الحل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 4}$$

الحل:

بما أن درجة البسط = درجة المقام إذاً:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 4} = \frac{7}{2}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٦٦]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



تابع: الحل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x - 21}{x^2 + 1}$$

الحل:

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام اذًا:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x - 21}{x^2 + 1} = \infty$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٦٧]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



هل الدالة المعرفة بـ

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq -1 \\ x - 1 & , x < -1 \end{cases}$$

متصلة في $x = -1$ ؟



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٦٨]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



الحل:

$$f(-1) = 2 \times -1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x = 2 \times -1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٦٩]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



بما أن

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

إذاً

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$$

و بما أن

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = -2$$

إذاً الدالة متصلة في $x=-1$ 

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٧٠]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



هل الدالة المعرفة بـ

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \quad x < 2 \\ 1 & , \quad x = 2 \\ 5 - x & , \quad x > 2 \end{cases}$$

متصلة في $x=2$ ؟



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٧١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



الحل:

$$f(2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (5 - x) = 5 - 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٧٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



بما أن

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

إذاً

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

و بما أن

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

إذاً الدالة غير متصلة في $x=2$ 

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٧٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$$

الحل:

$$y = (3x^2 + 4)^{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{5} (3x^2 + 4)^{\frac{1}{5}-1} \cdot 6x = \frac{6}{5} x (3x^2 + 4)^{-\frac{4}{5}}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٧٤]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y = (4x^2 + 5x - 2)^8$$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 8(4x^2 + 5x - 2)^7 \cdot (8x + 5) \\ &= (64x + 40)(4x^2 + 5x - 2)^7\end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٧٥]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y = u^2 - u, \quad u = 4x + 3$$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{du} &= 2u - 1 \\ \frac{du}{dx} &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u - 1) \times 4 = 8u - 4 = 8(4x + 3) - 4 \\ &= 32x + 24 - 4 = 32x + 20\end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٧٦]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y = u + \frac{1}{u}, \quad u = 5 - 2x$$

الحل:

$$\frac{dy}{du} = 1 - \frac{1}{u^2}$$

$$\frac{du}{dx} = -2$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٧٧]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)(-2) \\ &= \left(-2 + \frac{2}{u^2}\right) \\ &= \left(-2 + \frac{2}{(5-2x)^2}\right) \\ &= \frac{-2(25 - 20x + 4x^2) + 2}{25 - 20x + 4x^2} \\ &= \frac{-50 + 40x - 8x^2 + 2}{25 - 20x + 4x^2} = \frac{-8x^2 + 40x - 48}{4x^2 - 20x + 25} \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٧٨]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد المشتقات الثلاث الاولى :

$$y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$$

الحل:

$$y' = 12x^3 - 15x^2 + 14x$$

$$y'' = 36x^2 - 30x + 14$$

$$y''' = 72x - 30$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٧٩]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد المشتقات الثلاث الاولى :

$$y = \frac{1}{3x+1}$$

الحل:

$$y' = \frac{-1 \times 3}{(3x+1)^2} = \frac{-3}{(3x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{-(-3)(2(3x+1) \times 3)}{(3x+1)^4} = \frac{18(3x+1)}{(3x+1)^4} = \frac{18}{(3x+1)^3}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٨٠]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y''' = \frac{-18 \times 3(3x+1)^2 \times 3}{(3x+1)^6} = \frac{-162}{(3x+1)^4}$$



إذا كانت $y = 4x^2 - 3x^4$ فأوجد $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8x - 12x^3$$

$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = 8(2) - 12(2)^3 = 16 - 96 = -80$$



أوجد مشتقات الدوال التالية:

$$y = e^{x^2-2x}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2-2x} \cdot (2x - 2)$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٨٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y = (2x + 3)e^{-2x}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (2x + 3) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) + e^{-2x} \cdot (2) \\ &= (-4x - 6)e^{-2x} + 2e^{-2x} \end{aligned}$$

ملاحظة: تم تطبيق قانون مشتقة حاصل ضرب دالتين



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٨٤]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y = e^{\cos x}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٨٥]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y = \frac{1}{2} (e^{3x} + e^{-3x})$$

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} (e^{3x} \cdot (3) + e^{-3x} \cdot (-3)) \\ &= \frac{1}{2} (3e^{3x} - 3e^{-3x}) \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٨٦]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y = \log_2 3x$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot 3 = \frac{1}{x \ln 2}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٨٧]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y = 7^{x^3}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 7^{x^3} \cdot \ln 7 \cdot (3x^2)$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٨٨]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y = \ln(\sin x)$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٨٩]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y = x^2 e^{2x}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^2 \cdot e^{2x} \cdot (2) + e^{2x} \cdot (2x) \\ &= 2x^2 e^{2x} + 2xe^{2x} \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٩٠]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y = e^{2x} \cos 3x$$

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{2x} \cdot (-\sin 3x)(3) + \cos 3x(e^{2x})(2) \\ &= -3e^{2x} \sin 3x + 2e^{2x} \cos 3x \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٩١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$9x^2 + 4y^2 = 40$$

الحل:

$$\begin{aligned} 18x + 8y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ 8y \frac{dy}{dx} + &= -18x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-18x}{8y} = -\frac{9x}{4y} \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٩٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$$

الحل:

$$4 y^3 \frac{dy}{dx} + 3 \frac{dy}{dx} - 12 x^2 = 5$$

$$4 y^3 \frac{dy}{dx} + 3 \frac{dy}{dx} = 12 x^2 + 5$$

$$(3 y^3 + 3) \frac{dy}{dx} = 12 x^2 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12 x^2 + 5}{3 y^3 + 3}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٩٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$5x^2 + 2x^2y + y^2 = 8$$

الحل:

$$10 x + 2 x^2 \frac{dy}{dx} + 4 xy + 2 y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2 x^2 \frac{dy}{dx} + 2 y \frac{dy}{dx} = -10 x - 4 xy$$

$$(2 x^2 + 2 y) \frac{dy}{dx} = -10 x - 4 xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-10 x - 4 xy}{2 x^2 + 2 y} = \frac{-2(5 x + 2 xy)}{2(x^2 + y)} = \frac{-(5 x + 2 xy)}{(x^2 + y)}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٩٤]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



إذا كانت $y^2 - 4x^2 = 5$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$ و $y = 3$ **الحل:**

$$2y \frac{dy}{dx} - 8x^2 = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 8x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{2y} = \frac{4x}{y}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-1, y=3} = \frac{4 \times -1}{3} = -\frac{4}{3}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٩٥]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



إذا كانت $xy^2 + 3y = 27$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 2$ و $y = 3$ **الحل:**

$$2xy \frac{dy}{dx} + y^2 + 3 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy \frac{dy}{dx} + 3 \frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$(2xy + 3) \frac{dy}{dx} = -y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{2xy + 3}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2, y=3} = \frac{-(3)^2}{2 \times 2 \times 3 + 3} = \frac{-9}{15} = -\frac{3}{5}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٩٦]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اذا كانت:

$$z = x^3 - 2xy + y^3$$

الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 3y^2$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٩٧]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اذا كانت:

$$z = xy - \ln xy$$

الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{1}{xy} \cdot y = y - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{1}{xy} \cdot x = x - \frac{1}{y}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[٩٨]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ اذا كانت:

$$z = x \ln y + y \ln x - x e^{xy}$$

الحل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln y + \frac{y}{x} - (x e^{xy} \times y + e^{xy} \times 1)$$

$$= \ln y + \frac{y}{x} - x y e^{xy} - e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} + \ln x - x e^{xy} \times x$$

$$= \frac{x}{y} + \ln x - x^2 e^{xy}$$



ما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ للدوال التالية:

$$i. f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0$$

$$3(x^2 - 6x + 8) = 0 \quad \div 3$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x - 2)(x - 4) = 0$$



إما $(x - 2) = 0$

إذاً $x = 2$

أو $(x - 4) = 0$

إذاً $x = 4$

$f''(x) = 6x - 18$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٠]

جامعة الملك فيصل

King Faisal University



عند $x = 2$

$f''(2) = 6 \times 2 - 18 = 12 - 18 = -6$

$\therefore f''(2) < 0$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 2$ وهي:

$f(2) = 2^3 - 9 \times 2^2 + 24 \times 2$

$= 8 - 36 + 48 = 56 - 36 = 20$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٠]

جامعة الملك فيصل

King Faisal University



عند $x = 4$

$$f''(4) = 6 \times 4 - 18 = 24 - 18 = 6$$

$$\therefore f''(4) > 0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 4$ وهي:

$$\begin{aligned} f(4) &= 4^3 - 9 \times 4^2 + 24 \times 4 \\ &= 64 - 144 + 96 = 160 - 144 = 16 \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٠]
٣

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$ii. f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$3x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$3(x^2 + 4x + 3) = 0 \quad \div 3$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x + 1)(x + 3) = 0$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٠]
٤

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



إما $(x + 1) = 0$

إذاً $x = -1$

أو $(x + 3) = 0$

إذاً $x = -3$

$f''(x) = 6x + 12$



[١٠]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



عند $x = -1$

$f''(1) = 6(-)1 + 12 = -6 + 12 = 6$

$\therefore f''(1) > 0$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = -1$ وهي:

$f(-1) = (-1)^3 + 6(-)1^2 + 9(-1) + 3$

$= -1 + 6 - 9 + 3 = -1$



[١٠]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



عند $x = -3$

$$f''(-3) = 6(-3) + 12 = -18 + 12 = -6$$

$$\therefore f''(-3) < 0$$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 3$ وهي:

$$\begin{aligned} f(-3) &= (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) + 3 \\ &= -27 + 54 - 27 + 3 = 3 \end{aligned}$$



$$\text{iii. } f(x) = x^2 + 2x + 18$$

الحل:

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$2x + 2 = 0$$

$$2(x + 1) = 0 \quad \div 2$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

$$f''(x) = 2$$



عند $x = -1$

$$f''(1) = 2$$

$$\therefore f''(1) > 0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ وهي:

$$\begin{aligned} f(2) &= (2)^2 + 2 \times 2 + 18 \\ &= 4 + 4 + 18 = 26 \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٠]
٩

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

الحل:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$12x - 6 = 0$$

$$12x = 6$$

$$x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$



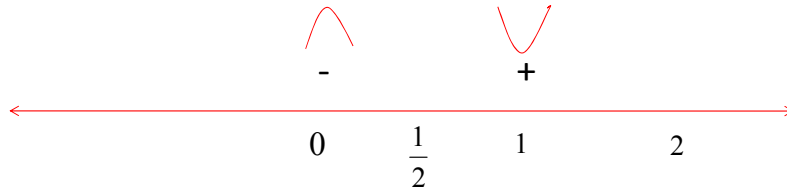
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



تابع: الحل:



$$f''(0) = 12(0) - 6 = -6$$

$$f''(1) = 12(1) - 6 = 12 - 6 = +6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد $\frac{1}{2}$ اذا توجد نقطة انقلاب عند $x = \frac{1}{2}$ وهي $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 12 \times \frac{1}{2} + 5 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 6 + 5 = \frac{-1}{2} - 1 = \frac{-1-2}{2} = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

نقطة الانقلاب هي $\left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$$

$$f''(x) = 6x - 24$$

$$6x - 24 = 0$$

$$6x = 24$$

$$x = \frac{24}{6} = 4$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١١]
٣

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



تابع: الحل:



$$f''(3) = 6(3) - 24 = 18 - 24 = -6$$

$$f''(5) = 6(5) - 24 = 30 - 24 = +6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد 4 إذا توجد نقطة انقلاب عند $x = 4$ وهي $(4, f(4))$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١١]
٤

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$f(4) = (4)^3 - 12 \times (4)^2 + 36(4)$$

$$= 64 - 192 + 144 = 208 - 192 = 16$$

نقطة الانقلاب هي (4,16)



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد ناتج التكاملات الآتية:

$$i. \int (5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6) dx$$

الحل:

$$\int (5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6) dx = \frac{5x^7}{7} - \frac{2x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} - 6x + c$$

$$= \frac{5x^7}{7} - \frac{2x^5}{5} + x^3 - 6x + c$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$ii. \int (x^{1/2} - 3x^{2/3} + 5x^{-1/2}) dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{2}{3}} + 5x^{-\frac{1}{2}} \right) dx &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} - 3 \frac{x^{\frac{5}{3}}}{5/3} + 5 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} + c \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{5} x^{\frac{5}{3}} + 10x^{\frac{1}{2}} + c \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$iii. \int 2x dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int 2x dx &= \frac{2x^2}{2} + c \\ &= x^2 + c \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١١]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$v. \int (3 \cos x + 2x) dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int (3 \cos x + 2x) dx &= 3 \sin x + \frac{2x^2}{2} + c \\ &= 3 \sin x + x^2 + c \end{aligned}$$



$$vi. \int (\sec^2 x - 1) dx$$

الحل:

$$\int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int 1. dx = \tan x - x + c$$



$$\text{vii . } \int -2e^x dx$$

الحل:

$$\int -2e^x dx = -2e^x + c$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\text{viii . } \int \frac{x^5 + 2}{x^3} dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 2}{x^3} dx &= \int (x^2 + 2x^{-3}) dx = \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^{-2}}{(-2)} + c \\ &= \frac{x^3}{3} - x^{-2} + c \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد التكاملات التالية:

$$\int \cos 3x \, dx$$

الحل:

$$u = 3x$$

$$du = 3 \, dx$$

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int 3 \cos 3x \, du =$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos u \, du = \frac{1}{3} \sin u + c = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\int e^{2x} \, dx$$

الحل:

$$u = 2x$$

$$du = 2 \, dx$$

$$\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} \int 2e^{2x} \, du =$$

$$= \frac{1}{2} \int e^u \, du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}, x \neq -1$$

الحل:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} = \int x^2 (x^3 + 1)^{-1} dx$$

$$\begin{aligned} u &= x^3 + 1 \\ du &= 3x^2 dx \end{aligned}$$

$$\int x^2 (x^3 + 1)^{-1} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 (x^3 + 1)^{-1} du = \frac{1}{3} \int u^{-1} du = \frac{1}{3} \ln|u| + c = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) + c$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



حل المعادلة التفاضلية المعطاة:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

الحل:

$$dy = (2x + 3) dx$$

$$\int dy = \int (2x + 3) dx$$

$$y = \frac{2x^2}{2} + 3x + c$$

$$\therefore y = x^2 + 3x + c$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



حل المعادلة التفاضلية المعطاة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

الحل:

$$y \, dy = x \, dx$$

$$\int y \, dy = \int x \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} \, dy = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{1/2} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + c$$

$$2 y^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



أوجد التكاملات التالية :

$$i. \int_0^2 (5x^3 - 3x + 6)dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (5x^3 - 3x + 6)dx &= \left[\frac{5x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 6x \right]_0^2 \\ &= \left[\frac{5(2)^4}{4} - \frac{3(2)^2}{2} + 6(2) \right] - 0 \\ &= [20 - 6 + 12] = 26 \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٢]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$ii. \int_{-2}^3 7dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 7dx &= [7x]_{-2}^3 \\ &= [7(3)] - [7(-2)] \\ &= 21 - (-14) = 21 + 14 = 35 \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$iii. \int_4^4 (x - 16) dx$$

الحل:

$$\int_4^4 (x - 16) dx = 0$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$v. \int_{-1}^2 (x^3 + 1)^2 dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^3 + 1)^2 dx &= \int_{-1}^2 (x^6 + 2x^3 + 1) dx \\ &= \left[\frac{x^7}{7} + \frac{2x^4}{4} + x \right]_{-1}^2 \\ &= \left[\frac{(2)^7}{7} + \frac{2(2)^4}{4} + 2 \right] - \left[\frac{(-1)^7}{7} + \frac{2(-1)^4}{4} + (-1) \right] \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{128}{7} + 8 + 2 \right] - \left[\frac{-1}{7} + \frac{1}{2} - 1 \right] \\
 &= \frac{128}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2} + 11 \\
 &= \frac{129}{7} - \frac{1}{2} + 11 \\
 &= \frac{258}{14} - \frac{7}{14} + \frac{154}{14} = \frac{405}{14}
 \end{aligned}$$



$$vi. \int_0^{\pi} \cos x \, dx$$

الحل:

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi} = (\sin \pi) - (\sin 0) = 0$$



$$ix. \int_0^{\pi} \sec^2 x \, dx$$

الحل:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sec^2 x \, dx &= [\tan x]_0^{\pi} \\ &= \tan \pi - \tan 0 = 0 \end{aligned}$$



عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

[١٣]

جامعة الملك فيصل
King Faisal University



مَشَى
بِحَمْدِ اللَّهِ

