المحاضرة (12)

تابع مقاييس التشتت

2- التباين و الانحراف المعيارى :-

ثانيا : التباين والانحراف المعياري من البيانات المبوبة :-

إذا كانت بينات الظاهرة ، مبوبة في جدول توزيع تكراري ، فإن الانحراف المعياري يحسب بتطبيق المعادلة التالية :-

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال :-

الجدول التالي يتضمن فئات الانفاق الشهري للأسرة و المطلوب حساب الانحراف المعياري و التباين :-

فئات الانفاق	عدد الاسر
50 -	120
60 -	140
70 -	160
80 -	180
90 - 100	150
المجموع	750

الحـــل

فئات الانفاق	عدد الاسر f	مركز الفئة x	f x	fx^2
50 -	120	55	6600	363000
60 -	140	65	9100	591500
70 -	160	75	12000	900000
80 -	180	85	15300	1300500
90 - 100	150	95	14250	1353750
المجموع	750		57250	4508750

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{4508750}{750} - \left(\frac{57250}{750}\right)^2 = 184.8889$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 13.5974$$

مثال :-

الجدول التالي يتضمن فئات الاجر الشهري لمجموعة من العاملين و المطلوب حساب الانحراف المعياري والتباين :-

فئات الانفاق	عدد الاسر
100 -	55
200 -	65
300 -	80
400 -	75
500 - 600	35
المجموع	310

الحـــل

فئات الانفاق	عدد الاسر f	مركز الفئة x	f x	fx^2
100 -	55	150	8250	1237500
200 -	65	250	16250	4062500
300 -	80	350	28000	9800000
400 -	75	450	33750	15187500
500 - 600	35	550	19250	10587500
المجموع	310		105500	40875000

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{40875000}{310} - \left(\frac{105500}{310}\right)^2 = 16035.38 \text{ ريال}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 126.6309 \text{ ريال}$$

3- معامل الاختلاف المعياري :-

هو معامل نسبي يستخدم للمقارنة بين تشتت ظاهرتين أو أكثر مختلفتين في وحدة القياس أو في القيمة المتوسطة لهما. والظاهرة التي معامل اختلافها أكبر تكون أكثر تشتتا من الأخرى. ويرمز لها بالرمز(x).c.v.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$$

مثال :-

في دراسة لمستوى أداء طلاب التعليم عن بعد في مقررين وهما مقرر المحاسبة و الاحصاء تم تجميع البيانات التالية :-

المقرر	المقاييس الوصفية لاختبار مستوى الطلاب	
	الوسط الحسابي $\overline{X}$	الانحراف المعياري σ
المحاسبة	70	5
الاحصاء	80	8

المطلوب : أي من المقررين أكثر تشتتاً ؟

الحـــل

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$$

$$C.V\ 1 = \frac{5}{70} \times 100 = 7.143\%$$

$$C.V\ 2 = \frac{8}{80} \times 100 = 10\%$$

بما أن معامل الاختلاف لدرجات الطلاب في مقرر الاحصاء أكبر من معامل الاختلاف بالنسبة لدرجات الطلاب في مقرر المحاسبة فيمكن القول أن التشتت النسبي لدرجات الاحصاء أكبر من المحاسبة أي أن درجات المحاسبة أكثر تجانسا من درجات الاحصاء.

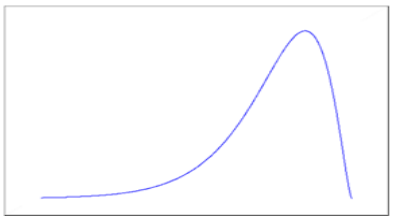
4- معامل الالتواء :-

هو درجة بُعد المنحنى التكراري عن التماثل. ويقصد بالتماثل أنه إذا أسقطنا عموداً من قمة المنحنى التكراري وقسمه إلى قسمين منطبقين يكون التوزيع متماثلاً. والعكس فيكون التوزيع غير متماثل أي ملتو إما إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار.

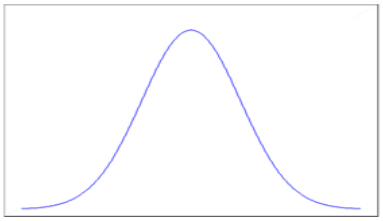
معامل الالتواء = صفر يعنى أن المنحنى الاعتدالي متماثل أي إذا قسمنا هذا المنحنى قسمين فإنهما يكونا متماثلان تماما، ويسمى لذلك توزيع اعتدالي. أما إذا انحرف المنحنى نحو القيم الكبيرة (جهة اليمين) فيوصف بأنه موجب الالتواء، وإذا انحرف نحو القيم الصغيرة (جهة اليسار) فيوصف بأنه سالب الالتواء.

يمكن الاستفادة من هذا التعريف في ناحيتين:

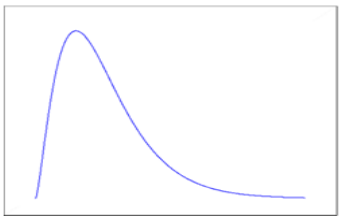
- **معرفة نوع الالتواء موجب أو سالب على حسب الإشارة.**
- **المقارنة بين توزيعين تكرارين . المجموعة التي لها معامل التواء أكبر يكون توزيعها ملتوياً أكثر.**



التوزيع غير متماثل
وملتو من جهة اليسار
معامل الالتواء = قيمة سالبة



التوزيع متماثل
معامل الالتواء = 0



التوزيع غير متماثل
وملتو من جهة اليمين
معامل الالتواء = قيمة موجبة

1- معامل الالتواء المعياري :-

$$\text{معامل الالتواء المعياري} = \frac{3(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

الناتج :-

1- صفر أو يقترب من الصفر إذا فالتوزيع معتدل أو متماثل أو طبيعي .

2- موجب إذا التوزيع ملتوي جهة اليمين .

3- سالب إذا التوزيع ملتوي جهة اليسار .

مثال :-

إذا كان متوسط درجات الطلاب في مقرر الاحصاء 85 درجة وذلك بانحراف معياري وقدرة 10 درجات فإذا علمت أن قيمة وسيط الدرجات لهذا المقرر هو 80 درجة المطلوب حساب معامل الالتواء المعياري لدرجات الطلاب في هذا المقرر؟

الحـــل

$$\text{معامل الالتواء المعياري} = \frac{3(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$\text{عامل الالتواء المعياري} = \frac{3 \times (85 - 80)}{10} = 1.5$$

حيث أن الناتج قيمة موجبة إذا فهذا التوزيع ملتوي جهة اليمين .

٢- معامل الالتواء الربيعي :-

$$\text{معامل الالتواء الربيعي} = \frac{(\text{الربيع الاعلى} - \text{الوسيط}) - (\text{الوسيط} - \text{الربيع الادنى})}{(\text{الربيع الاعلى}) - (\text{الربيع الادنى})}$$

مثال :-

البيانات التالية توضح مجموعة من المقاييس الاحصائية للأجور الشهرية لعينتين من العاملين أحدهما في قطاع التعليم و الاخرى في القطاع الصناعي :-

العاملين في قطاع	الربيع الأدنى	الوسيط	الربيع الأعلى
التعليم	110	500	900
الصناعي	250	850	1100

المطلوب :- باستخدام معامل الالتواء الربيعي قارن بين نوع كل من التوزيعين .

١- معامل الالتواء الربيعي للعاملين في قطاع التعليم =

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{(900-500)-(500-110)}{(900-110)} = 0.01$$

يتضح من النتائج السابقة أن قيمة معامل الالتواء تقترب من الصفر ولذلك فيمكن اعتبار أن هذا التوزيع متماثل .

٢- معامل الالتواء الربيعي للعاملين في القطاع الصناعي =

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{(1100-850)-(850-250)}{(1100-250)} = -0.41176$$

يعتبر التوزيع السابق توزيع ملتوي جهة اليسار.

تمرين شامل :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من درجات الطلاب في مقرر الكيمياء :-

عدد الطلاب	فئات الدرجات
15	0 -
40	10 -
55	20 -
35	30 -
5	40 – 50
150	المجموع

المطلوب :-

1- الوسط الحسابي و التباين و الانحراف المعياري :-

فئات الدرجات	عدد الطلاب	x	fx	fx^2
0 -	15	5	75	375
10 -	40	15	600	9000
20 -	55	25	1375	34375
30 -	35	35	1225	42875
40 – 50	5	55	225	10125
المجموع	150		3500	96750

١- الوسط الحسابي :-

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{3500}{150} = 23.33 \text{ درجة}$$

٢- التباين :-

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{96750}{150} - \left(\frac{3500}{150}\right)^2 = 100.55$$

٣- الانحراف المعياري :-

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{100.55} = 10.03 \text{ درجة}$$

2- الوسيط و الربيع الادنى و الربيع الاعلى :-

1- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الجدول الاصلي

عدد الطلاب	فئات الدرجات
15	0 -
40	10 -
55	20 -
35	30 -
5	40 – 50
150	المجموع

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

التكرار المتجمع	الحد الادنى لفئة
0	أقل من 0
15	أقل من 10
55	أقل من 20
110	أقل من 30
145	أقل من 40
150	أقل من 50

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى لفئة
0	أقل من 0
15	أقل من 10
55	أقل من 20
110	أقل من 30
145	أقل من 40
150	أقل من 50

ترتيب الوسط

٢- ترتيب الوسيط :-

$$\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الوسيط $= 20 + \frac{75 - 55}{110 - 55} \times 10$

$= 23.64$ درجة

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الادنى لفئة	التكرار المتجمع
أقل من 0	0
أقل من 10	15
أقل من 20	55
أقل من 30	110
أقل من 40	145
أقل من 50	150

ترتيب الربيع الادنى

٢- ترتيب الربيع الأدنى :-

$$\frac{\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{150}{4} = 37.5$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الربيع الادنى $= 10 + \frac{37.5-15}{55-15} \times 10$

$= 15.625$ درجة

:

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الادنى لفئة	التكرار المتجمع
أقل من 0	0
أقل من 10	15
أقل من 20	55
أقل من 30	110
أقل من 40	145
أقل من 50	150

ترتيب الربيع الاعلى

2- ترتيب الربيع الأعلى :-

$$\frac{3\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{150\times3}{4} = 112.5$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الربيع الادنى =

$$10 \times \frac{112.5-110}{145-110} + 30 = 30.714 \text{ درجة}$$

٣- معامل الاختلاف المعياري و معامل الالتواء المعياري :-

أ- معامل الاختلاف المعياري :-

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100 = \frac{10.03}{23.33} \times 100 = 42.98\ \%$$

ب- معامل الالتواء المعياري :-

$$\text{معامل الالتواء المعياري} = \frac{3(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$\text{عامل الالتواء المعياري} = \frac{3\times(23.33-23.64)}{10.03} = -0.093$$

حيث أن الناتج قيمة تقترب من الصفر إذا فهذا التوزيع متماثل .

٤- معامل الاختلاف الربيعي و معامل الالتواء الربيعي :-

أ- معامل الاختلاف الربيعي $= \frac{\text{الربيع الاعلى} - \text{الربيع الادنى}}{\text{الربيع الاعلى} + \text{الربيع الادنى}} \times ١٠٠$

$$\text{معامل الاختلاف الربيعي} = \frac{30.714-15.625}{30.714+15.625} \times 100 = 32.56\%$$

ب- معامل الالتواء الربيعي $= \frac{(\text{الربيع الاعلى} - \text{الوسيط}) - (\text{الوسيط} - \text{الربيع الادنى})}{(\text{الربيع الاعلى}) - (\text{الربيع الادنى})}$

$$\text{معامل الالتواء الربيعي} = \frac{(30.714-23.64)-(23.64-15.625)}{(30.714-15.625)} = -0.06$$

حيث أن الناتج قيمة تقترب من الصفر إذا فهذا التوزيع متماثل .

الجدول التالي يوضح توزيع فئات الدخل بالريال بالنسبة لمجموعة من الاسر:-

فئات الدخل	عدد الأسر
100 -	30
200 -	65
300 -	80
400 -	75
500 - 600	50
المجموع	300

المطلوب :-

1- الوسط الحسابي و التباين و الانحراف المعياري :-

فئات الدخل	f	x	f x	fx^2
100 -	30	150	4500	675000
200 -	65	250	16250	4062500
300 -	80	350	28000	9800000
400 -	75	450	33750	15187500
500 - 600	50	550	27500	15125000
المجموع	300		110000	44850000

١- الوسط الحسابي :-

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{110000}{300} = 366.67 \text{ ريال}$$

٢- التباين :-

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{44850000}{300} - \left(\frac{110000}{300}\right)^2 = 15055.56$$

٣- الانحراف المعياري :-

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{15055.56} = 122.7011 \text{ ريال}$$

2- الوسيط و الربيع الادنى و الربيع الاعلى :-

1- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الجدول الاصلي

فئات الدخل	عدد الأسر
100 -	30
200 -	65
300 -	80
400 -	75
500 - 600	50
المجموع	300

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

الحد الادنى لفئة	التكرار المتجمع
أقل من 100	0
أقل من 200	30
أقل من 300	95
أقل من 400	175
أقل من 500	250
أقل من 600	300

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الادنى لفئة	التكرار المتجمع
أقل من 100	0
أقل من 200	30
أقل من 300	95
أقل من 400	175
أقل من 500	250
أقل من 600	300

ترتيب الوسط

٢- ترتيب الوسيط :-

$$150 = \frac{300}{2} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2}$$

(البحث عن القيمة فى عمود التكرار المتجمع)

٣- الوسيط $= 300 + \frac{150-95}{175-95} \times 100$

$= 368.75$ ريال

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الادنى لفئة	التكرار المتجمع
أقل من 100	0
أقل من 200	30
أقل من 300	95
أقل من 400	175
أقل من 500	250
أقل من 600	300

ترتيب الربيع الادنى

٢- ترتيب الربيع الأدنى :-

$$75 = \frac{300}{4} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{4}$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الربيع الادنى =

$= 200 + \frac{75-30}{95-30} \times 100 =$ 269.23 ريال

1- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الادنى لفئة	التكرار المتجمع
أقل من 100	0
أقل من 200	30
أقل من 300	95
أقل من 400	175
أقل من 500	250
أقل من 600	300

ترتيب الربيع الاعلى

٢- ترتيب الربيع الأعلى :-

$$225 = \frac{300\times3}{4} = \frac{\text{مجموع التكرارات}3}{4} =$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الربيع الادنى =

$= 400 + \frac{225-175}{250-175} \times 100 =$ 466.67 ريال

٣- معامل الاختلاف المعياري و معامل الالتواء المعياري :-

أ- معامل الاختلاف المعياري :-

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100 = \frac{122.7011}{366.67} \times 100 = 33.46\ \%$$

ب- معامل الالتواء المعياري :-

$$\text{معامل الالتواء المعياري} = \frac{3(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

$$\text{عامل الالتواء المعياري} = \frac{3\times(366.67-368.75)}{122.7011} = -0.05$$

حيث أن الناتج قيمة تقترب من الصفر إذا فهذا التوزيع متماثل .

٤- معامل الاختلاف الربيعي و معامل الالتواء الربيعي :-

أ- معامل الاختلاف الربيعي = $\frac{\text{الربيع الاعلى} - \text{الربيع الادنى}}{\text{الربيع الاعلى} + \text{الربيع الادنى}} \times ١٠٠$

معامل الاختلاف الربيعي $= \frac{466.67-269.23}{466.67+269.23} \times 100 = 26.83\%$

ب- معامل الالتواء الربيعي = $\frac{(\text{الربيع الاعلى} - \text{الوسيط}) - (\text{الوسيط} - \text{الربيع الادنى})}{(\text{الربيع الاعلى}) - (\text{الربيع الادنى})}$

معامل الالتواء الربيعي $= \frac{(466.67-368.75)-(368.75-269.23)}{(466.67-269.23)} = -0.0081$

حيث أن الناتج قيمة تقترب من الصفر إذا فهذا التوزيع متماثل .