جامعة الملك فيصل - كلية ادارة الاعمال

ملخص مقرر الاحصاء في الادارة

د . ملفي الرشيدي

تجميع المحاضرات
نداء الايام

تنسيق الشكل النهائي والشرح واضافات اخرى
turki1400

الفصل الدراسي الاول لعام 1435 -1436

المحاضرة الاولى

❖ الدالة :

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ،وكلمة دالة تعبر عن مفهوم (أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو (تتعين بواسطة) كمية أخرى) .

ملاحظة :-

- ❖ إذا كانت f دالة من A إلى B فإن A تسمى مجال الدالة و تسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .
- ❖ حتى تكون f دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور .

❖ دالة كثيرة الحدود :

هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ(x).

(وهذه امثلة على شكلها):

1- $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$

2- $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)

2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)

3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى الدالة التربيعية)

4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)

5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة،وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

4- $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

مثال :إذا كانت $\underline{f(x)=3x+5}$ و $\underline{g(x)=x^2+1}$ فأوجد:

1- $(f + g)(x)$

$= f(x) + f(g)$

$= 3x+5 + x^2+1$

$= x^2+3x+6$

@ نجمع الدالتين بوضعها على الشكل المقابل - السهم الاول

@ ناتج الجمع نقوم بترتيبه حسب درجة الاس الاكبر ليظهر على الشكل المقابل – السهم الثاني

مثال :إذا كانت $\underline{f(x)=3x+5}$ و $\underline{g(x)=x^2+1}$ فأوجد:

2- $(f - g)(x) =$

$= f(x) - g(x)$

$= (3x+5) - (x^2+1)$

$= 3x+5 -x^2-1$

$= -x^2 + 3x +4$

@ نقوم بفكيك الاقواس ولانهمل اشارة (-) اللي بين القوسين - السهم الاول

@ ناتج تفكيك غير اشارة ما بداخل القوس الثاني – السهم الثاني

@نرتب الدالة حسب درجة الاس الاكبر – السهم الثالث

مثال :إذا كانت $\underline{f(x)=3x+5}$ و $\underline{g(x)=x^2+1}$ فأوجد:

3- $(f \times g)(x) =$

$= f(x) \times g(x)$

$= (3x+5) \times (x^2+1)$

نقوم بضرب مابداخل القوس الاول في مابدخل القوس الثاني كما هو مبين بالاقواس

$= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5$

$= 3x^3 + 5x^2 + 3x +5$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد

$$4-\ (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

- ❖ **معادلة الخط المستقيم :-**
- ❖ **إيجاد ميل الخط المستقيم :-**

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(x1 , y1) و B(x1 , y1)

ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_1 \neq x_2$

مثال(1):-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(1,-3) و B(3,7) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-(-3)}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال(2) :-

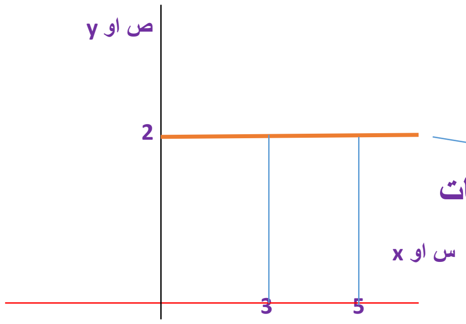
أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(3,2) و B(5,2) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

مهم جداً : إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعنى أن المستقيم يوازي محور السينات .

للتوضيح :



المستقيم يوازي محور السينات

مثال(3) :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

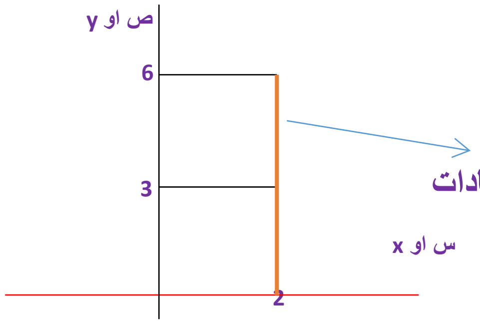
الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0} = \infty$$

مهم جداً :اذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

للتوضيح:

للتوضيح :



المستقيم يوازي محور الصادات

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a وb لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال(1) :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال (2):-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$5x = -4y + 10$

الحل

هنا نلاحظ ان المعادلة غير مرتبة ولا تتوافق مع الصيغة العامة ومن هنا نقوم بالتالي :

نقوم بنقل الطرف الايمن الى الطرف الايسر مع مراعاة تبديل الاشارات لكي يصبح الطرف الايمن =0

لتظهر على الشكل الموضح بجوار السهم

ثم نطبق القاعدة بكل سهولة

$5x + 4y - 10 = 0$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

❖ المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m1 = m2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

هنا نلاحظ ان المعادلة الثانية غير مرتبة ولا تتوافق مع الصيغة العامة ومن هنا نقوم بالتالي :

نقوم بنقل الطرف الايسر الى الطرف الايمن مع مراعاة تبديل الاشارات لكي يصبح الطرف الايسر =0

لتظهر على الشكل الموضح بجوار السهم

ثم نطبق القاعدة بكل سهولة

$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$

إذا المستقيمان متوازيان

❖ المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m1 \times m2 = -1$

مثال :-

هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل

$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$

$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{3}$

$m_1 \times m_2 = \cancel{3} \times \frac{-1}{\cancel{3}} = -1$

اذا المستقيمان متعامدان

❖ تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميلة m و يمر بالنقطة A(x1,y1) هي :-

$y - y1 = m (x - x1)$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (5,-3) و ميله يساوي -2 .

الحل

$m = -2 \quad , \ x_1 = 5 \quad , \ y_1 = -3$

$y - (-3) = -2(x-5)$

$Y + 3 = -2(x-5)$

$Y+3 = -2x + 10$

$Y = -2x + 10 - 3$

$Y = -2x + 7$

❖ النهايات

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \to a} f(x)$

وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a .

مثال :-

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن $lim_{x\to 2} f(x)$

الحل :

$lim_{x\to 2} f(x)$=2x +1

=2(2) +1=5

يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما تؤول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

❖ جبر النهايات :

1- إذا كانت f(x)=c (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن
$\lim_{x\to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

2- إذا كانت f(x) = m x + c فإن
$lim_{x\to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

1- $lim_{x\to 5} 30$

2- $lim_{x\to 2}(1-2x)$

3- $lim_{x\to 2}(3x+4)$

4- $lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5)$

الحل

1- $lim_{x\to 5} 30$ = 30

2- $lim_{x\to 2}(1-2x)$ = 1 – (2 × -2) = 5

3- $lim_{x\to 2}(3x+4)$ = 3 × 2 +4 = 6+ 4 = 10

4- $lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5)$ = 8 × $(\frac{1}{2})$ -5 = 4 – 5 = -1

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

1- $\lim_{x\to5}[h(x) - f(x)]$

$= \lim_{x\to2} h(x) - \lim_{x\to2} f(x)$

$= 10.5 - 5 = 5.5$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

2- $\lim_{x\to2}[g(x)\times h(x)]$

$= \lim_{x\to2} g(x) \times \lim_{x\to2} h(x)$

$= -8 \times 10.5 = -84$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

3- $\lim_{x\to2} 8 f(x)$

$= 8 \times \lim_{x\to2} f(x) = 8 \times 5 = 40$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

4- $\lim_{x\to2} \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{\lim_{x\to2} f(x)}{\lim_{x\to2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

مثال :

$lim_{x\to1}[3x-1]^6$ = $[lim_{x\to1} 3x-1]^6$

= $[3\times1-1]^6$ = $[3-1]^6$ = $[2]^6$ = 64

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $lim_{x\to2}(3x^3+5x^2-7)$

= $3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7$

= 3 × 8 + 5 × 4 - 7 = 37

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

2- $lim_{x\to3} \frac{3x^2+7}{x-5}$

= $\frac{3\ \times3^2+7}{3-5}$ = $\frac{3\times9+7}{-2}$ = $\frac{34}{-2}$ = -17

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

3- $lim_{x\to2} \frac{2x-1}{5x+3}$

= $\frac{2\times2-1}{5\times2+3}$ = $\frac{4-1}{10+3}$ = $\frac{3}{13}$

4- $lim_{x\to2} e^x$

= e^2

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

5- $lim_{x\to1} e^{x^2+2x+1}$

= $e^{1^2+2\times1+1}$ = e^{1+2+1} = e^4

6- $lim_{x\to2} log(3x^2+5)$ = log (3×2^2 + 5)

= log (3×4+5)

= log (12+5) = log (17)

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

7- $\lim_{x\to 3} \ln(2x-5)$

= ln (2×3-5) = ln (6-5) = ln (1) =0

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

8- $\lim_{x\to 1}(3x^3+4x-2)^3$ = $((3\times 1^3) + 4\times 1 - 2)^3$

= $(3+4-2)^3 = (5)^3 = 125$

9- $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5}$ = $\sqrt[3]{2^2+5}$ = $\sqrt[3]{4+5}$ = $\sqrt[3]{9}$ = 2.08

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x) = \begin{cases} 9x^2 & , x < 5 \\ 15x - 2 & , x > 5 \end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى 3 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى 7 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x\to 3} f(x)$

= 7x -2 = (7) × (3) -2 = 19

نلاحظ ان 3 تقع في مجال الدالة الثانية لان
3 >1 فنطبق على الدالة الثانية وذلك بالتعويض بالقيمة 3 عن x

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2+5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

$2\text{-}\ lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$

نلاحظ ان $\frac{1}{2}$ تقع في مجال الدالة الاولى لان

$\frac{1}{2}$<1 نطبق على الدالة الاولى وذلك بالتعويض

بالقيمة $\frac{1}{2}$عن x

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (\frac{1}{2})^2 + 5 = 3\times\frac{1}{4} + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \ x < 1 \\ 7x - 2 & , \ x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

$3\text{-}\ lim_{x\to 1} f(x)$

<u>الحل</u>

$3\text{-}\ \lim_{x\to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $lim_{x\to 1^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $lim_{x\to 1^-} f(x)$ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$lim_{x\to 1^+} f(x)$(النهاية من اليمين)

$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$

$lim_{x\to 1^-} f(x) =$(النهاية من اليسار)

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3+5 = 8$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$lim_{x\to 1^-} f(x) \neq lim_{x\to 1^+} f(x)$

$lim_{x\to 1} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \ x < 5 \\ 6x - 10 & , \ x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$lim_{x\to 5} f(x)$

الحل

$\lim_{x\to 5} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $lim_{x\to 5^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $lim_{x\to 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$lim_{x\to 5^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

= 6x -10 = 6 × 5 -10 = 20

$lim_{x\to 5^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$lim_{x\to 5^-} f(x) \neq lim_{x\to 5^+} f(x)$

$lim_{x\to 5} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

❖ **الاتصال**

تعريف :

يقال للدالة f(x) متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

1- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R.

2- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

3- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , \ 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , \ x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

f(5) = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$lim_{x \to 5^+} f(x)$ = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$lim_{x \to 5^-} f(x)$ = 6x = 6× 5 = 30

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=5 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , \ 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , \ x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في *x = 10* ؟

الحل

f(10) = 20+4 x = 20 + 4×10 = 20 +40 = 60

$lim_{x \to 10^+} f(x)$ = 20+4x = 20 +4× 10 = 20 +40 = 60

$lim_{x \to 10^-} f(x)$ = $12x^2$ = 12×10^2 = 1200

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , \ x \leq 8 \\ 1160 + 15x & , \ x > 8 \end{cases}$$

متصلة في *x = 8* ؟

الحل

f(8) = $20\ x^2 = 20 \times (8)^2$ = 20 × 64 = 1280

$lim_{x \to 8^+} f(x)$ = 1160 +15x = 1160 +15 × 8 = 1280

$lim_{x \to 8^-} f(x)$ = $20\ x^2 = 20 \times (8)^2$ = 20 × 64 = 1280

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند x=8 .

تمارين الواجب :-

تمرين 1 :- الحلول مجهود شخصي

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

1- $lim_{x\to 0}\ 5$ =5

2- $lim_{x\to 5}(10-2x+x^2)$ =(10 -2(5)+ 5^2) = ~~10~~ -~~10~~+25=25

3- $lim_{x\to 12}(3x+6)$ =(3(12)+6) =36+6=42

4- $lim_{x\to \frac{2}{3}}(9x-2)$=(9($\frac{2}{3}$) -2)= $\frac{18}{3}$ -2=6-2=4

تمرين 3 :-

أوجد :-

1- $lim_{x\to 1}[5x-2]^2$ = $[lim_{x\to 1}\ 5x-2]^2$ = $[5\times 1-2]^2$ =$[5-2]^2$ = $[3]^2$=9

2- $lim_{x\to 2}\left[10\ -2x\right]^2$ =$[lim_{x\to 2}\ 10\ -2x]^2$= $[10-2\times 2]^2$ =$[10-4]^2$ = $[6]^2$=36

تمرين 4 :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $lim_{x\to 5}(2x^3-2x^2-50)$

=$(2(5)^3-2(5)^2-50)$=2(125)-2(25)-50=150

2- $lim_{x\to 0}(1-e^x)$ = $(1-e^0)$ =1-1=0

3- $lim_{x\to 1}\ log(10x^4+15)$

= $log(10(1)^4+15)$= $log(25)$=1.3979

4- $lim_{x\to 2}\ e^{2x^2+3x+2}$ =$e^{2(2)^2+3(2)+2}$ =e^{8+6+2}= e^{16}

5- $lim_{x\to 3}\ ln(20x^2-5x+10)$

= $ln(20(3)^2-5(3)+10)$ = $ln(20(9)-15+10)$= $ln(175)$=5.1647

تمرين 5 :-

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2 + 15 & , \ x < 2 \\ 5x - 2 & , \ x > 2 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $lim_{x \to 3} f(x)$ = $5x - 2$ =5(3)-2=15-2=13

نلاحظ ان 3 تقع في مجال الدالة الثانية لان
3 >2 فنطبق على الدالة الثانية وذلك بالتعويض بالقيمة 3 عن x

2- $lim_{x \to 1} f(x)$ = $30x^2 + 15$ = $30(1)^2 + 15$ =30+15= 45

نلاحظ ان 1 تقع في مجال الدالة الاولى لان
2> 1 فنطبق على الدالة الثانية وذلك بالتعويض بالقيمة 1 عن x

تمرين 6 :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \ 0 < x < 1 \\ 3 + x^2 & , \ x \geq 1 \end{cases}$$

متصلة في *x = 10* ؟

f(10) = $3 + x^2$ = $3 + (10)^2$ = 3 × 100 = 300

$lim_{x \to 10^+} f(x)$ = $3 + x^2$ = $3 + (10)^2$ = 3 × 100 = 300

$lim_{x \to 10^-} f(x)$ = $2x$ = $2(10)$=20

***حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند* x=10 .**

المحاضرة الثانية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

❖ قواعد التفاضل

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y= 5x + 9$

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx}$ =?????

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً **صفر** فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$$y = 15$$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

❖ القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

1- $y = x5$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 5\,x4$

2- $y = 15\,x4$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 60\,x3$

3- $y = 10\,x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 10$

❖ القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$$

❖ القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

1- $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x2 - 7x)(3)$$

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$$\frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)(3)$$

❖ القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-

مشتقة حاصل قسمة دالتين $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ =

$$\frac{\text{المقام} \times \text{البسط مشتقة} - \text{البسط} \times \text{المقام مشتقة}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x-3x-6}{9\,x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$$

❖ القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

1 – $y = (15x2 + 20)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,(15x^2 + 20)^2\,(30x)$$

2 – $y = (10\,x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$$\frac{dy}{dx} = 5\,(10\,x^3 - 12x^2 + 5)^4\,(30x^2 - 24x)$$

❖ القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15\,x^4 + 12\,x^3 + 20\,x^2 - 5\,x + 12$$

(المشتقة الاولى) $\frac{dy}{dx} = 60\,x^3 + 36\,x^2 + 40\,x - 5$

(المشتقة الثانية) $\frac{d^2y}{dx^2} = 180\,x^2 + 72\,x + 40$

(المشتقة الثالثة) $\frac{d^3y}{dx^3} = 360\,x + 72$

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1- المرونة :-

تعرف مرونة الطلب السعرية :

على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية فتعرف على أنها :

مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = 1 (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (1):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D= 80 – 6x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 100وحدة عند سعر يساوي 10 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D^{/}= -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$

م $= (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

مثال (2):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 200 – 10 x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 200وحدة عند سعر يساوي 20 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D^{/}$= -10)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = (-10) × $\frac{20}{200}$ = -1

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (3):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 15x-20) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 1000وحدة عند سعر يساوي 100 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D^{/}$= 15)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = (15) × $\frac{100}{1000}$ = 1.5

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي $(D = 1.5x + 20)$ أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي 600 وحدة عند سعر 200 ريال ؟

الحل : حل شخصي

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D^{/} = 1.5)$

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = $(1.5) \times \frac{200}{600} = 0.5$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة اصغر من الواحد الصحيح إذا فالطلب <u>قليل المرونة أو غير مرن</u>

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

2- الاستهلاك والادخار :-

1- <u>الميل الحدي للاستهلاك</u> = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك <u>K</u> حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

<u>قيمة الميل الحدى للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)</u>

2- <u>الميل الحدى للادخار</u>= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

<u>قيمة الميل الحدى للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك</u>

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 15+0.6x -0.02x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$$K^{/}= 0.6 – 0.04 x$$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$K^{/}= 0.6 – 0.04 x 1 = 0.6 -.04 = 0.56$$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.56 = 0.44

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

3- النهايات العظمى و الصغرى :-

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

1 - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

2 - يتم إيجاد المشتقة الثانية .

3 - تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة

∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P= - 0.4x^2 + 300x -2000$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P^{/} = -0.8x + 300$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = -0.8$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= 500-0.2x +0.1x^2$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^{/} = -0.2 + 0.2x$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = 0.2$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

4- الربح الحدي :-

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

2- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

3- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

4- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

5- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

6 = الايراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (1) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x +30$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$R^{/} = 36x^2 + 40x - 10$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$R^{/} = 36x^2 + 40x - 10 = 36\times10^2 + 40\times10 - 10=3990$ ريال

مثال (2) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

سعر بيع الوحدة= $4x^2 + 6x +5$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 15 وحدة ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) X x

$R = (4x^2 + 6x +5)Xx= 4x^3 + 6x^2 +5x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R^{/} = 12x^2 + 12x + 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدات إذاً $x=15$

$R^{/} = 12x^2+ 12x +5 = 12\times15^2 + 12\times15 +5=2885$ ريال

مثال (3) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $10x^3 -11x^2 +5x -20$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) X x

$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) X\ x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R^{/} = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً x=5

$R^{/} = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

$R = 40\times5^3 - 33\times5^2 + 10\times5 - 20 = 4205$ ريال

مثال (4) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 - 12x + 15$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

(التكاليف الكلية) $C = 10x^2 - 12x + 15$

(التكاليف الحدية)$C^{/} = 20x - 12$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً x=10

$C^{/} = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188$ ريال

مثال (6) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 15x^2 + 9x - 17$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$=(2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$

$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

$P^/ = 6x^2 - 21x + 1$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=30$

$P^/ = 6x^2 - 21x + 1 = 6\times 30^2 - 21\times 30 + 1 = 4771$ ريال

مثال (7) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 + 3x + 20$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$=(12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$

$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

$P^/ = 36x^2 + 30x - 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 25 وحدة إذاً $x=25$

$P^/ = 36x^2 + 30x - 5 = 36\times 25^2 + 30\times 25 - 5 = 23245$ ريال

تمرين شامل (1)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$R = 30\,x^4 + 12x^2 - 6\,x + 15$

$C = 13\,x^3 - 5x^2 + 3\,x - 20$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .

3- دالة الربح الكلي .

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

الحل

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$R = 30\,x^4 + 12x^2 - 6\,x + 15$

$R^{/} = 120\,x^3 + 24x^2 - 6$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$R^{/} = 120 \times 10^3 + 24 \times 10^2 - 6 = 122394$ ريال

الحل

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$C = 13\,x^3 - 5x^2 + 3\,x - 20$

$C^{/} = 39\,x^2 - 10x + 3$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$C^{/} = 39 \times 12^2 - 10 \times 12 + 3 = 5499$ ريال

الحل

3- دالة الربح الكلي :-

$R = 30\,x^4 + 12x^2 - 6\,x + 15$

$C = 13\,x^3 - 5x^2 + 3\,x - 20$

$P = R - C = 30\,x^4 - 13\,x^3 + 7x^2 - 9\,x + 35$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$P = 30\,x^4 - 13\,x^3 + 7x^2 - 9\,x + 35$

$P^{/} = 120\,x^3 - 39x^2 + 7x - 9$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$P^{/} = 120 \times 12^3 - 39 \times 12^2 + 7 \times 12 - 9 = 201819$ ريال

تمرين شامل (2)

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) $= 3x^2 + 25x - 18$

$C = 10\,x^2 + 2x - 5$

المطلوب :-

1- دالة الايراد الكلي .

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

4- دالة الربح الكلي .

5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

الحل

1- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) X x

$R = (3x^2 + 25x - 18) \text{X}\, x$

$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$

الحل

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R' = 9x^2 + 50x - 18$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$R' = 9\times5^2 + 50\times5^2 - 18 = 1457$ ريال

الحل

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$C' = 20x + 2$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C' = 20\times20 + 2 = 402$ ريال

الحل

4- دالة الربح الكلي :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

$P' = 9x^2 + 30x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$P' = 9\times10^2 + 30\times10 - 20 = 1180$ ريال

المحاضرة الثالثة

❖ التكامل :-

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ،

حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت $\frac{dy}{dx}$ وللتعبير عن عملية التكامل نستخدم الرمز ∫ و هو رمز التكامل

و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل f(x) و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

$$\int f(x).dx$$

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

❖ قواعد التكامل :-

1- تكامل x المرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$$\int x^n \,.dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int k \,.dx = k\,x + c$$

$$\int .dx = x + c$$

مثال :-

1- $\int x^3 \,.dx = \frac{1}{4} x^4 + c$

2- $\int x^5 \,.dx = \frac{1}{6} x^6 + c$

3- $\int 6 \,.dx = 6\,x + c$

4- $\int 3x^4 \,.dx = \frac{3}{5} x^5 + c$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8\ .dx$$

الحل

y = $\frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + c$

y = $\frac{1}{6}x^6 + x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 8x + c$

مثال :-

أوجد :-

$$\int 4\,x^3 - 30x^2 + 20x + 3\ .dx$$

الحل

y = $\frac{4}{4}x^4 - \frac{30}{3}x^3 + \frac{20}{2}x^2 + 3x + c$

y = $x^4 - 10\,x^3 + 10x^2 + 3x + c$

2- تكامل e^x:-

$$\int e^x . dx = e^x + c$$

3- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$$\int \frac{1}{x} . dx = \ln x + c$$

إيجاد قيمة c :-

<u>مثال :-</u>

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9\,x^2 - 10x + 15\ .dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (4,1)؟

الحل

y = $\frac{9}{3}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 15x$ + c

y = $3x^3 - 5x^2 + 15x$ + c

حيث أن قيمة x = 4 و قيمة y = 1 فإن :-

1 = $3(4)^3 - 5(4)^2 + 15$(4) + c

1 = 3×64 $- 5 \times 16 + 60$ + c

1 = 172 + c

c= -171

التطبيقات التجارية للتكامل :-

1- الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .

2- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

3- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

4- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$$R^{/} = 3x^2 + 6x - 10$$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

R = $\frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x$

R = $x^3 + 3x^2 - 10x$

2- حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات أي أن x=5 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

الايراد الكلي= $(5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = 150$ ريال

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$$

$$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$$

2- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات أي أن x=10 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$$

التكاليف الكلية $C = 30000 - 20000 + 400 - 400 = 10000$ ريال

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

2- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع 25 وحدة .

3- دالة الربح الحدي .

4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

5- حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع 10 وحدات .

الحل

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كمايلي:-

$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 20x$

$R = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع 20 وحدة يمكن التعويض عن قيمة x=20 كما يلي :-

$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$

$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000$ ريال

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$C' = 36x^2 + 40x - 10$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$C = 12x^3 + 20x^2 - 10x$

وللوصول إلى حجم التكليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة يتم التعويض عن قيمة x=25 كما يلي :-

$C = 12(25)^3 + 20(25)^2 - 10(25) = 199750$ ريال

3- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$P^{/} = R^{/} - C^{/}$

$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$

$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$

4- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$P^{/} = 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$

$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$P = R - C$

$= (2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x) - (12x^3 + 20x^2 - 10x)$

$= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة x=10 في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$P = 2(10)^4 - 4(10)^3 - 26(10)^2 + 30(10)$

$= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700$ ريال