

جامعة الملك فيصل / كلية ادارة الاعمال  
ملخص الإحصاء في الإدارة ١٤٣٥  
د/ ملفي الرشيدى



# المحاضرة الاولى

## الدالة :

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ، وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على ) أو (تتوقف على ) أو (تتبعين بواسطة ) كمية أخرى .

## ملاحظة :-

إذا كانت  $f$  دالة من  $A$  إلى  $B$  فإن  $A$  تسمى مجال الدالة و  $B$  تسمى بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .

حتى تكون  $f$  دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور .

## • دالة كثيرة الحدود :

هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$$

حيث أن  $a$  تشير إلى الأعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و  $n$  عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ  $(x)$ .

$$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$$

$$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$$

## مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1-  $f(x) = 5$  (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة )

2-  $f(x) = 4x + 7$  (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)

3-  $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$  (الدرجة الثانية و تسمى بالدالة التربيعية)

4-  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$  (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)

5-  $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$  (الدرجة الرابعة)

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة، وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة و تركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين فإن :-

$$1- (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$2- (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$3- (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

مثال :إذا كانت  $f(x)=3x+5$  و  $g(x)=x^2+1$  فأوجد:

$$1- (f + g)(x)$$

$$= f(x) + f(g)$$

$$= 3x+5 + x^2+1$$

$$= x^2+3x+6$$

نقوم بجمع الدالتين

$$3x+5+x^2+1=3x+6+x^2$$

وبعدها نقوم بترتيب حسب الاس =

$$x^2+3x+6$$

مثال :إذا كانت  $f(x)=3x+5$  و  $g(x)=x^2+1$  فأوجد:

$$2-(f - g)(x) =$$

$$= f(x) - g(x)$$

$$= (3x+5) - (x^2+1)$$

$$= 3x+5 -x^2-1$$

$$= -x^2 + 3x + 4$$

اولا نقوم بتفكيك ما بداخل القوس  $3x+5$  تخرج من قوس

بدون تغير  $x^2+1$  نضربها بأشاره السالب فتصبح  $-x^2-1$

نقوم بجمع المعادلتين مع الانتباه للاشارات

$$=3x+5-x^2-1$$

$$=3x+4-x^2$$

$$=-x^2+3x+4$$

مثال :إذا كانت  $f(x)=3x+5$  و  $g(x)=x^2+1$  فأوجد:

$$3- (f \times g)(x) =$$

$$= f(x) \times g(x)$$

$$= (3x+5) \times (x^2+1)$$

$$= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5$$

$$= 3x^3 + 5x^2+ 3x + 5$$

عملية ضرب نضرب ما في  
الاقواس الاول بالقوس الثاني

مثال :إذا كانت  $f(x)=3x+5$  و  $g(x)=x^2+1$  فأوجد

$$4- \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

## معادلة الخط المستقيم :-

### ايجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين  $A(x_1, y_1)$  و  $B(x_2, y_2)$  ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم  $y$  و التغير في قيم  $x$  و نرسم له بالرمز  $m$  و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن  $x_1 \neq x_2$

### مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين  $A(1, -3)$  و  $B(3, 7)$  .

الحل /

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-3)}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

### مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين  $A(3, 2)$  و  $B(5, 2)$  .

الحل /

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

### مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين  $A(2, 3)$  و  $B(2, 6)$  .

الحل /

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty$$

إذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن  $a$  و  $b$  و  $c$  هي ثوابت و  $a$  و  $b$  لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

**مثال :-**

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

**الحل /**

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

**مثال :-**

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$5x = -4y + 10$$

**الحل /**

$$5x + 4y - 10 = 0$$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المعادله غير مرتبه نقوم بترتيبها مع  
مراعات تبديل الاشارات اثناء نقله من  
الجهه اليمن لليسري

### المستقيمت المتوازية :-

يقال أن المستقيمت متوازية إذا كانت  $m_1 = m_2$

**مثال :**

هل المستقيمان  $y = 4x + 1$  و  $4x - y - 2 = 0$  متوازيان ؟

**الحل /**

$$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$$

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$m_1 = m_2$$

هنا نقوم بترتيب المعادله الثانيه كما قمنا بها  
بمعادله السابقيه  
والانتباه لتغير الاشاره اثناء نقلها للجهه اليسري

إذا المستقيمان متوازيان

## المستقيمت المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان  $m_1 \times m_2 = -1$

**مثال :-**

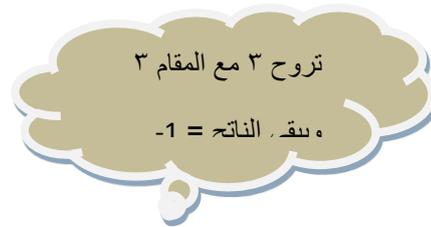
هل المستقيمان  $3y + x - 15 = 0$  ،  $y - 3x - 2 = 0$  متعامدان ؟

**الحل /**

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

$$m_2 = (-a)/b = -1/3$$

$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{-1}{3} = -1$$



## المستقيمان متعامدان

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميله  $m$  و يمر بالنقطة  $A(x_1, y_1)$  هي :-

$$y - y_1 = m ( x - x_1 )$$

**مثال :-**

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة  $(5, -3)$  و ميله يساوي  $-2$  .

**الحل /**

$$m = -2 , x_1 = 5 , y_1 = -3$$

$$y - (-3) = -2(x-5)$$

$$y + 3 = -2(x-5)$$

$$y = -2x + 7$$

## النهايات

**مفهوم النهاية :-**

يقصد بنهاية الدالة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  وتقرأ نهاية الدالة  $f(x)$  عندما تقترب  $x$  من القيمة  $a$  .

مثال :-

إذا كانت  $f(x) = 2x + 1$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  يعني إيجاد قيمة الدالة  $f(x)$  عندما تؤول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

جبر النهايات :

١- إذا كانت  $f(x) = c$  (دالة ثابتة) حيث  $c$  عدد حقيقي فإن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  لكل عدد حقيقي  $a$  .

٢- إذا كانت  $f(x) = mx + c$  فإن  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ma + c$  لكل عدد حقيقي  $a$  .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x \rightarrow 5} 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (1 - 2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (8x - 5)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 5} 30 = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (1 - 2x) = 1 - (2 \times 2) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times \frac{1}{2} - 5 = 4 - 5 = -1$$

مثال :

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$  ، فأوجد ما يلي :-

$$1 - \lim_{x \rightarrow 5} [h(x) - f(x)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} h(x) - \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$= 10.5 - 5 = 5.5$$

مثال :

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$  ، فأوجد ما يلي :-

$$2- \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \times h(x)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$$

$$= -8 \times 10.5 = -84$$

مثال :

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$  ، فأوجد ما يلي :-

$$3- \lim_{x \rightarrow 2} 8 f(x)$$

$$= 8 \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$$

مثال :

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$  ، فأوجد ما يلي :-

$$4- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

نظرية :

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  موجودة و  $n$  عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$$

مثال :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} [3x - 1]^6 &= [\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 1]^6 \\ &= [3 \times 1 - 1]^6 = [3 - 1]^6 = [2]^6 = 64\end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$1- \lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 + 5x^2 - 7)$$

$$= 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7$$

$$= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7 = 37$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$2- \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 7}{x - 5}$$

$$= \frac{3 \times 3^2 + 7}{3 - 5} = \frac{3 \times 9 + 7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$3- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{5x + 3}$$

$$= \frac{2 \times 2 - 1}{5 \times 2 + 3} = \frac{4 - 1}{10 + 3} = \frac{3}{13}$$

$$4- \lim_{x \rightarrow 2} e^x$$

$$= e^2$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$5- \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 + 2x + 1}$$

$$= e^{1^2 + 2 \times 1 + 1} = e^{1 + 2 + 1} = e^4$$

$$6- \lim_{x \rightarrow 2} \log(3x^2 + 5) = \log(3 \times 2^2 + 5)$$

$$= \log(3 \times 4 + 5)$$

$$= \log(12 + 5) = \log(17)$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$7- \lim_{x \rightarrow 3} \ln(2x - 5) = \ln(2 \times 3 - 5) = \ln(6 - 5) = \ln(1) = 0$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$8- \lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 + 4x - 2)^3 = ((3 \times 1^3) + 4 \times 1 - 2)^3$$

$$= (3 + 4 - 2)^3 = (5)^3 = 125$$

$$9- \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 + 5} = \sqrt[3]{2^2 + 5} = \sqrt[3]{4 + 5} = \sqrt[3]{9} = 2.08$$

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x) = \begin{cases} 9x^2 & , x < 5 \\ 15x - 2 & , x > 5 \end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلا بد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي ( x تؤول إلى ٣ مثلاً ) فيتم التعويض في الدالة الاولي أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية ( x تؤول إلى ٧ مثلاً ) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases} \text{ إذا كانت}$$

فأوجد :-

$$1- \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ (و ٣ تقع في مجال الدالة الثانية)}$$

$$= 7x - 2 = 7 \times 3 - 2 = 19$$

مثال :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases} \text{ إذا كانت}$$

فأوجد :-

$$2- \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) \text{ (و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)}$$

$$= 3x^2 + 5 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 3 \times \frac{1}{4} + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$3- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

الحل

$$3- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  و

النهاية من اليسار  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  ومن ثم يتم التعويض في المجالين )

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ (النهاية من اليمين)}$$

$$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ (النهاية من اليسار)}$$

$$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3 + 5 = 8$$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

هذه النهاية غير موجودة  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , x < 5 \\ 6x - 10 & , x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$  و

النهاية من اليسار  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$  ومن ثم يتم التعويض في المجالين )

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \text{ (النهاية من اليمين)}$$

$$= 6x - 10 = 6 \times 5 - 10 = 20$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \text{ (النهاية من اليسار)} =$$

$$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$$

هذه النهاية غير موجودة  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

الاتصال

تعريف :

يقال للدالة  $f(x)$  متصلة في النقطة  $a$  إذا تحققت الشروط التالية :-

١- لا بد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى  $R$ .

٢- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

٣- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

**مثال :-**

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في  $x = 5$  ؟

**الحل /**

$$f(5) = 25 + 2x = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 25 + 2x = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 6x = 6 \times 5 = 30$$

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند  $x=5$  .

**مثال :-**

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في  $x = 10$  ؟

**الحل**

$$f(10) = 20 + 4x = 20 + 4 \times 10 = 20 + 40 = 60$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 20 + 4x = 20 + 4 \times 10 = 20 + 40 = 60$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 12x^2 = 12 \times 10^2 = 1200$$

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند  $x=10$  .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , x \leq 8 \\ 1160 + 15x & , x > 8 \end{cases}$$

متصلة في  $x = 8$  ؟

الحل

$$f(8) = 20x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = 1160 + 15x = 1160 + 15 \times 8 = 1280$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 20x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$$

حيث أن النتائج متساوية إنَّ هذه الدالة متصلة عند  $x=8$  .

## المحاضرة الثانية

### التفاضل وتطبيقاته التجارية ،،

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
  - بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
  - معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:
- إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

### قواعد التفاضل :

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة .  
ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو  $y$  و الاخر متغير مستقل و هو  $x$  و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة  $y = 5x + 9$

المطلوب :- المشتقة الاولى للدالة  $\frac{dy}{dx} = \text{?????}$

### القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$$y = 15$$

فإن المتغير التابع  $y$  يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل  $x$  و على ذلك فإن تغير المتغير التابع  $y$  لن يؤثر على المتغير المستقل  $x$  ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

### القاعدة الثانية : تفاضل $x^n$

تفاضل المتغير  $x$  المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

$$1- y = x^5 \quad \frac{dy}{dx} = 5 x^4$$

$$2- y = 15 x^4 \quad \frac{dy}{dx} = 60 x^3$$

$$3- y = 10 x \quad \frac{dy}{dx} = 10$$

### القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$$1- y = 5 x^4 + 6 x^3 + 8 x^2 + 3 x$$

$$\frac{dy}{dx} = 20 x^3 + 18 x^2 + 16 x + 3$$

$$2- y = 20 x^5 + 10 x^3 - 5 x^2 + 15 x + 30$$

$$\frac{dy}{dx} = 100 x^4 + 30 x^2 - 10 x + 15$$

### القاعدة الرابعة :

مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الدالة الاولى كما هي  $\times$  مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي  $\times$  مشتقة الدالة الاولى

مثال :-

$$1- y = ( 3 x + 1 ) ( x^2 - 7 x )$$

$$\frac{dy}{dx} = ( 3 x + 1 ) ( 2x - 7 ) + ( x^2 - 7 x ) ( 3 )$$

$$2- y = ( 10 x^3 - 12 ) ( 5 x^2 + 2 x )$$

$$\frac{dy}{dx} = ( 10 x^3 - 12 ) ( 10 x + 2 ) + ( 30 x^2 ) ( 5 x^2 + 2 x )$$

القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-

$$= \frac{\text{المشتقة} \times \text{المقام} - \text{المقام} \times \text{مشتقة}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

يوجد خطأ هنا بالقاعده الخامسه  
بالمحتوي وتم تصحيحه

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4) - (4x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 12x - 6}{9x^2} = \frac{-6}{9x^2}$$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

$$1 - y = ( 15x^2 + 20 )^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 ( 15x^2 + 20 )^2 ( 30x )$$

$$2 - y = ( 10 x^3 - 12x^2 + 5 )^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 ( 10 x^3 - 12x^2 + 5 )^4 ( 30x^2 - 24x )$$

## القاعدة السابعة :

### المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5 \quad (\text{المشتقة الاولى})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40 \quad (\text{المشتقة الثانية})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72 \quad (\text{المشتقة الثالثة})$$

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

١- المرونة :-

**تعرف مرونة الطلب السعرية :** على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

**أما مرونة الطلب الدخلية** فتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

### حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر ( طلب عديم المرونة )

القيمة المطلقة للمرونة > ١ ( طلب قليل المرونة أو غير مرن )

القيمة المطلقة للمرونة = ١ ( طلب متكافئ المرونة )

القيمة المطلقة للمرونة < ١ ( طلب مرن )

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية ( طلب لانهاية المرونة )

قياس مرونة الطلب :

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\text{المطلوبة الكمية}} \times \frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

**مثال (١) :-**

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي  $(D = 80 - 6x)$  أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠ وحدة عند سعر يساوي ١٠ ريال؟

**الحل /**

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب  $(D' = -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\text{المطلوبة الكمية}} \times \frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$$

$$م = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن.

**مثال (٢) :-**

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي  $(D = 200 - 10x)$  أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ٢٠٠ وحدة عند سعر يساوي ٢٠ ريال؟

**الحل /**

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب  $(D' = -10)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\text{المطلوبة الكمية}} \times \frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$$

$$م = (-10) \times \frac{20}{200} = -1$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

**مثال (٣) :-**

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي  $(D = 15x - 20)$  أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠٠ وحدة عند سعر يساوي ١٠٠ ريال ؟

**الحل /**

أولاً نوجد المشتقة الأولى لدالة الطلب  $(D = 15)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الأولى لدالة الطلب}}{\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}} \times$$

$$م = (15) \times \frac{100}{1000} = 1.5$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

**تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-**

**٢- الاستهلاك والادخار :-**

١- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك  $K$  حيث الاستهلاك دالة في الدخل.

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح ( أي كسر موجب )

٢- الميل الحدي للادخار = المشتقة الأولى لدالة الادخار  $S$  حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح ( أي كسر موجب ) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = ١

**مثال (١) :-**

إذا كانت دالة الاستهلاك هي  $(K = 15 + 0.6x - 0.02x^2)$  المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

## الحل /

١- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$$K' = 0.6 - 0.04x$$

٢- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$$K' = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 - 0.04 = 0.56$$

٣- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$$= 1 - 0.56 = 0.44$$

**تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للفاضل :-**

**٣- النهايات العظمى و الصغرى :-**

**خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :**

١ - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

٢ - يتم إيجاد المشتقة الثانية .

٣ - تحديد نوع النهاية ( عظمى - صغرى ) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة .: يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

**مثال (١) :-**

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = -0.4x^2 + 300x - 2000$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمى أم صغرى ؟

## الحل /

١- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P' = -0.8x + 300$$

٢- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P'' = -0.8$$

٣- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية **عظمى**

## مثال (٢) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = 500 - 0.2x + 0.1x^2$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

### الحل /

١- المشتقة الأولى للدالة :-

$$P' = -0.2 + 0.2x$$

٢- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P'' = 0.2$$

٣- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية **صغرى** .

## تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

### ٤- الربح الحدي :-

١- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

٢- الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

٣- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي .

٤- التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية .

٥- الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي .

٦- = الإيراد الحدي - التكلفة الحدية .

## مثال (١) :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

## الحل /

الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي

$$R' = 36x^2 + 40x - 10$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً  $x=10$

$$R' = 36x^2 + 40x - 10 = 36 \times 10^2 + 40 \times 10 - 10 = 3990 \text{ ريال}$$

## مثال (٢) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$= 4x^2 + 6x + 5 \text{ (سعر بيع الوحدة)}$$

حيث أن  $x$  تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة ؟

## الحل /

١- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة  $\times$  سعر بيع الوحدة

$$R = (دالة سعر بيع الوحدة) \times X$$

$$R = (4x^2 + 6x + 5) \times X = 4x^3 + 6x^2 + 5x$$

٢- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي .

$$R' = 12x^2 + 12x + 5$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٥ وحدات إذاً  $x=15$

$$R' = 12x^2 + 12x + 5 = 12 \times 15^2 + 12 \times 15 + 5 = 2885$$

## مثال (٣) :-

في إحدى شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$$

حيث أن  $x$  تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب الايراد الحدي  
وليس الربح الحدي

المطلوب :-

إيجاد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل /

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة  $\times$  سعر بيع الوحدة

$$R = (دالة سعر بيع الوحدة) \times X$$

$$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) \times X = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$$

٢- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدات إذاً  $x=5$

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

$$= 40 \times 5^3 - 33 \times 5^2 + 10 \times 5 - 20 = 4205 \text{ ريال}$$

مثال (٤) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 - 12x + 15$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل /

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$$C = 10x^2 - 12x + 15 \text{ (التكاليف الكلية)}$$

$$C' = 20x - 12 \text{ (التكاليف الحدية)}$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً  $x=10$

$$C' = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188 \text{ ريال}$$

### مثال (٦) :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب :-

أوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة؟

الحل /

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$$

$$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي .

$$P' = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

$$P' = 6x^2 - 21x + 1$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً  $x=30$

$$P' = 6x^2 - 21x + 1 = 6 \times 30^2 - 21 \times 30 + 1 = 4771$$

### مثال (٧) :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب :-

أوجد حجم الأرباح الحدية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة؟

الحل /

الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$$

$$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي .

$$P' = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

$$P' = 36x^2 + 30x - 5$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٥ وحدة إذاً  $x=25$

$$P' = 36x^2 + 30x - 5 = 36 \times 25^2 + 30 \times 25 - 5 = 23245 \text{ ريال}$$

## تمرين شامل (١)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الإيرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$$R = 30 x^4 + 12x^2 - 6 x + 15$$

$$C = 13 x^3 - 5x^2 + 3 x - 20$$

المطلوب :-

١- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة .

٣- دالة الربح الكلي .

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .

الحل /

١- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$$R = 30 x^4 + 12x^2 - 6 x + 15$$

$$R' = 120 x^3 + 24x - 6$$

يوجد خطأ هنا كانت  
١٠ المضروبه ب ٢٤  
مرفوع للاس ٢ وهي  
مرفوع للاس ١

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً  $x=10$

$$R' = 120 \times 10^3 + 24 \times 10 - 6 = 120234 \text{ ريال}$$

الحل

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة :-

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$C' = 39x^2 - 10x + 3$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً  $x=12$

$$C' = 39 \times 12^2 - 10 \times 12 + 3 = 5499 \text{ ريال}$$

الحل

٣- دالة الربح الكلي :-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$P = R - C = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

الحل

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$$P = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

$$P' = 120x^3 - 39x^2 + 34x - 9$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً  $x=12$

$$P' = 120 \times 12^3 - 39 \times 12^2 + 34 \times 12 - 9 = 202143 \text{ ريال}$$

## تمرين شامل (٢)

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل  
من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

$$\text{Selling price} = 3x^2 + 25x - 18$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

يوجد خطأ بداله  
الربح  
 $١٧ = (٥) - ١٢$

## المطلوب :-

- ١- دالة الإيراد الكلي .
- ٢- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .
- ٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .
- ٤- دالة الربح الكلي .
- ٥- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

### الحل

#### ١- دالة الإيراد الكلي :-

الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة  $\times$  سعر بيع الوحدة

$$R = (\text{دالة سعر بيع الوحدة}) \times X$$

$$R = (3x^2 + 25x - 18) \times X$$

$$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

### الحل

#### ٢- حجم الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$R' = 9x^2 + 50x - 18$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدة إذاً  $x=5$

$$R' = 9 \times 5^2 + 50 \times 5 - 18 = 457 \text{ ريال}$$

### الحل

#### ٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

$$C' = 20x + 2$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً  $x=20$

$$C' = 20 \times 20 + 2 = 402 \text{ ريال}$$

هنا خطأ

الدكتور رفع  
الخمسه للاس ٢

الحل

٤- دالة الربح الكلي :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

$$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

الحل

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

$$P' = 9x^2 + 30x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً  $x=10$

$$P' = 9 \times 10^2 + 30 \times 10 - 20 = 1180 \text{ ريال}$$

تمرين الواجب

إذا كانت دالة الطلب هي  $(D = 1.5x + 20)$  أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي ٦٠٠ وحدة عند سعر ٢٠٠ ريال ؟

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب

$$1.5x = 1.5 \text{ تفاضل}$$

$$20 = 0 \text{ تفاضل}$$

$$D' = 1.5$$

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب  $x$  السعر / المطلوبه الكمية

$$م = \frac{(1.5)x \cdot 200}{600}$$

$$= 0.5$$

إذا الناتج اقل من واحد اذا الطلب قليل المرونه او غير مرن

## المحاضرة (٣)

### التكامل وتطبيقاته التجارية

#### التكامل :-

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ،  
حيث يتم إيجاد قيمة  $y$  إذا علمت  $\frac{dy}{dx}$  وللتعبير عن عملية  
التكامل نستخدم الرمز  $\int$  و هو رمز التكامل  
و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل  $f(x)$  و نرغب  
في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب  
 $\int f(x). dx$   
أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير  $x$

#### قواعد التكامل :-

١- تكامل  $x$  المرفوعه للأس  $n$  :

أجمع على الاس واحد واقسم على الاس الجديد :

$$\int X^n .dx = \frac{1}{n+1} X^{n+1} + C$$

مثال

$$\int X^6 .dx$$

نسوي تكامل لـ  $X^6$  بضافه واحد للاس ٦ وتصبح سبعة ونقسمها على الاس الجديد ٧ وتصبح

$$\int X^n .dx = \frac{1}{n+1} X^{n+1} + C$$

لو طبقنا القانون راح يطلع نفس الناتج  $\frac{X^7}{7}$

و C هذا ثابت التكامل ... والتكامل هو عكس التفاضل

عشان نعرف C ليه نكتبه بتكامل وتكون ثابتة بمعادلات التكامل

نرجع للتفاضل ونعرف التفاضل عكس التكامل

لو اجيب مثال للتفاضل

$$Y=X^4+5$$

ووتفاضل الخمسة بصفر

طيب راح نعمل لمعادله الي نتجت لنا تكامل

$$\int \frac{4X^4}{4} = X^4 \text{ مع } \epsilon \text{ ويبقى } X^4$$

طلع لنا الناتج  $X^4$  ما رجعت لنا معادله التفاضل الي هي  $X^4+5$

وحنا قلنا التفاضل عكس التكامل لم عملت للمعادله تفاضل كان  
تفاضل الخمسة صفر

$$Y'=4X^3 \text{ وطلع لنا الناتج}$$

وعلنا تكامل للمعادله وطلع لنا  $X^4 =$  وين الخمسة قلنا حنا  
عمليه عكسيه

لهذا نضيف C ثابت التكامل

فتصبح  $X^4+c$  يعني c قيمه التفاضل المجهوله لانه غير  
معلومه.... (( هذه اضافة ))

$$\frac{1}{6+1} X^{6+1}+C$$

$$\frac{X^7}{7}+C$$

القاعده الثانيه :

$$\int K .dx=kx+c$$

تكامل أي عدد ثابت يسوي العدد الثابت مع الاكس

مثال /

$$\int 5 .dx = 5x+c$$

القاعدة الثالثه /

$$\int .dx=x+c$$

مثال :-

$$1- \int x^3 . dx = \frac{1}{4} x^4 + c$$

$$2- \int x^5 . dx = \frac{1}{6} x^6 + c$$

$$3- \int 6 . dx = 6x + c$$

$$4- \int 3x^4 . dx = \frac{3}{5} x^5 + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8 . dx$$

الحل

$$y = \frac{1}{6} x^6 + \frac{4}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

$$y = \frac{1}{6} x^6 + x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

٢- تكامل  $e^x$  :-

$$\int e^x . dx = e^x + c$$

٣- تكامل  $\frac{1}{x}$  :-

$$\int \frac{1}{x} . dx = \ln x + c$$

إيجاد قيمة  $c$  :-

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9x^2 - 10x + 15 . dx$$

أوجد قيمة  $c$  إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة  $(4,1)$ ؟

الحل

$$y = \frac{9}{3} x^3 - \frac{10}{2} x^2 + 15x + c$$

$$y = 3x^3 - 5x^2 + 15x + c$$

حيث أن قيمة  $x = 4$  و قيمة  $y = 1$  فإن :-

$$1 = 3(4)^3 - 5(4)^2 + 15 \times 4 + c$$

$$1 = 3 \times 64 - 5 \times 16 + 60 + c$$

$$1 = 172 + c$$

$$c = -171$$

### التطبيقات التجارية للتكامل

١- الإيراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي .

٢- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

٣- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

٤- الربح الكلي = الإيراد الكلي - التكاليف الكلية .

### مثال :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي تأخذ الشكل :-

$$R' = 3x^2 + 6x - 10$$

المطلوب :-

أوجد حجم الإيراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة الإيراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الإيراد الحدي :-

$$R = \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x$$

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

٢- حجم الإيراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات أي أن  $x=5$  يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة  $x$  في دالة الإيراد الكلي كما يأتي :-

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

$$\text{ريال } 150 = 5^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = \text{الإيراد الكلي}$$

### مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$$

$$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$$

٢- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات أي أن  $x=10$  يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة  $x$  في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$$

$$\text{ريال } 10000 = 30000 - 20000 + 400 - 400 = \text{التكاليف الكلية } C$$

### تمرين شامل (١)

### مثال :-

إذا علمت أن دالة الإيراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

المطلوب :-

١- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة .

٣- دالة الربح الحدي .

٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

## الحل

١- حجم الإيراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-  
حيث أن دالة الإيراد الحدي هي :

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

فيمكن الوصول إلى دالة الإيراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الإيراد الحدي كما يلي :-

$$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 20x$$

$$R = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x$$

وللوصول إلى حجم الإيراد الكلي المتوقع عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يمكن التعويض عن قيمة  $x=20$  كما يلي :-

$$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$$
$$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000 \text{ ريال}$$

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$$C = 12x^3 + 20x^2 - 10x$$

وللوصول إلى حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة يتم التعويض عن قيمة  $x=25$  كما يلي :-

$$C = 12 \times (25)^3 + 20 \times (25)^2 - 10 \times (25) = 199750 \text{ ريال}$$

٣- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الإيراد الحدي - التكاليف الحدية

$$P' = R' - C'$$

$$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$$

$$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$

٤- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P' = 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

حل آخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= (2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x) - (12x^3 + 20x^2 - 10x)$$

$$= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة  $x=10$  في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = 2 \times (10)^4 - 4 \times (10)^3 - 26 \times (10)^2 + 30 \times (10)$$

$$= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700 \text{ ريال}$$

## المحاضرة الرابعة

### الاحتمالات

#### نظرية الاحتمالات :-

الاحتمال هو كسر موجب أي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح .

احتمال تحقيق الحدث  $A$  نشير له بالرمز  $P(A)$  وحدود هذا الاحتمال هي :-

$$0 \leq A \leq 1$$

$$\text{احتمال تحقق حدث} = \frac{\text{عدد حالات تحقق الحدث } A}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

#### مثال :-

صندوق به مجموعة من الكرات مقسمة كما يلي :-

٢٠ كرة بيضاء

٣٠ كرة حمراء

٥٠ كرة سوداء

فإذا سحبنا كرة واحدة عشوائياً من الصندوق احسب احتمال أن تكون هذه الكرة :-

١. حمراء

٢. بيضاء

٣. سوداء

٤. حمراء أو سوداء

٥. حمراء أو سوداء أو بيضاء

#### الحل

$$١- \text{احتمال أن تكون حمراء} = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{30}{100} = 0,3 \quad 30\%$$

$$٢- \text{احتمال أن تكون بيضاء} = \frac{\text{عدد الكرات بيضاء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{20}{100} = 0,2 \quad 20\%$$

$$٣- \text{احتمال أن تكون سوداء} = \frac{\text{عدد الكرات سوداء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{50}{100} = 0,5 \quad 50\%$$

نقوم بتطبيق القانون العدد المعطي من الكرات المراد حسب احتمال ظهورها بعدد الكلي من عدد الكرات

ملاحظه لمعرفة النسبه المئويه نضرب الناتج ب١٠٠

$$٤- \text{أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء} = \frac{30}{100} + \frac{50}{100} = 0,8 \quad 80\%$$

$$٥- \text{أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء أو بيضاء} = \frac{30}{100} + \frac{50}{100} + \frac{20}{100} = 1$$

### مثال :-

تقدم إلى إختبار مقرر الاحصاء في الادارة و التحليل الاحصائي ١٠٠٠٠ طالب نجح منهم ٩٠٠٠ طالب في مقرر الاحصاء في الادارة كما نجح ٨٠٠٠ طالب في مقرر التحليل الاحصائي المطلوب:-

- ١) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .
- ٢) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .
- ٣) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .
- ٤) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .
- ٥) حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً .
- ٦) حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً .
- ٧) حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط .

### الحل

- ١- حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة =  $\frac{9000}{10000} = ٩٠\%$  .
- ٢- حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة =  $\frac{1000}{10000} = ١٠\%$  .
- ٣- حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي =  $\frac{8000}{10000} = ٨٠\%$  .
- ٤- حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي =  $\frac{2000}{10000} = ٢٠\%$  .
- ٥- حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً =  $\frac{8000}{10000} \times \frac{9000}{10000} = ٠,٧٢ = ٧٢\%$  .
- ٦- حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً =  $\frac{2000}{10000} \times \frac{1000}{10000} = ٠,٠٢ = ٢\%$  .

بمثال ٥ و ٦ اذا طلب احتمال النجاح بمقررين معاً او رسوب معاً

نقوم بضرب احتمال نجاحه بمقرر الاحصاء في احتمال نجاحه بمقرر التحليل والرسوب بمثل

$$٧- \text{حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط} = \frac{2000}{10000} \times \frac{8000}{10000} + \frac{1000}{10000} \times \frac{9000}{10000}$$

$$0.25 = 0.2 \times 0.8 + 0.1 \times 0.9 =$$

بمثال هذا طلب النجاح فقط بمقرر واحد...نضرب احتمال نجاحه بمقرر الاول مع احتمال رسوبه بمقرر الاول ثم نجمع مع احتمال نجاحه بمقرر الثاني مع احتمال رسوبه بالمقرر الثاني ..ملاحظه بشرائح يوجد خطأ بتعويض

## مثال :-

في دراسة لتخصص مجموعة من الطلاب تبين التالي :-

٦٠ طالب يدرسون محاسبة .

٣٠ طالب يدرسون تسويق .

١٠ طلاب يدرسون مالية .

إذا تم اختيار طالب بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية :-

(١) احتمال أن يكون تخصص محاسبة .

(٢) احتمال أن يكون تخصص تسويق .

(٣) احتمال أن يكون تخصص مالية .

(٤) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق .

(٥) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية .

## الحل

(١) احتمال أن يكون تخصص محاسبة =  $\frac{60}{100} = ٠,٦ = ٦٠\%$

(٢) احتمال أن يكون تخصص تسويق =  $\frac{30}{100} = ٠,٣ = ٣٠\%$

(٣) احتمال أن يكون تخصص مالية =  $\frac{10}{100} = ٠,١ = ١٠\%$

(٤) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق =  $\frac{90}{100} = \frac{30}{100} + \frac{60}{100}$

(٥) احتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية =  $1 = \frac{10}{100} + \frac{30}{100} + \frac{60}{100}$

## نظرية :-

إذا كان احتمال تحقق حادث واحد على الأقل من حادثين A أو B هو أن يتحقق أحدهما أو أن يتحقق الاثنين معاً ويسمى الاتحاد و يرمز له بالرمز :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## حيث أن :-

P(A) هو احتمال تحقق الحدث A .

P(B) هو احتمال تحقق الحدث B .

P(A ∩ B) : **التقاطع** و يشير إلى احتمال تحقق الحادثين معاً (الحدث الأول و الحدث الثاني).

**P(AUB) : الاتحاد** ويشير إلى احتمال تحقق أحد الحدثين على الأقل ( الحدث الاول أو الثاني )

### مثال :-

إذا تقدم لإختبار المحاسبة و الاقتصاد ٥٠ طالب نجح في المحاسبة ٣٠ طالب و نجح في الاقتصاد ٤٠ طالب فإذا علمت أن هناك ٢٥ طالب قد نجحوا في الاثنين معاً فأحسب احتمال النجاح في أحد المقررين على الأقل ؟

### الحل :-

١- نرسم إلى احتمال النجاح في المحاسبة بالرمز  $P(A) = \frac{30}{50} = 0.60$

٢- نرسم إلى احتمال النجاح في الاقتصاد بالرمز  $P(B) = \frac{40}{50} = 0.80$

٣- احتمال النجاح في المادتين معاً يشير إلى احتمال النجاح في المادة الاولى و احتمال النجاح في المادة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

**هنا التقاطع عدد نجاح الطلاب بمقررين معا وهو معطى بالمثال ٢٥** ←  $0.50 = \frac{25}{50} = P(A \cap B)$

٤- المطلوب هو احتمال النجاح في مادة واحدة على الأقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد =  $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.60 + 0.80 - 0.50 = 0.90$$

### مثال :-

في دراسة لبيان المستوى الثقافي في المملكة العربية السعودية تم إختيار عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ شخص وجد من بينهم ٥٠ شخص يتصفحوا جريدة الرياض و ٦٠ شخص يتصفحون جريدة المال و ٣٠ شخص يتصفحون الجريدتين معاً، فأحسب احتمال تصفح أحد الجريدتين على الأقل ؟

### الحل

١- نرسم إلى احتمال تصفح جريدة الرياض بالرمز  $P(A) = \frac{50}{100} = 0.50$

٢- نرسم إلى احتمال تصفح جريدة المال بالرمز  $P(B) = \frac{60}{100} = 0.60$

٣- احتمال تصفح الجريدتين معاً يشير إلى تصفح الجريدة الاولى والجريدة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$$0.30 = \frac{30}{100} = P(A \cap B)$$

٤- المطلوب هو احتمال تصفح جريده واحده على الأقل وهو ما يعني تصفح الجريده الاولى أو تصفح الجريده الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد =  $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.50 + 0.60 - 0.30 = 0.80$$

## أنواع الاحداث A و B :-

١- أحداث متنافية (متعارضة) : وهي الاحداث التي لا يمكن أن تقع معاً أي أن حدوث أحدهما يمنع حدوث الآخر فعلى سبيل المثال فاحتمال تواجذك في الرياض و في مكة في نفس الوقت هو احتمال مستحيل و في هذه الحالة فإن احتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = 0 \text{ (هنا المتعارضه قيمته صفر فأذا ذكر بسؤال انها متعارضه احتمال تحققه يساوي صفر)}$$

٢- أحداث مستقلة : أي أن حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث الآخر فعلى سبيل المثال شراء جريدة الرياض قد لا يتعارض مع شراء جريدة المال وفي هذه الحالة فإن احتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

٣- أحداث غير مستقلة : وهي الاحداث التي يؤثر تحقق أحدهما على تحقق الآخر وكمثال على ذلك زيادة عدد ساعات مذاكرة مادة الاحصاء في الادارة يؤثر على تخفيض عدد ساعات مذاكرة مادة المحاسبة و من ثم فإن احتمال تحقق الحدثين معاً :-

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

### مثال :-

إذا كان [  $P(A)= 0.3$  ,  $P(B)= 0.4$  ,  $P(A \cap B)=0.12$  ] هل كل من الحدثين A و B مستقلة؟

### الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ الشرط}$$

$$P(A) \times P(B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12 \quad (١)$$

$$P(A \cap B) = 0.12 \quad (٢)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (٣)$$

$$\text{إذا هذه الاحداث مستقلة.} \quad (٤)$$

### مثال :-

إذا كان [  $P(A)= 0.5$  ,  $P(B)= 0.3$  ,  $P(A \cap B)=0.2$  ] هل كل من الحدثين A و B مستقلة؟

### الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \text{ الشرط}$$

$$P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.3 = 0.15 \quad (١)$$

$$P(A \cap B) = 0.2 \quad (٢)$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \quad (٣)$$

(٤) إذا هذه الاحداث غير مستقلة

### مثال

إذا علمت أن  $P(A)=0.2$  و  $P(B)=0.4$  و أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية فأحسب كل من الاحتمالات التالية :-

$$P(A \cap B) \quad (١)$$

$$P(A \cup B) \quad (٢)$$

$$P(\bar{A}) \quad (٣)$$

$$P(\bar{B}) \quad (٤)$$

### الحل

١- حيث أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية إذاً فإن إحتمال تحققهما معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = 0$$

٢- و من ثم فإن إحتمال تحقق أحد الحدثين على الأقل أو ما يعرف بالاتحاد يساوي :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.4 - 0 = 0.6$$

٣- إحتمال  $P(\bar{A})$  هو الاحتمال المكمل لإحتمال تحقق الحدث  $A$  و حيث أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن :-

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \leftarrow \text{هنا قانون المكمل}$$

$$= 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$

$$= 1 - 0.4 = 0.6$$

### الاحتمال الشرطي :-

هو أحتمال تحقق حدث معين وليكن  $A$  و لكن بشرط حدوث الحدث  $B$  أولاً و نرمز له بالرمز  $P(A | B)$  و كمثال على ذلك إذا تم تقدير إحتمال نجاحك في مقرر الاحصاء في الادارة بفرض إحتمال نجاحك في مقرر سابق وليكن مقرر المحاسبة ١ ، ويمكن تقدير الاحتمال الشرطي كما يلي :-

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### لاحظ الحالات التالية :-

١- في حالة الحوادث المتعارضة أو المتنافية :-

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

٢- في حالة الحوادث المستقلة :-

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

٣- في حالة الحوادث غير المستقلة :-

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### مثال :-

إذا كان :-

$$P(A) = 0.6 , P(B) = 0.8 , P(A \cap B) = 0.5$$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$$P(A \cup B) , P(A | B) , P(B | A) , P(\bar{A}) , P(\bar{B})$$

### الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (١)$$

$$P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.8 = 0.48 \quad (٢)$$

$$P(A \cap B) = 0.5 \quad \text{معطي بالمثال هل قيمه التقاطع تساوي قيمه ضرب احتمال A في B} \quad (٣)$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \quad \text{إذا هذه الاحداث غير مستقلة}$$

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9 \quad (١)$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.8} = 0.625 \quad (٢)$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} = 0.833 \quad (٣)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4 \quad (٤)$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.8 = 0.2 \quad (٥)$$

**مثال :-**

**إذا كان :-**

$$P(A) = 0.7 , P(B) = 0.4 , P(A \cap B) = 0.28$$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$$P(A \cup B) , P(A | B) , P(B | A) , P(\bar{A}) , P(\bar{B})$$

**الحل**

ليبين ما إذا كانت هذه الأحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (١)$$

$$P(A) \times P(B) = 0.7 \times 0.4 = 0.28 \quad (٢)$$

$$P(A \cap B) = 0.28 \quad (٣)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (٤)$$

**إذا هذه الأحداث مستقلة**

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.28 = 0.82 \quad (١)$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.28}{0.4} = 0.7 \quad (٢)$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.7} = 0.4 \quad (٣)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3 \quad (٤)$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6 \quad (٥)$$

## المحاضرة الخامسة

### تابع نظرية الاحتمالات

مثال :-

في دراسة لتخصصات ٤٠٠ طالب وطالبة من خريجي جامعة الملك فيصل كانت النتائج كالتالي :-

المجموع	طالبة C	طالب B	التخصص
١٦٠	٤٠	١٢٠	علمي S
٢٤٠	١٤٤	٩٦	أدبي L
٤٠٠	١٨٤	٢١٦	المجموع

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب احتمال أن يكون الشخص طالب أو علمي ؟

$$P(B \cup S) = P(B) + P(S) - P(B \cap S)$$

$$= \frac{216}{400} + \frac{160}{400} - \frac{120}{400} = \frac{256}{400} = 0.64$$

حساب احتمال أن يكون الشخص طالبة و تخصص أدبي :-

$$P(C \cap L) = \frac{144}{400} = 0.36$$

إذا علمت أن الشخص المختار طالبة أحسب احتمال أن يكون تخصصها أدبي :-

هنا اعوض بقانون الاحتمال الشرطي لكن بعرف ترتيب الرموز بالقانون من بعد كلمه أحسب يكون هو البدايه ذكر تخصصها أدبي الرمز L واذا ابتدأت برمز L المقام يكون الرمز C

$$P(L | C) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{144}{400}}{\frac{184}{400}} = \frac{144}{184} = 0.7826$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و المستوى التعليمي :-

المجموع	دكتوراه B	ماجستير A	النوع / المستوى التعليمي
٢٨٠	١٦٠	١٢٠	ذكر C
٣٢٠	٢٤٠	٨٠	أنثى D
٦٠٠	٤٠٠	٢٠٠	المجموع

حساب إحتمال أن يكون الشخص ذكر أو حاصل على ماجستير :-

$$P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) \\ = \frac{280}{600} + \frac{200}{600} - \frac{120}{600} = \frac{360}{600} = 0.6$$

حساب إحتمال أن يكون الشخص أنثى و حاصلة على ماجستير :-

$$P(D \cap A) = \frac{80}{600} = 0.1333$$

إذا علمت أن الشخص المختار حاصل على ماجستير أحسب احتمال أن يكون ذكر :-

$$P(C | A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{120}{600}}{\frac{200}{600}} = \frac{120}{200} = 0.6$$

**مثال :-**

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.6 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.7 أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-

١- إحتمال النجاح في المقررين معاً ؟

**الحل**

$$P(A) = 0.6 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)}$$

$$P(B) = 0.7 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)}$$

**احتمال النجاح في المقررين معاً يساوي :-**

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$$

٢ - إحتمال الرسوب في المقررين معاً ؟

**الحل**

$$P(A) = 0.6 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4 \text{ (احتمال الرسوب في الرياضيات)}$$

$$P(B) = 0.7 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.7 = 0.3 \text{ (احتمال الرسوب في الاقتصاد)}$$

$$P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$$

٣- احتمال نجاح الطالب في مقرر واحد فقط ؟

الحل

$$P(A) = 0.6 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4 \text{ (احتمال الرسوب في الرياضيات)}$$

$$P(B) = 0.7 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.7 = 0.3 \text{ (احتمال الرسوب في الاقتصاد)}$$

$$P = 0.6 \times 0.3 + 0.7 \times 0.4 = 0.18 + 0.28 = 0.46$$

٤- احتمال النجاح في مقرر واحد على الأقل ؟

الحل

$$P(A) = 0.6 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)}$$

$$P(B) = 0.7 \text{ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)}$$

$$P(A \cap B) = 0.42$$

احتمال النجاح في مقرر واحد على الأقل يقصد بذلك الاتحاد :-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.7 - 0.42 = 0.88$$

**المتغير العشوائي** هو الذي يأخذ قيماً حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

١- المتغيرات العشوائية المنفصلة

Discrete Random Variables

٢- المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

١- المتغير العشوائي المنفصل :-

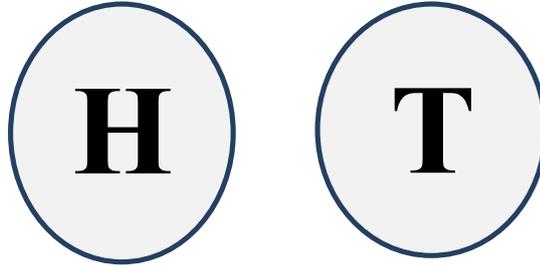
هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيماً حقيقية مختلفة (وبمعنى آخر فهو يشمل جميع القيم الصحيحة دون القيم الكسرية مثل عدد الطلاب في فصل دراسي ٥، ٤، ٣، ٢، ١، ... لا يمكن أن يأخذ صورة كسرية).

٢- المتغير العشوائي المتصل :-

ويطلق عليه المتغير العشوائي المستمر فذلك المتغير يأخذ عدد لا نهائي من القيم المتصلة (ومن ثم فإنه يأخذ القيم الصحيحة وجميع القيم الكسرية التي تقع بين هذه القيم وكمثال على هذه المتغيرات درجات الحرارة ٣٥، ٧ أو أطوال الطلاب أو المعدلات التراكمية للطلاب )

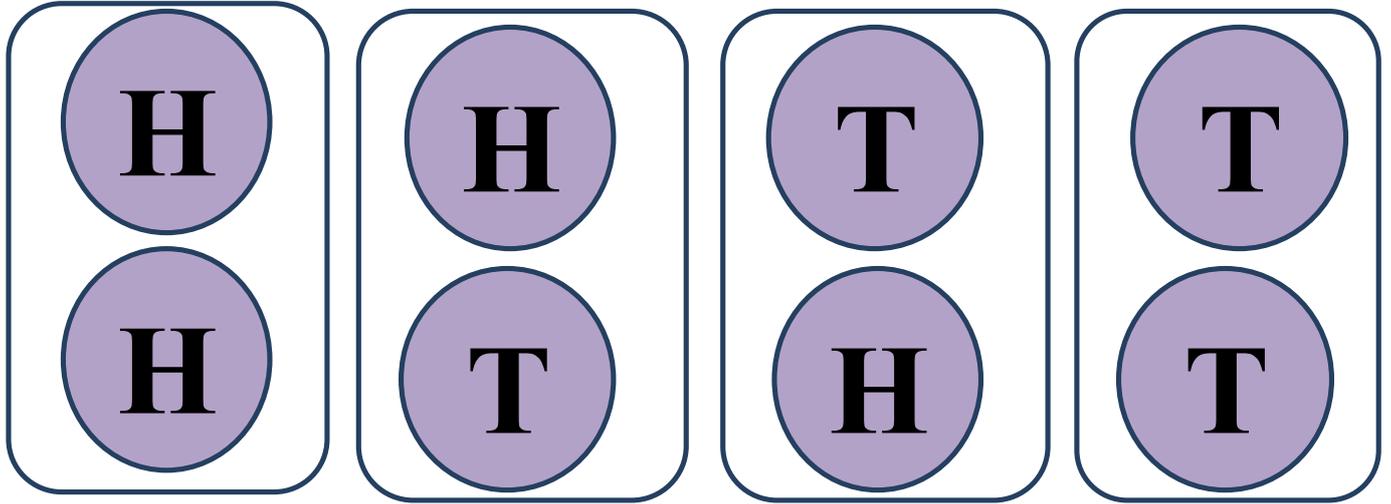
مثال :-

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي  $X$  هو عدد مرات ظهور الصورة ، فأوجد القيم التي يأخذها ذلك المتغير واحتمالاته ؟



الحل

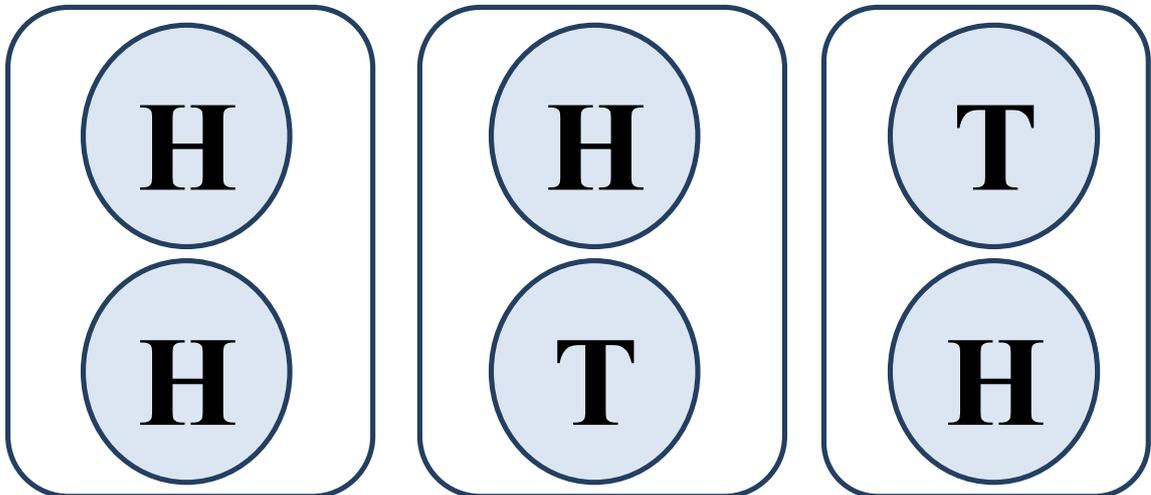
١- فراغ العينة (S) :-  $S = \{HH, HT, TH, TT\}$  هي الاحتمالات التي تظهر لي عند رمي النرد مرتين متتاليتين



٢- الحدث (A) :-

(تمثل وصف لنتائج التي يمكن أن يأخذها المتغير)

$A = \{HH, HT, TH\}$  وهي المرات التي ظهرت لي الصور في الاحتمالات عند رمي النرد



٣- المتغير العشوائي (X):-

(وصف رقمي لعدد مرات ظهور الصورة)  $X = \{2, 1, 0\}$

٤- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير  $p(x)$ :-

$$P(x=0) = 1/4 \quad \text{where (TT)}$$

$$P(x=1) = 2/4 = 1/2 \quad \text{where (HT, TH)}$$

$$P(x=2) = 1/4 \quad \text{where (HH)}$$

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد:-

$$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1$$

**مثال :-**

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو مجموع العددين الظاهرين فأوجدي القيم التي يأخذها المتغير X وأوجدي احتمال الحصول على كل من هذه القيم؟

**الحل**

١- فراغ العينة (S):-

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

٢- المتغير العشوائي (X):-

(وصف رقمي لمجموع العددين الظاهرين)

$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

٣- احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير  $p(x)$ :-

$$P(x=2) = 1/36$$

$$P(x=3) = 2/36$$

$$P(x=4) = 3/36$$

$$P(x=5) = 4/36$$

$$P(x=6) = 5/36$$

$$P(x=7) = 6/36$$

$$P(x=8) = 5/36$$

$$P(x=9) = 4/36$$

$$P(x=10) = 3/36$$

$$P(x=11) = 2/36$$

$$P(x=12) = 1/36$$

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

$$P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) \dots\dots + P(x = 12) = 1$$

**تمارين واجب :-**

**مثال :-**

إذا أعطيت الجدول التالي :-

المجموع	B	A	
55	45	10	X
45	15	30	Y
100	60	40	المجموع

المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

1-  $P(A)$

2-  $P(\bar{A})$

3-  $P(X)$

4-  $P(\bar{X})$

6-  $P(A \cap X)$

5-  $P(B \cap X)$

8-  $P(B \cup Y)$

7-  $P(A \cup Y)$

10-  $P(B|Y)$

9-  $P(A|Y)$

$$1- P(A) = \frac{40}{100} = 0,4$$

$$2- P(\bar{A}) = 1 - \frac{40}{100} = 0,6$$

$$3- P(X) = \frac{55}{100} = 0,55$$

$$4- P(\bar{X}) = 1 - \frac{55}{100} = 0,45$$

$$5- P(B \cap X) = \frac{45}{100} = 0,45$$

$$6- P(B \cup Y) = P(B) + P(Y) - (B \cap Y) = \frac{60}{100} + \frac{45}{100} - \frac{15}{100} = 0,9$$

$$7- P(A \cup Y) = P(A) + P(Y) - (A \cap Y) = \frac{40}{100} + \frac{45}{100} - \frac{30}{100} = 0,55$$

$$8= P(A \cap X) = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$9- P(A|Y) = \frac{P(A \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{45}{100}} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$$

$$10- P(B|Y) = \frac{P(B \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{45}{100}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و تقديرات التخرج :-

النوع / المستوى التعليمي	جيد A	ممتاز B	المجموع
ذكر X	200	300	500
أنثى Y	400	100	500
المجموع	600	400	1000

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

١- أحسب احتمال أن يكون ذكر أو حاصل على تقدير جيد ؟ قال او يعني نعوض بقانون الاتحاد

$$P(X \cup A) = P(X) + P(A) - (X \cap A)$$

$$P(X \cup A) = \frac{500}{1000} + \frac{600}{1000} - \frac{200}{1000} = 0,9$$

٢- أحسب احتمال أن تكون أنثى و حاصلة على تقدير ممتاز ؟ قال و يعني تقاطع

$$P(Y \cap B) = \frac{100}{1000} = 0,1$$

٣- إذا علمت أنها أنثى فما هو احتمال أن تكون حاصلة على تقدير جيد ؟

هنا يبي الاحتمال الشرطي

$$- P(A|Y) = \frac{P(A \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{400}{1000}}{\frac{500}{1000}} = \frac{400}{500} = 0,8$$

## المحاضرة السادسة تابع نظرية الاحتمالات

تابع الاحتمالات :-

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص :-

النوع / المستوى التعليمي	x	y	المجموع
A	5	10	15
B	12	3	15
المجموع	17	13	30

من خلال الجدول السابق المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

((لم اكتب القوانين تعويض مباشر))

$$P(B \cup y) = \frac{15}{30} + \frac{13}{30} - \frac{3}{30} = \frac{5}{6} = 0,83$$

$$P(y) = \frac{13}{30} = 0,43$$

$$P(x \cap A) = \frac{5}{30} = 0,166$$

$$P(\bar{B}) = 1 - \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$P(A | y) = \frac{\frac{10}{30}}{\frac{13}{30}} = \frac{10}{13} = 0,769$$

$$P(B | x) = \frac{\frac{12}{17}}{\frac{30}{17}} = \frac{12}{30} = 0,705$$

تمرين :-

مصنع يستخدم ثلاث آلات في الانتاج فإذا كانت الآلة الاولى تنتج ٣٠% من إنتاج المصنع و الآلة الثانية تنتج ٥٠% من الانتاج و الباقي للآلة الثالثة فإذا كانت نسبة الانتاج المعيب للآلات الثلاثة على التوالي هي ٥% و ١% و ٢%، وإذا تم سحب وحدة عشوائياً من إنتاج المصنع احسب :-

١- احتمال أن تكون معيبة :-

$$P = 0.30 \cdot 0.05 + 0.50 \cdot 0.01 + 0.20 \cdot 0.02 = 0.024$$

إذا الآلة الاولى تنتج ٣٠% يعني 0,30 الانتاج المعيب ٥% 0,05

والآلة الثانية تنتج ٥٠% 0,50 الانتاج المعيب ١% 0,01

الآلة الثالثة تنتج ٢٠% (١٠٠ - ٣٠ - ٥٠ = ٢٠) 0,20 المعيب ٢% 0,02

## ٢- إذا علمت ان هذه الوحدة معيبة فما هو احتمال أن تكون من إنتاج الآلة الثالثة :-

انتاج الآلة الثالثة x في معيب الآلة الثالثة =  $0,20 \times 0,02 = 0,004$   
كل المعيب =  $0,024$

$$P = \frac{0.004}{0.024} = \frac{1}{6}$$

### تمرين :-

تطبع ثلاث سكرتيرات جميع مراسلات مكتب ما، فإذا كانت السكرتيرة A تطبع 40% من المراسلات، و تطبع B 30% و تطبع C 30% الباقية، إذا كان احتمال أن تخطئ في الطباعة هو 0.02 و احتمال الخطأ في عند B هو 0.03 و احتمالها عند C هو 0.04.

سحبت ورقة من المراسلات فوجد فيها خطأ، أوجد احتمال أن تكون السكرتيرة B هي التي طبعتها؟

$$\frac{SB \times FB}{SA \times FA + SB \times FB + SC \times FC}$$

SB سكرتيرة B

FB هو احتمالها خطأ سكرتيره B

المقام كل المعيب

$$P = \frac{0.30 \times 0.03}{0.40 \times 0.02 + 0.30 \times 0.03 + 0.30 \times 0.04} = \frac{0,009}{0,029} = \frac{9}{29} = 0.31$$

### التوزيع الاحتمالي :-

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، وهو جدول مكون من صفين، الأول به القيم الممكنة للمتغير، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير.

### مثال :-

كون جدول التوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي x المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين؟

$$P(x=0) = \frac{1}{4} \quad \text{where (TT)}$$

$$P(x=1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{where (HT, TH)}$$

$$P(x=2) = \frac{1}{4} \quad \text{where (HH)}$$

X	0	1	2	المجموع
P(x)	1/4	1/2	1/4	1

### التوقع الرياضي :-

هو الوسط الحسابي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي ويرمز له بالرمز  $\mu$  أو  $E(x)$  ويتم حسابه باستخدام القانون التالي:-

$$\mu = E(x) = \sum(x \times P(x))$$

بمعنى أن التوقع يساوي حاصل جمع كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مضروبة في احتمالها و الجدول التالي يوضح كيفية الوصول إلى قيمة التوقع الرياضي :-

x	الصف ١	المجموع
P(x)	الصف ٢	1
E(x)	1 × 2	القيمة المتوقعة

### التوقع الرياضي

إذا كان  $X$  متغير عشوائي منفصل .  
و كان  $p(x)$  هو توزيعه الاحتمالي .  
فإن وسطه الحسابي أو توقعه الرياضي يعطى بالعلاقة:

$$\mu = E(X) = \sum_{\text{قيم لجميع } x} x p(x)$$

### مثال :-

X	الصف (1)	0	1	2	$\Sigma$
P(X = x)	الصف (2)	1/4	1/2	1/4	1
$\mu = E(x)$	(1) × (2)	0	1/2	1/2	1

### مثال :

إذا كان التوزيع الاحتمالي لعدد الأعطال اليومية لجهاز الحاسب كما يلي ، فأوجد معدل العطل اليومي للجهاز؟

x	0	1	2	3	4	Σ
P(X=x)	0.20	0.30	0.25	0.15	0.10	1
μ = E(x)	0	0.30	0.50	0.45	0.40	1.65

$$\mu = E(X) = \sum x \cdot p(x) = 1.65$$

### التباين والانحراف المعياري :-

التباين للمتغير العشوائي x الذي له قيمة متوقعة تساوي E(x) هو :-

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \sum E(x^2) - (E(x))^2$$

و الانحراف المعياري يمثل الجذر التربيعي للتباين :-

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

و للوصول إلى قيمة التباين و الانحراف المعياري يتم إتباع الخطوات التالية :-

X	(1) صف	Σ
P(X=x)	(2) صف	1
μ = E(x)	صف ٣ = صف ١ * صف ٢	القيمة المتوقعة
E(x <sup>2</sup> )	صف ٤ = صف ١ * صف ٣	

$$\text{التباين} = \text{ناتج صف ٤} - (\text{ناتج صف ٣})^2$$

### تمرين :-

أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري والتباين للتوزيع الاحتمالي التالي:-

x	0	1	2	3
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1

### الحل :-

x	0	1	2	3	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1	1	الاحتمال
E(x)=x .P(x)	0	0.2	0.8	0.3	1.3	التوقع
E(X <sup>2</sup> )=x. E(x)	0	0.2	1.6	0.9	2.7	
σ <sup>2</sup>	=E(x <sup>2</sup> ) - (Ex <sup>2</sup> )		2,7-(1.3) <sup>2</sup>		1.01	التباين
σ	√σ <sup>2</sup>		=√1.01		1.005	الانحراف المعياري

### تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	2	4	5	6
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25

### المطلوب :-

(١) الوسط الحسابي .

(٢) التباين .

٣) الانحراف المعياري .

٤)  $P(x \geq 4)$  .

٥)  $P(2 \leq x \leq 5)$

x	2	4	5	6	$\Sigma$	قيم المتغير
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25	1	الاحتمال
$E(x) = x \cdot P(x)$	0.3	1.4	1.25	1.5	4.45	التوقع
$E(X^2) = x \cdot E(x)$	0.6	5.6	6.25	9	21.45	
$v(x) = \sigma^2$	$= E(x^2) - (E(x))^2$		$= 21.45 - (4.45)^2 =$		1.647	التباين
$\sigma$	$= \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.647}$				1.2835	الانحراف المعياري

١. الوسط الحسابي = التوقع الرياضي = 4.45

٢. التباين = 1.647

٣. الانحراف المعياري = 1.2835

$$P(x \geq 4) = P(4) + P(5) + P(6) = 0.35 + 0.25 + 0.25 = 0.85$$

$$= 1 - P(2) = 1 - 0.15 = 0.85$$

$$5. P(2 \leq x < 5) = P(2) + P(4) = 0.15 + 0.35 = 0.5$$

**تمرين :-**

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	0	2	4	6
P(x)	0.1	0.2	0.4	?

## المطلوب :-

- (١)  $p(6)$       (٢) الوسط الحسابي .      (٣) التباين  
 (٤) الانحراف المعياري      (٥)  $P(x \geq 4)$       (٦)  $P(2 \leq x \leq 5)$

قيم المتغير	$\Sigma$	6	4	2	0	x
الاحتمال	1	0.3	0.4	0.2	0.1	P(x)
التوقع	3.8	1.8	1.6	0.4	0	$E(x) = x.P(x)$
مربع التوقع	18	10.8	6.4	0.8	0	$E(X^2) = x.E(x)$
التباين	3.56	$= 18 - 3.8^2 = 3.56$		$= E(x^2) - E(x)^2$		$v(x) = \sigma^2$
الانحراف المعياري	1.89	$\sigma$				

$$P(6) = 0.3$$

$$P(x \geq 4) = P(4) + P(6) = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

مدخن  
غير مدخن

إذا كان احتمال أن يكون الفرد مدخن =  $\frac{1}{3}$  عند سؤال ١٠ أفراداً فكل منهم قد يكون....

سليم  
تالف

إذا كان احتمال وجود مصباح تالف في صندوق =  $\frac{2}{7}$ ، عند سحب مصباح من كل صندوق من ٥٠ صندوق في كل مرة قد يكون....

صورة  
كتابة

رمي قطعة النقد ١٠ مرات

حاضرة  
غائبة

إذا كان احتمال حضور الطالبة للمحاضرة  $\frac{1}{4}$ ، بمتابعة حضور الطالبة في ٥ محاضرات

## جميع التجارب السابقة تحقق الشروط التالية:

- نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.
- نتيجة كل محاولة مستقلة عن الأخرى .
- احتمال النجاح في كل محاولة يكون ثابت و ليكن  $p$  و احتمال الخطأ  $q = 1 - p$
- إجراء التجربة عدة مرات فتكون هناك  $n$  محاولة.

تجربة ذات الحدين

$X$  يسمى متغير ذات الحدين  
و توزيعه الاحتمالي هو توزيع ذات الحدين  
حيث  $x=0,1,2,3,\dots,n$

إذا كان  $X =$   
عدد النجاحات  
في  $n$  محاولة

عند رمي قطعة نقد  $\gamma$  مرات إذا اعتبرنا ظهور  $H$  هو النجاح فإن  
 $P(X=4)$  تعني.....  
ما احتمال أن يظهر الوجه  $H$  أربع مرات عند رمي قطعة النقد  $\gamma$  مرات.

## مراجعة على التوافق :-

### تمرين :-

عند إجراء تجربة ذات الحدين ٥ مرات ، نفترض أن  $x$  متغير ذات الحدين .  
احتمال النجاح  $p$  ، احتمال الفشل  $q=1-p$  فإن احتمالية تحقق هذه الظاهرة ثلاث مرات

$$p(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3}$$

التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين  $X$  عند إجراء التجربة  $n$  مرة :

$$p(X = x) = b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث أن  $p$  احتمال النجاح و  $q = 1 - p$

$$x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

### تمرين :-

رميت قطعة نقود متزنة ٤ مرات ، أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد  $H$  الظاهر فيها.

التجربة تحقق شروط ذات الحدين ، نفرض أن النجاح هو ظهور  $H$  .

$$n = 4 , p = \frac{1}{2} , q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b\left(x, 4, \frac{1}{2}\right) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} , x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$= \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

## تمرين :-

عند رمي حجر النرد ٤ مرات، ما احتمال عدم ظهور الوجه ٦؟ ما احتمال ظهور ٦ مرتين؟

فراغ العينة = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

إذا فرضنا أن النجاح هو ظهور العدد ٦ .

احتمال النجاح  $p = \frac{1}{6}$  ، احتمال الفشل  $q = \frac{5}{6}$  ،  $n=4$

$$b\left(x, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{4-x} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$p(\text{ظهور عدم 6}) = b\left(0, 4, \frac{1}{6}\right) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-0} \\ = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

إذا كان  $X$  متغير ذات الحدين  $n, p$  فإن :

$$E(X) = \mu = np$$

التوقع الرياضي

$$\sigma^2 = npq$$

التباين

## تمرين :-

في تجربة إلقاء قطعة نقود خمس مرات أوجد احتمال ظهور الوجه H ثلاث مرات و أحسب التوقع و التباين

الحل

$$1- p(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3} = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$2- E(X) = \mu = np = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$3- \sigma^2 = npq = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

## تمارين الواجب

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

X	0	1	2	3
P(x)	0.2	0.1	0.3	?

### المطلوب :-

(١) p(3)

(٢) الوسط الحسابي .

(٣) التباين .

(٤) الانحراف المعياري .

$$P(2) + P(3) = 0.3 + 0.4 = 0.7 = . P(x \geq 2) \text{ (٥)}$$

X	0	1	2	3	$\Sigma$	قيم المتغير
P(x)	0.2	0,1	0,3	0,4	1	الاحتمال
$E(x)=x.P(x)$	0	0,1	0,6	1,2	1,9	التوقع
$E(X^2)=x.E(x)$	0	0,1	1,2	3,6	4,9	مربع التوقع
$v(x) = \sigma^2$	$=E(x^2)-E(x)^2$			$4,9-(1,9)^2=$	1,29	التباين
$\sigma$	$\sqrt{\sigma^2}$			$= \sqrt{1,29}$	1,135	الانحراف المعياري

## المحاضرة السابعة

### مقدمة الى الإحصاء

من الفعل أحصى بمعنى جمع و أحاط

الإحصاء

قال تعالى :  
« و كل شيء أحصيناه كتاباً »

تعريف علم الإحصاء Statistics

هو العلم الذي يبحث في تصميم أساليب جمع البيانات و التقنيات المختلفة لتنظيم و تصنيف و عرض البيانات و تلخيصها في صورة مؤشرات رقمية لوصف و قياس خصائصها الأساسية و تحليلها بغرض اتخاذ القرارات المناسبة

الإحصاء قديماً: مجرد جمع المعلومات و ترتيبها في جداول أو ابرازها في رسوم بيانية أو أشكال تصويرية.

الإحصاء الحديث: العلم الذي يبحث في جمع البيانات و تنظيمها و عرضها و تحليلها و استقراء النتائج و اتخاذ القرارات.

## الخطوات المنهجية للتحليل الإحصائي في البحث العلمي :

- ❖ جمع البيانات
- ❖ تنظيم و عرض البيانات
- ❖ تحليل البيانات
- ❖ استقراء النتائج واتخاذ القرارات

### جمع البيانات :

عملية الحصول على المعلومات أو قيم المشاهدات أو القياسات للتجارب التي يجريها الإحصائي .

### تنظيم و عرض المعلومات :

عملية وضع المعلومات في جداول منسقة و عرضها بطرق مناسبة كالأشكال الهندسية و الرسوم البيانية و غيرها.

### تحليل البيانات :

عملية إيجاد قيم لمقاييس و اقترانات معينة تحدد قيمها من البيانات موضع الدراسة.

### الاستقراء و اتخاذ القرارات :

الاستنتاجات التي يصل إليها الباحث و تكون على شكل تقديرات أو تنبؤات أو تعميمات أو قرار برفض أو قبول الفرضيات الإحصائية.

#### • ينقسم علم الإحصاء :

- إحصاء وصفي Descriptive : جمع و تبويب البيانات
- إحصاء استقرائي Inferential : استقراء النتائج و اتخاذ القرارات

مجموعة القيم التي يتم جمعها من  
مفردات المجتمع أو العينة لخاصية  
معينة (متغير).

ما هو المتغير ?

What is variable?

البيانات (Data)

تنقسم البيانات إلى قسمين:

أنواع البيانات

### بيانات نوعية (وصفية) :

البيانات التي يمكن حصرها في عدة أوجه وصفية و لا يمكن إجراء العمليات الحسابية عليها كالجمع و الطرح

مثال :

الحالة المادية	الجنس	الأرقام الأكاديمية
• غني • فقير • متوسط	• ذكر • أنثى	• ٢١٤٠٩٠٨٧ • ٢١٣٠٠٠٢٣

## البيانات الكمية :

البيانات التي يتم الحصول عليها على شكل أعداد و يمكن ترتيبها.

و تنقسم إلى قسمين :

البيانات الكمية المنفصلة

- البيانات التي يمكن عدّها
- تكون منفصلة عن بعضها.
- مثل عدد المحاضرات المباشرة.

البيانات الكمية المتصلة

- البيانات التي لا يمكن عدّها .
- يتم الحصول عليها عن طريق القياس.
- تأخذ أي قيمة داخل مدى معين سواء كانت صحيحة أو كسرية.
- مثل أطوال الطلاب.

مثال:

الدخل السنوي
درجات الحرارة
المعدل الدراسي

العلاقة بين أنواع البيانات



# قياس البيانات

تقاس البيانات من المجتمع او العينة بأحدى المقاييس التالية :

- المقياس الاسمي (التصنيفي)
- المقياس الترتيبي (التفضيلي)
- المقياس الفتري (الفئوي- الفترة)
- المقياس النسبي (النسبة)

## المقياس الاسمي:

- مجموعة من الأوجه أو الصفات التي يأخذها المتغير الوصفي (تحتوى على الأسماء ، العناوين أو الأصناف فقط).
- يمكن أن تعطى الصفات أرقام تعكس مدلول الصفة و لكن ليس لها معنى رياضي في مفهوم أكبر أو أصغر ( لا يمكن ترتيبها).

## الأمثلة:

- تصنيف الأفلام حسب النوع : كوميدي - أكشن - رومانسي - تاريخي...
- التصنيف حسب نوع الجنس: ذكر- أنثى
- التصنيف حسب الجنسية : سعودي - مصري - كويتي...

## المقياس الترتيبي :

- مجموعة من الأوجه أو الصفات التي يأخذها المتغير الوصفي مع إمكانية ترتيبها.
- يمكن أن تعطى الصفات أرقام تعكس مدلول الصفة ولها معنى رياضي في مفهوم أكبر أو أصغر.
- لا تعكس معنى حقيقي للفروق ( لا يمكن تحديدها أو لا معنى لها)

## الأمثلة:

- الحالة الاقتصادية فقير - متوسط - غني -
- مستوى الذكاء منخفض - متوسط - مرتفع..
- الرتب الوظيفية الرتبة الأولى- الثانية - الثالثة...

## المقياس الفتري :

- مجموعة من القيم أو الأعداد التي يأخذها المتغير الكمي.
- يمكن أن تعطى الصفات أرقام تعكس مدلول الصفة ولها معنى رياضي في مفهوم أكبر أو أصغر(يمكن ترتيبها).

- الصفر ليس له معنى حقيقي ( لا يعني انعدام الصفة) فلا توجد نقطة بداية حقيقية بل تكون افتراضية أو اختيارية.
- تعكس معنى حقيقي للفروق.

**الأمثلة:**

- درجة الحرارة ١٠ - ٢٢ - ١ - ٠ .
- (هل يعني لا توجد حرارة؟؟) هل يمكن القول بأن درجة الحرارة ٨٠ هي ضعف ٤٠؟
- **درجة اختبار الذكاء** هل الدرجة صفر تعني انعدام الذكاء؟؟

**المقياس النسبي :**

- مجموعة من القيم أو الأعداد التي يأخذها المتغير الكمي.
- يمكن أن تعطى الصفات أرقام تعكس مدلول الصفة ولها معنى رياضي في مفهوم أكبر أو أصغر (يمكن ترتيبها).
- الصفر له معنى حقيقي (يعني انعدام الصفة).
- تعكس معنى حقيقي للفروق.

**الأمثلة:**

**المسافات التي تقطها السيارة - أوزان المولودين**

- يمكن ترتيبها.
- يمكن حساب الفروق بينها
- توجد نقطة بداية أي أن الصفر له معنى حقيقي

## مصادر جمع البيانات

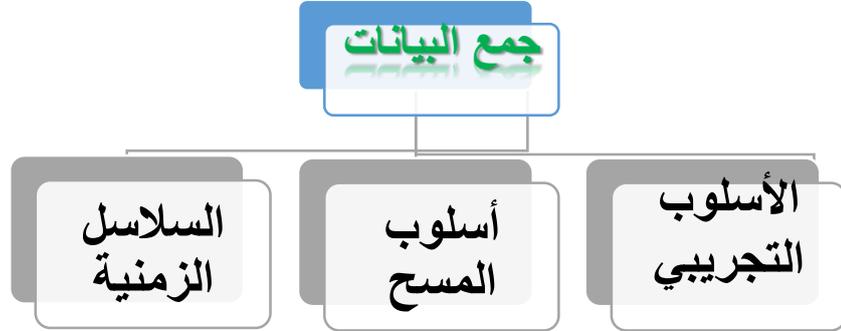
**مصادر مباشرة (ميدانية/أولية)**

جمع البيانات عند ظاهرة أثناء حدوثها في ميدان العمل مثل (المشاهدة ، الملاحظة ، والتسجيل ، الاتصال الهاتفي ، المقابلة الشخصية ، الاستبيان).

**مصادر غير مباشرة (تاريخية/ثانوية):**

جمع البيانات من خلال سجلات سبق نشرها وتكون معه مسبقا عن ظاهرة ما ويستطيع الباحث الرجوع إليها واخذ المعلومات المطلوبه من مصادر رسميه مثل (دائرة الاحصاءات العامة ، الاحوال المدنية ، هيئات دولية

## أساليب جمع البيانات



### ١- الأسلوب التجريبي:

يتم الحصول على البيانات عن طريق تصميم تجربة يتم فيها قياس تأثير العامل موضع الدراسة مع تثبيت العوامل الأخرى

يتم الحصول على البيانات عن طريق المشاهدة

#### الأمثلة:

- تطبيق عدة طرق إعلانية لتسويق منتج جديد
- اختيار طريقة التدريس المناسبة
- تطبيق أسلوبين لزيادة درجة الإيجابية عند الأفرأ

### ٢- أسلوب المسح:

نحصل على البيانات عن طريق السجلات، التقارير، قواعد البيانات، الانترنت، الاستبيانات و المقابلات الشخصية.

#### الاستبيان:

أسئلة موجهة لفئة معينة مختارة من الناس حسب عوامل معينة و محاور الدراسة لاستطلاع و استقصاء آراءهم.

#### المجتمع الأحصائي:

المجموعة الكلية لمفردات الدراسة سواء كانت أفراد أو أشياء

#### العينة:

مجموعة جزئية من مفردات المجتمع يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيل صحيح

## طرق جمع البيانات

### طريقة العينة (المعينة)

تجمع المعلومات من جزء من المجتمع

لإجراء دراسة حول الدخل الشهري لسكان المملكة نختار سكان المنطقة الشرقية

### طريقة المسح الشامل

تجمع البيانات من جميع أفراد المجتمع الإحصائي

لمعرفة المستوى الثقافي لطلاب كلية إدارة الأعمال (جمع البيانات من جميع طلاب الكلية)

## متى نحتاج لاستخدام العينة عوضاً عن دراسة المجتمع بالكامل

دراسة صلاحية البيض الذي تنتجه مزرعة ما

• فساد عناصر المجتمع نتيجة أخذ المشاهدات

دراسة كمية العسل الذي ينتجه النحل

• تعذر الوصول إلى جميع أفراد المجتمع

عندما تكون الميزانية و الوقت محدودين

• تقييد الدراسة بمقدار محدد من تكاليف و الزمن و الجهد المخصص لإنجازها.

إجراء دراسة على جميع طلاب جامعات المملكة

• تسبب المسح الشامل بحصول أخطاء في البيانات لأنه يحتاج إلى عدد كبير من الأشخاص لجمع البيانات.

طرح علاج لإنفلونزا الطيور

• الحاجة إلى اتخاذ قرار سريع

دراسة نسبة التلوث في مياه الأمطار.

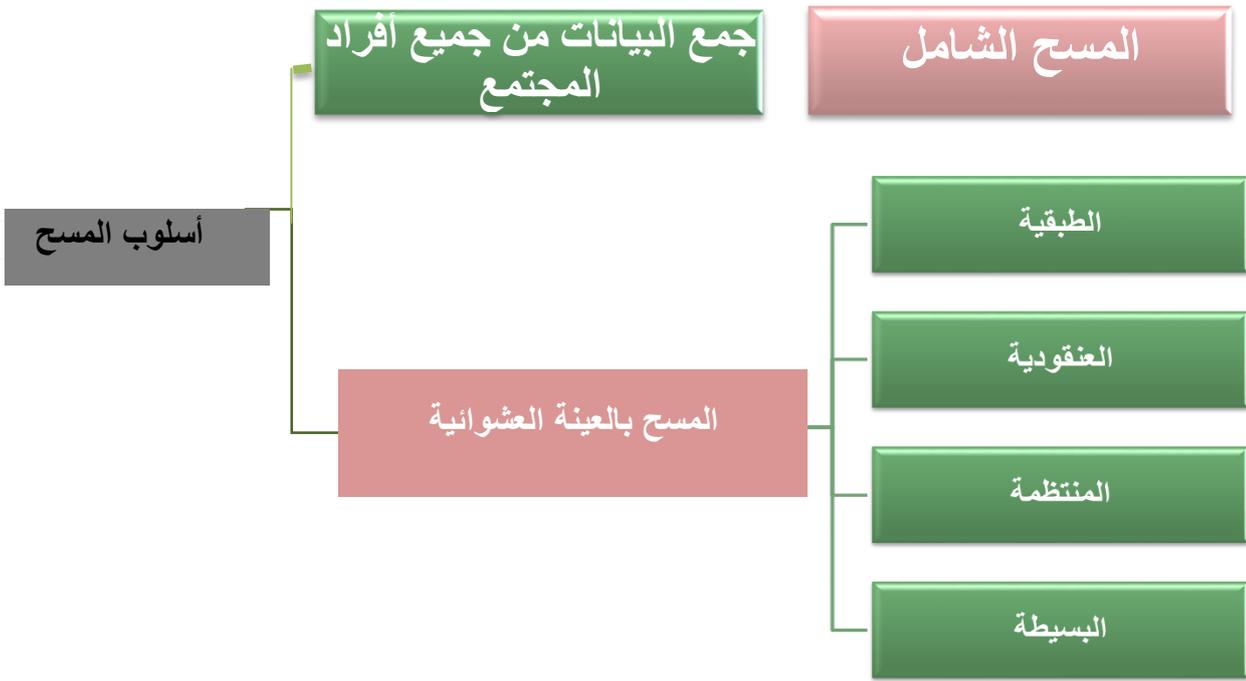
• عندما يكون المجتمع الإحصائي متصلأ أو عندما يكون منفصلأ و لكنه كبير الحجم بحيث قد تحصل فيه تغيرات أثناء الدراسة.

## المجتمع الإحصائي:

- مجتمع الهدف : المجتمع المقصود بالدراسة.
- مجتمع العينة : المجتمع الذي يتم اختيار العينة منه فعلاً.
- عند إجراء دراسة لمعرفة مستوى طلاب جامعات المملكة في مقرر الإحصاء ، تم اختيار عينة من جامعة المجمعة

مجتمع الهدف: طلاب جامعات المملكة

مجتمع العينة : طلاب الجامعة



**العينة العشوائية البسيطة:** تعطي كل مفردة من مفردات المجتمع نفس فرصة الاختيار عن طريق

إعطاء كل مفردة رقم ثم تكوين العينة باختيار مجموعة أرقام عشوائياً يدوياً أو عن طريق الكمبيوتر.

**مثال:** أردنا إجراء دراسة لمعرفة عدد مرات زيارة طالبة مقرر الإحصاء المكون من ٢٠٠٠ طالب لمكتبة الجامعة . كيف يمكن اختيار عينة عشوائية بسيطة من ١٠٠ طالب ؟

يمكن اختيار العينة عن طريق إعطاء كل طالب رقم من ١ إلى ٢٠٠٠ ثم نختار عشوائياً رقم

يمكن إدخال الأرقام الأكاديمية للطلبة في جهاز الكمبيوتر ثم ندع الجهاز يختار ١٠٠ رقم عشوائياً

## العينة العشوائية الطبقية:

يتم تقسيم المجتمع إلى مجموعات متجانسة و غير متداخلة تسمى الطبقات ثم نختار عينة عشوائية بسيطة من كل طبقة.

يجب أن يتناسب حجم العينة المختارة من كل طبقة مع حجم الطبقة باستخدام القانون  
حجم العينة  $\times$  (حجم الطبقة  $\div$  حجم المجتمع)

**مثال:** عند إجراء دراسة لمعرفة المستوى الثقافي لطالبات الجامعة أردنا اختيار عينة طبقية حجمها ٥٠٠

نجزئ المجتمع ( الجامعة ) إلى كليات و نختار من كل كلية عينة عشوائية بسيطة تتناسب و عدد طالباتها و يكون مجموع جميع هذه العينات ٥٠٠

نحدد حجم عينة كل طبقة من القانون السابق

حجم العينة  $\times$  (حجم الطبقة  $\div$  حجم المجتمع)

- ❖ الجامعة
- ❖ كلية العلوم (٢٠٠)
- ❖ كلية الصيدلة (١٥٠)
- ❖ كلية الهندسة (١٥٠)
- ❖ كلية الآداب (٤٠٠)
- ❖ كلية الطب (١٠٠)

• حجم المجتمع = ١٠٠٠ = ١٥٠ + ١٥٠ + ٤٠٠ + ١٠٠ + ٢٠٠ طالب

• حجم العينة المطلوبة = ٥٠٠

• حجم عينة كلية العلوم :

$$n_1 = 500 \times \frac{200}{1000} = 100$$

• حجم عينة كلية الطب:

$$n_2 = 500 \times \frac{100}{1000} = 50$$

• حجم عينة كلية الآداب:

$$n_3 = 500 \times \frac{400}{1000} = 200$$

حجم العينة معطي ٥٠٠  
نضربها في حجم الكليه  
المطلوبه تقسيم على حجم  
المجتمع ١٠٠٠

• حجم عينة كلية الهندسة:

$$n_4 = 500 \times \frac{150}{1000} = 75$$

• حجم عينة كلية الصيدلة:

$$n_5 = 500 \times \frac{150}{1000} = 75$$

العينة

(٥٠٠)

كلية العلوم (١٠٠)

كلية الصيدلة (٧٥)

كلية الهندسة (٧٥)

كلية الآداب (٢٠٠)

كلية الطب (٥٠)

• لاحظ أن مجموع هذه العينات يعطي حجم العينة المطلوبة

العينة العشوائية المنظمة :

يتم تقسيم المجتمع إلى مجموعات عددها مساوي لعدد مفردات العينة ثم نختار من المجموعة الأولى عشوائياً و نختار من باقي المجموعات المفردة التي لها نفس الترتيب

إذا كانت المفردة المختارة من المجموعة الأولى هي الرابعة فنختار من كل مجموعات الباقية المفردة الرابعة لتكون العينة.

مثال: ينتج مصنع ١٠٠ قطعة أثاث في اليوم ، أردنا اختبار جودة المنتج فكيف نختار عينة منظمة من ١٠ قطع لإختبارها

نجزئ الإنتاج الكلي إلى ١٠ مجموعات بعد إعطاء كل قطعة رقم.

١٠	• • •	٤	٣	٢	١
٢٠	• • •	١٤	١٣	١٢	١١
٣٠	• • •	٢٤	٢٣	٢٢	٢١
				• • •	
٩٠	• • •	٨٤	٨٣	٨٢	٨١
١٠٠	• • •	٩٤	٩٣	٩٢	٩١

نفرض أننا اخترنا عشوائياً من المجموعة الأولى فكان العدد هو ٣  
فختار من كل مجموعة المفردة الثالثة.

١٠	• • •	٤	٣	٢	١
٢٠	• • •	١٤	١٣	١٢	١١
٣٠	• • •	٢٤	٢٣	٢٢	٢١
					• • •
٩٠	• • •	٨٤	٨٣	٨٢	٨١
١٠	• • •	٩٤	٩٣	٩٢	٩١

إذن العينة مكونة من القطع التي تحمل الأرقام  
٣، ١٣، ٢٣، ٣٣، ٤٣، ٥٣، ٦٣، ٧٣، ٨٣، ٩٣  
العينة العشوائية العنقودية :

يكون فيها المجتمع مقسماً إلى تجمعات أو عناقيد كل منها تحتوي مجموعة من  
المفردات فيتم اختيار بعض هذه العناقيد عشوائياً ثم نقوم بدراسة جميع مفردات  
العناقيد المختارة

تسمى هذه العينة بالعينة العنقودية ذات المرحلة الواحدة.

**مثال :** أجريت دراسة لمعرفة مستوى أداء مستشفيات المملكة تكون عينة عنقودية

نقسم المملكة على حسب المناطق كل منطقة تمثل عنقود.



نختار عشوائياً منطقتين مثلاً ونقوم بدراسة جميع المستشفيات فيهما

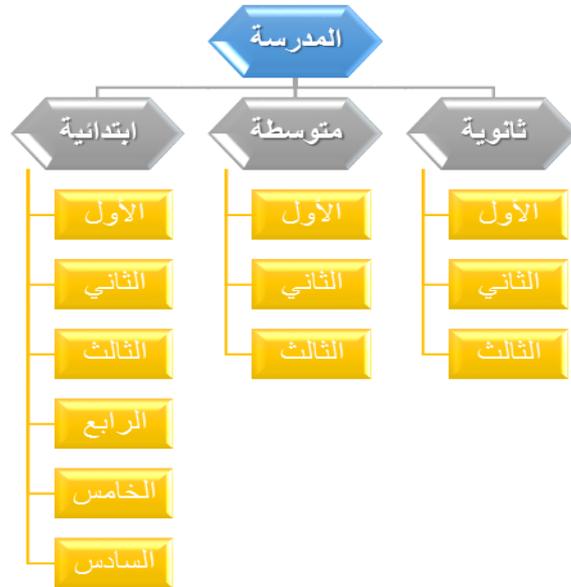


العينة العشوائية العنقودية متعددة المراحل :

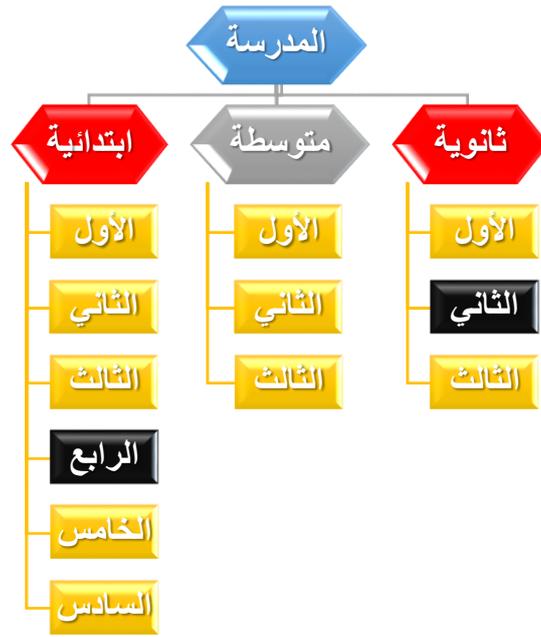
يكون فيها المجتمع مقسماً إلى تجمعات أو عناقيد كل منها يتكون أيضاً من مجموعة عناقيد .

نختار عشوائياً عدد من العناقيد ثم نختار عشوائياً من كل منها عدد من العناقيد و هكذا

**مثال:** لإجراء دراسة تحدد قدرة طالبات مجمع مدرسي ما على استخدام برامج الكمبيوتر نختار عينة عنقودية



نختار عشوائياً مرحلتين مثلاً ثم نختار من كل منهما عشوائياً أيضاً صف و ندرس جميع طالبات ذلك الصف.



تكون المفاضلة بينهما خاضعة للضوابط التالية

- ❖ حجم الميزانية و الوقت اللازم لإجراء الدراسة.
- ❖ مدى تعرض مفردات المجتمع للتلف.
- ❖ مدى تشعب و دقة البيانات المطلوبة.
- ❖ مدى إمكانية حصر جميع مفردات المجتمع.

يمكن أن تتعرض البيانات لبعض الأخطاء عند جمعها  
**خطأ التحيز**

- **مصدره** : الباحث أو المبحوث
- **إمكانية حدوثه** : المسح الشامل أو العينة العشوائية.

### خطأ المعاينة العشوائية

- **مصدره** : يرجع للصدفة فقط و ليس لخطأ الباحث أو المبحوث
- **إمكانية حدوثه** : في المعاينة العشوائية

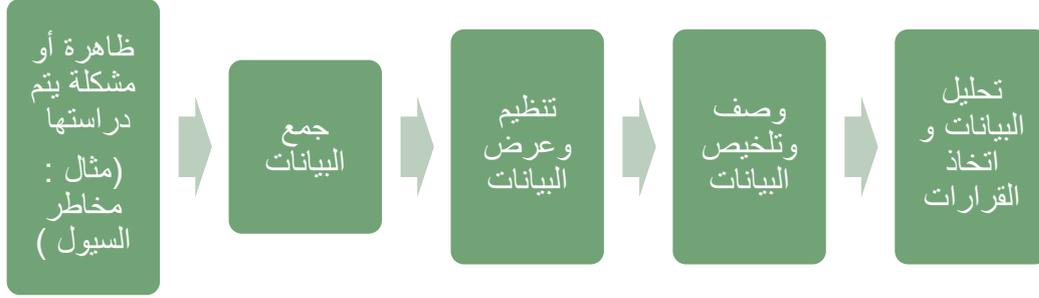
## عند تصميم الاستبيان يجب مراعاة الشروط التالية

- ❖ أن تكون الأسئلة محددة وواضحة الصياغة مع مراعاة الترتيب المنطقي للأسئلة.
- ❖ تحديد اختيارات للإجابة عن أسئلة الاستبيان من خلالها.
- ❖ تجنب الأسئلة التي تعتمد على الذاكرة لفترة زمنية طويلة.
- ❖ التقليل من الأسئلة المقالية المفتوحة.

## المحاضرة الثامنة

### جمع البيانات و ترميزها وعرضها

الخطوات المنهجية لتحليل الإحصائي في البحث العلمي :



### أهمية الاحصاء في مجال الاقتصاد والادارة :-

١. يعتبر الاسلوب الاحصائي الوسيلة الاساسية في دراسة الظواهر الاقتصادية وقياس العلاقات بينها .
٢. تستخدم الاساليب الاحصائية في ادارة جودة الانتاج والمقارنة بين السياسات التسويقية والادارية .

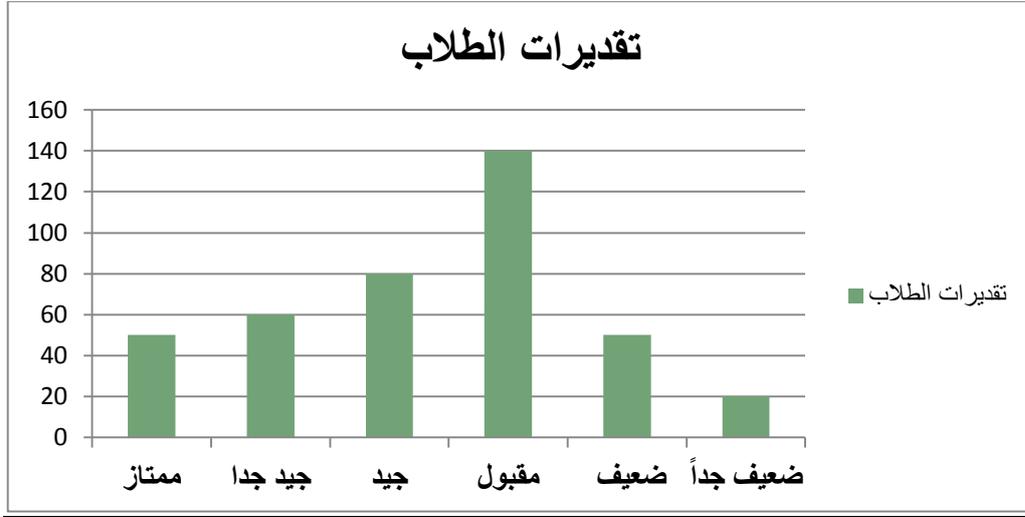
### تنظيم وعرض البيانات :-

#### ١. طريقة الجدول :-

**مثال :** عدد الطلاب الحاصلين على تقدير معين في مقرر الاحصاء في الادارة :-

عدد الطلاب	التقدير
٥٠	ممتاز
٦٠	جيد جدا
٨٠	جيد
١٤٠	مقبول
٥٠	ضعيف
٢٠	ضعيف جداً
٤٠٠	المجموع

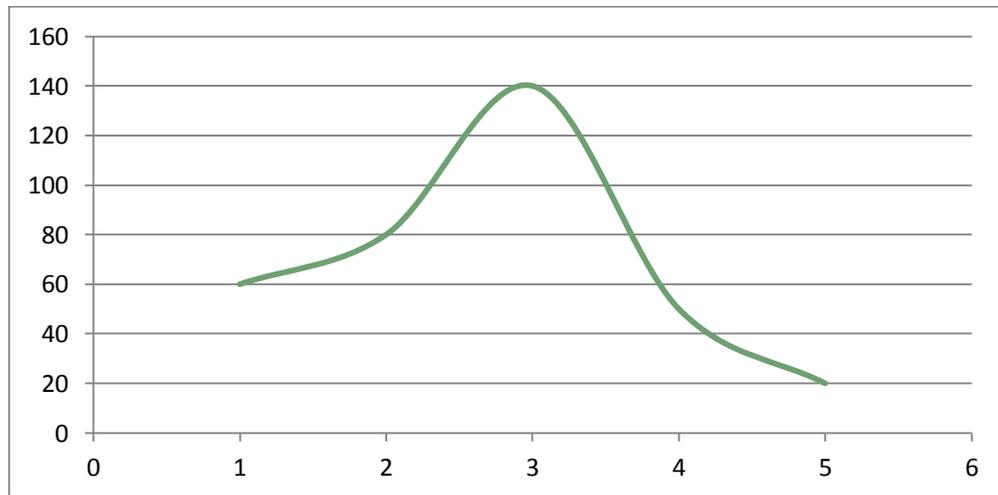
## ٢. طريقة الأعمدة أو المستطيلات



## ٣- طريقة الخطوط المستقيمة :-



## ٤- طريقة الخط المنحني :-



عند إجراء أية دراسة إحصائية نبدأ بجمع المعلومات و تسمى البيانات الخام :-

### ١- المجتمع الإحصائي :-

المجموعة الكلية لمفردات الدراسة سواء كانت أفراد أو أشياء .

### ٢- العينة :-

مجموعة جزئية من مفردات المجتمع يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيل صحيح

### وصف البيانات :-

#### المقاييس الإحصائية الوصفية

❖ مقاييس النزعة المركزية.

❖ مقاييس التشتت.

❖ معاملات الالتواء.

❖ وغيرها.....

### ٢- مقاييس النزعة المركزية

القيم التي تقترب منها أو تتركز حولها أو تتوزع بالقرب منها معظم البيانات

❖ الوسط الحسابي .

❖ الوسيط .

❖ المنوال

أولاً : الوسط الحسابي ( المتوسط ) :-

#### أ- البيانات غير المبوبة :-

إذا كانت  $x_1, x_2, \dots, x_N$  تمثل بيانات عينة من المجتمع

الوسط الحسابي يعطى بالعلاقة:

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

الوسط الحسابي =  $\frac{\text{القيم مجموع}}{\text{عددها}}$

### مثال :-

البيانات التالية تمثل درجات أحد الطلاب في الفصل الدراسي الاول:-

8 , 5 , 7 , 6 , 10 , 5 , 7 , 11

المطلوب :- حساب الوسط الحسابي لدرجات الطالب ؟

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

الوسط الحسابي =  $\frac{\text{القيم مجموع}}{\text{عددها}}$

$$= \frac{8+5+7+6+10+5+7+11}{8} = \text{درجه } 6.25$$

### ب - البيانات المبوبة :-

1- نوجد أولاً مركز الفئات ثم نضرب التكرار x مركز الفئات

2- نجمع ناتج الضرب ثم نقسمه على مجموع التكرار

تأخذ البيانات المبوبة في العادة الشكل التالي :-

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	fx
0 – 10	8	5	40
10 – 20	10	15	150
المجموع	$\sum f$		$\sum xf$

المتوسط =

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

المتوسط =

$$10.555 = \frac{190}{18}$$

### مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

فئات الدرجات	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب

الحل :

. نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى - الحد الأدنى للفئة الأولى  
طول الفئة =  $10 - 0 = 10$

. نوجد مركز الفئة الأولى

$$x_1 = \frac{10+0}{2} = 5$$

مراكز الفئات الاخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة ١٠ على مركز الفئة الاولى

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
0 - 10	20	5	100
10 - 20	50	15	750
20 - 30	90	25	2250
30 - 40	60	35	2100
40 - 50	30	45	1350
المجموع	$\sum f = 250$		$\sum x_i f_i = 6550$

نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6550}{250} = 26.2 \text{ درجة}$$

## مثال :-

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالريال في مائتين محل بمنطقة الرياض :-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحالات	30	20	60	50	40	200

**المطلوب :** حساب متوسط الأجر الأسبوعي للعامل .

**الحل /**

• نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى - الحد الأدنى للفئة الأولى  
طول الفئة =  $15 - 5 = 10$

• نوجد مركز الفئة الأولى

$$x_1 = \frac{15+5}{2} = 10$$

مراكز الفئات الأخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة 10 على مركز الفئة الأولى

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
5 -	30	10	300
15 -	20	20	400
25 -	60	30	1800
35 -	50	40	2000
45 - 55	40	50	2000
المجموع	$\sum f = 200$		$\sum x_i f_i = 6500$

## نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6500}{200} = 26.2 \text{ درجة}$$

## مزايا وعيوب الوسط الحسابي :-

### المزايا

١. تدخل جميع القيم في حسابه.

٢. سهولة حسابه والتعامل معه جبرياً.

٣. يعتبر الأساس في معظم عمليات الإحصاء الاستدلالي.

٤. لا يحتاج في حسابه إلى ترتيب البيانات

### العيوب

١. لا يمكن إيجاده للبيانات الوصفية.

٢. يتأثر بالقيم الشاذة (المتطرفة).

٣. لا يمكن إيجاده بالرسم.

### **٢- الوسيط**

هو القيمة العددية التي تقل عنها نصف البيانات (50%) ويزيد عنها النصف الآخر. ويعرف كذلك بأنه مقياس الموقع لأن قيمته تعتمد على موقعه في البيانات.

### **أ- الوسيط من البيانات غير المبوبة :-**

إذا كانت  $x_1, x_2, \dots, x_n$  تمثل بيانات عينة من المج

فإن الوسيط يحسب كالتالي:

١. نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً.

٢. نوجد موقع الوسيط  $\frac{n+1}{2}$ .

٣. إذا كان  $n$  عدد فردي فإن الناتج يكون عدد صحيح و بالتالي الوسيط هو  $x_{\frac{n+1}{2}}$ .

٤. إذا كان  $n$  عدد زوجي فإن الناتج يكون عدد غير صحيح و بالتالي الوسيط هو الوسط

الحسابي للقيمتين اللتين يقع بينهما العنصر  $x_{\frac{n+1}{2}}$ .

### **مثال :-**

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

**20 , 40 , 10 , 60, 50, 80**

### **الحل**

١- ترتيب البيانات تصاعدياً :

**10 , 20 , 40 , 50 , 60**

٢- ترتيب الوسيط =  $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

٣- الوسيط هو القيمة الثالثة :- الوسيط = ٤٠

### **مثال :-**

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

**20 ,40 ,10 ,60 ,50 ,80**

## الحل /

١- ترتيب البيانات تصاعدياً :

10 , 20 , 40 , 50 , 60 , 80

$$٢- \text{ترتيب الوسيط} = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3.5$$

٣- ترتيب الوسيط هو رقم كسري إذاً الوسيط هو متوسط القيمتين التي موقعهما ٣ و ٤

$$\text{الوسيط} = \frac{40+50}{2} = 45$$

## ب- الوسيط من البيانات المبوبة :-

١- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

$$٢- \text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{التكرارات مجموع}}{2} = \frac{\sum f}{2}$$

٣- الوسيط =

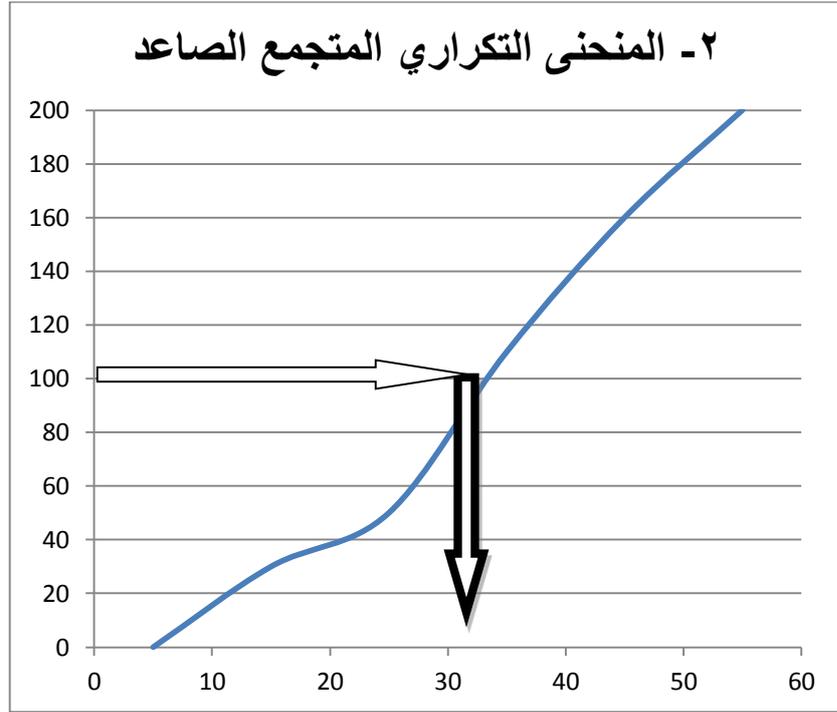
الحد الأدنى للفئة الوسيطة +  $\frac{\text{الوسيط ترتيب} - \text{السابق الترتيب}}{\text{اللاحق الترتيب} - \text{السابق الترتيب}}$  × طول الفئة الوسيطة

ملاحظه هامه : لا يوجد مثال للتطبيق

## الوسيط من الرسم :-

١- نوجد الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 5	0
أقل 15	30
أقل 25	50
أقل 35	110
أقل 45	160
أقل 55	200



**٣- الربع الأدنى و الربع الأعلى :-**

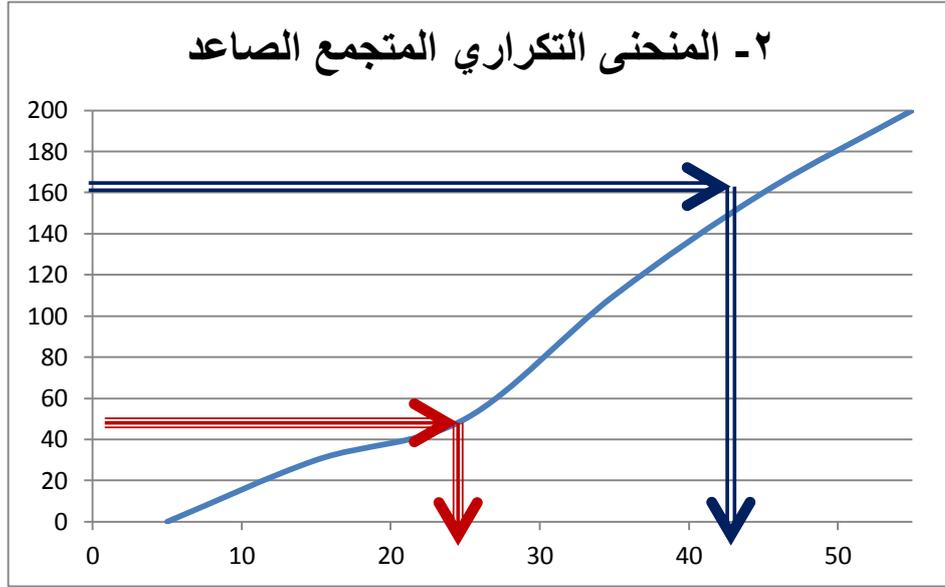
الربع الأدنى و الربع الأعلى من البيانات المبوبة :-

١- الربع الأدنى : هو القيمة العددية التي تقل عنها ربع البيانات (25%) ويزيد عنها (75%).

٢- الربع الأعلى : هو القيمة العددية التي تقل عنها ثلاث أربع البيانات (75%) ويزيد عنها (25%)

**١- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-**

الحد الأدنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 5	0
أقل 15	30
أقل 25	50
أقل 35	110
أقل 45	160
أقل 55	200



#### ٤- المنوال :-

القيمة التي تكررت أكثر من غيرها أي القيمة الأكثر شيوعاً أو تكراراً.

أولاً : البيانات غير المبوبة :-

مثال :-

الدرجات التالية تمثل نتائج مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة أوجد المنوال لهذه الدرجات ؟

10 , 12 , 14 , 10 , 12 , 15 , 10

المنوال هو ١٠ و هو القيمة الأكثر تكراراً

ثانياً المنوال من البيانات المبوبة :-

١- جدول تكراري بسيط (بدون فئات) :-

المنوال هي القيمة التي تقابل أكبر تكرار

مثال :-

الجدول التالي يوضح أجور مجموعة من الموظفين خلال العام الماضي المطلوب حساب قيمة منوال الأجر ؟

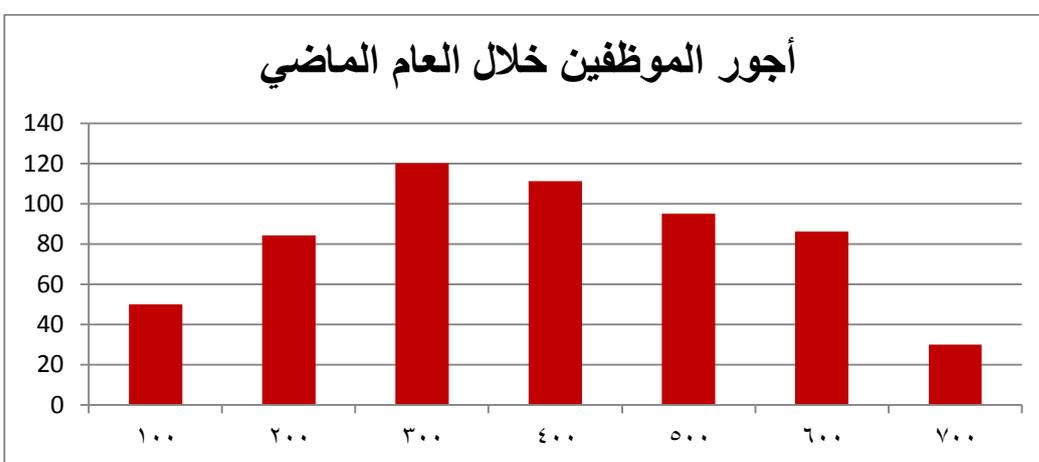
الأجر	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠
عدد العمال	٥٠	٨٤	١٢٠	١١١	٩٥	٨٦	٣٠

## الحل

المنوال = ٣٠٠ ريال و هي القيمة التي تقابل أكبر تكرار و هو ١٢٠ موظف

## المنوال من الرسم :-

الأجر	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠
عدد العمال	٥٠	٨٤	١٢٠	١١١	٩٥	٨٦	٣٠



مميزاته و عيوبه	تأثره بجميع القيم	تأثره بالقيم المتطرفة	إيجاده	مدى استخدامه	تعريفه	المعدل (المتوسط)
يعمل بكفاءة مع جميع الطرق الإحصائية	نعم	نعم	دائما	الأكثر استخداما	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$	الوسط الحسابي
غالبا ما يستخدم في حالة وجود قيم متطرفة	لا	لا	دائما	غالبا	القيمة التي تتوسط القيم	الوسيط
صالح للبيانات من المستوى الاسمي	لا	لا	أحيانا لا يوجد وأحيانا أكثر من واحد	أحيانا	القيم الأكثر تكرارا	المنوال

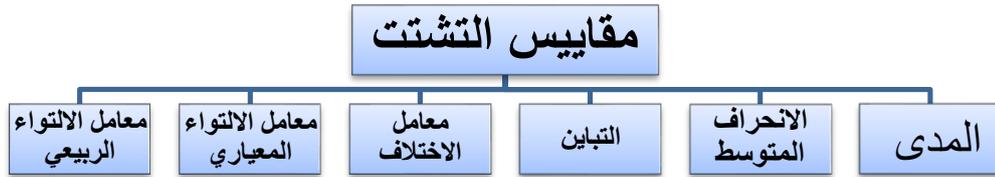
## المحاضرة التاسعة

### تابع جمع البيانات و ترميزها وعرضها

#### ثالثاً :- مقاييس التشتت :-

إن درجة التباعد أو التقارب بين البيانات تسمى تشتتاً ، و تستخدم مقاييس التشتت في المقارنة بين مجموعات البيانات من حيث تشتتها.

كلما قل تشتت البيانات و كلما اقتربت من متوسطها كلما كانت أقرب للتجانس .



#### ١ - المدى :-

#### أولاً : البيانات غير المبوبة :-

هو الفرق بين أكبر مفردة و أقل مفردة .

#### مثال :-

البيانات التالية تمثل أسعار مجموعة من تذاكر الطيران من الرياض إلى القاهرة و المطلوب حساب قيمة المدى لأسعار هذه التذاكر :-

1150 , 968 , 1300 , 675 , 500 , 1100

الحل

$$\text{المدى} = 1300 - 500 = 800 \text{ ريال}$$

#### مثال :-

البيانات التالية توضح درجات مقياس الذكاء لمجموعتين من الطلاب و المطلوب المقارنة بين المجموعتين :-

المجموعة الاولى { 100,110,50,90,130,200,160 } (أكبر مفردة ٢٠٠ . اصغر مفردة ٥٠)

المجموعة الثانية { 150,160,120,100,170,165,155 } (أكبر مفردة ١٧٠ و اصغر مفردة ١٠٠)

## الحل

المدى للمجموعة الاولى =  $200 - 50 = 150$  درجة

المدى للمجموعة الثانية =  $170 - 100 = 70$  درجة

إذا تشتت المجموعة الأولى أكبر من المجموعة الثانية

ثانياً : المدى من البيانات المبوبة :-

المدى = الحد الأعلى للفئة الاخير - الحد الادنى للفئة الاولى

## مثال :-

الجدول التالية توضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقررين دراسيين المحاسبة و الاحصاء و المطلوب بيان أي من المقررين أكثر تشتتاً ؟

درجات المحاسبة	10-	20-	30-	40-	50-60
عدد الطلاب	100	120	210	300	150

درجات الاحصاء	50-	55-	60-	65-	70-75
عدد الطلاب	250	310	420	260	100

١- المدى لدرجات المحاسبة =  $60 - 10 = 50$  درجة .

٢- المدى لدرجات الاحصاء =  $75 - 50 = 25$  درجة .

إذا درجات المحاسبة أكثر تشتتاً من درجات الاحصاء

٢- التباين و الانحراف المعياري :-

## ١- التباين :

التباين هو متوسط مربعات الانحرافات القيم عن وسطها الحسابي و يرمز له بالرمز  $\sigma^2$

## ٢- الانحراف المعياري:

الجذر التربيعي و يرمز للانحراف المعياري بالرمز  $\sigma$

## أولا التباين والانحراف المعياري من البيانات غير المبوبة :-

من بيانات المجتمع و  $n$  تمثل  $X_1, X_2, \dots, X_n$  إذا كانت فإن التباين والانحراف المعياري  $\mu$  لها المتوسط الحسابي ويحسبان بالعلاقة :

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} = \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

### مثال :-

البيانات التالية توضح أجور اليومية مجموعة من العمال بالريال و المطلوب حساب قيمة التباين و الانحراف المعياري لأجور هؤلاء العمال :-

25 , 30 , 60 , 15 , 50 , 35

### الحل

x	25	30	60	15	50	35	$\sum x = 215$
$x^2$	625	900	3600	225	2500	1225	$\sum x^2 = 9075$

نرفع  $x$  الي  
تربيع 2 يعني  
 $625 = (25)^2$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{9075}{6} - \left(\frac{215}{6}\right)^2 = 228.47 \text{ ريال}$$

6 عدد  
خانات

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{228.47} = 15.1153 \text{ ريال}$$

### مثال :-

البيانات التالية توضح درجات مجموعة من الطالب في مقرري الاحصاء و بحوث العمليات و المطلوب تقرير أي من درجات المقررين تعتبر أكثر تشتتاً :-

درجات الاحصاء { 13 , 18 , 40 , 20 , 45 }

درجات بحوث العمليات { 35 , 40 , 28 , 30 , 48 }

درجات الاحصاء x	13	18	40	20	45	136
x <sup>2</sup>	169	324	1600	400	2025	4518
درجات بحوث العمليات x	35	40	28	30	48	181
x <sup>2</sup>	1225	1600	784	900	2304	6813

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{4518}{5} - \left(\frac{136}{5}\right)^2 = 163.76$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{163.76} = 12.797 \text{ درجه}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{6813}{5} - \left(\frac{181}{5}\right)^2 = 52.16$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{52.16} = 7.222$$

أي أن درجات  
الطلاب في مقرر  
الاحصاء أكثر تشتتاً  
من درجات بحوث  
العمليات

### ثانياً:- التباين والانحراف المعياري من البيانات المبوبة :

إذا كانت البيانات الظاهرة ، مبوبة في جدول توزيع تكراري ، فإن الانحراف المعياري يحسب بتطبيق المعادلة التالية :-

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

### مثال :

الجدول التالي يتضمن فئات الانفاق الشهري للأسرة و المطلوب حساب الانحراف المعياري و التباين :-

فئات الانفاق	عدد الاسر
50 -	120
60 -	140
70 -	160
80 -	180
90 - 100	150
المجموع	750

$$50+60$$

$$=110$$

$$2 \div 110$$

$$55 =$$

قيمه X

وباقى

نفس

الطريقه

فئات الانفاق	عدد الاسر f	مركز الفئة x	f x	f <sup>2</sup> x
50 -	120	55	6600	363000
60 -	140	65	9100	591500
70 -	160	75	12000	900000
80 -	180	85	15300	1300500
90 - 100	150	95	14250	1353750
المجموع	750		57250	4508750

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{4508750}{750} - \left(\frac{57250}{750}\right)^2 = 184,8889$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 13,5974$$

مثال :-

الجدول التالي يتضمن فئات الاجر الشهري لمجموعة من العاملين و المطلوب حساب الانحراف المعياري والتباين :-

فئات الانفاق	عدد الاسر
100 -	55
200 -	65
300 -	80
400 -	75
500 - 600	35
المجموع	310

فئات الاتفاق	عدد الاسر f	مركز الفئة x	f x	f <sup>2</sup> x
100 -	55	150	8250	1237500
200 -	65	250	16250	4062500
300 -	80	350	28000	9800000
400 -	75	450	33750	15187500
500 - 600	35	550	19250	10587500
المجموع	310		105500	40875000

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{40875000}{310} - \left(\frac{105500}{310}\right)^2 = 16035,38$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 126,6309$$

### ٣- معامل الاختلاف المعياري :-

هو معامل نسبي يستخدم للمقارنة بين تشتت ظاهرتين او اكثر مختلفتين في وحدة القياس او في قيمه المتوسطة لهما . والظاهرة التي معامل في اختلافها أكبر تكون اكثر تشتتاً من الاخرى ويرمز لها  $C.V.(X)$

$$C.V. = \frac{\sigma}{x} \times 100$$

### مثال :-

في دراسة لمستوى أداء طلاب التعليم عن بعد في مقررين وهما مقرر المحاسبة و الاحصاء تم تجميع البيانات التالية :-

المقارن	المقاييس الوصفية لاختبار مستوى الطلاب
	الانحراف المعياري $\sigma$
	الوسط الحسابي $\bar{X}$
المحاسبة	70
الاحصاء	80

**المطلوب :** أي من المقررين أكثر تشتتاً ؟

**الحل /**

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} 100$$

$$C.V 1 = \frac{5}{70} \times 100 = 7.143\%$$

$$C.V 2 = \frac{8}{80} \times 100 = 10\%$$

بما أن معامل الاختلاف لدرجات الطلاب في مقرر الاحصاء أكبر من معامل الاختلاف بالنسبة لدرجات الطلاب في مقرر المحاسبة فيمكن القول أن التشتت النسبي لدرجات الاحصاء أكبر من المحاسبة أي أن الدرجات المحاسبه اكثر تجانسا من درجات الاحصاء .

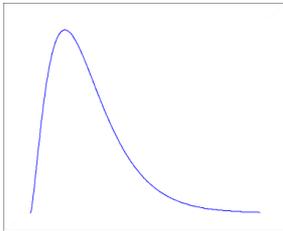
### **معامل الالتواء :-**

هو درجة بُعد المنحنى التكراري عن التماثل. ويقصد بالتماثل أنه إذا أسقطنا عموداً من قمة المنحنى التكراري وقسمه إلى قسمين منطبقين يكون التوزيع متماثلاً. والعكس فيكون التوزيع غير متماثل أي ملتو إما إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار.

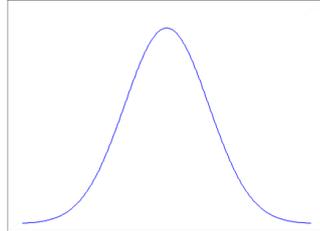
**معامل الالتواء =** صفر يعني أن المنحنى الاعتدالي متماثل أي إذا قسمنا هذا المنحنى قسمين فإنهما يكونا متماثلان تماماً، ويسمى لذلك توزيع اعتدالي. أما إذا انحرف المنحنى نحو القيم الكبيرة (جهة اليمين) فيوصف بأنه موجب الالتواء، وإذا انحرف نحو القيم الصغيرة (جهة اليسار) فيوصف بأنه سالب الالتواء.

يمكن الاستفادة من هذا التعريف في ناحيتين:

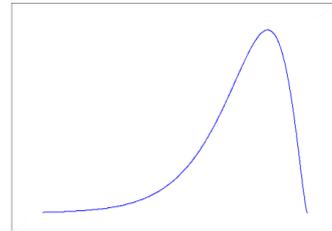
- معرفة نوع الالتواء موجب أو سالب على حسب الإشارة.
- المقارنة بين توزيعين تكرارين . المجموعة التي لها معامل التواء أكبر يكون توزيعها ملتوياً أكثر.



التوزيع غير متماثل  
وملتو من جهة اليمين  
معامل الالتواء = قيمة موجبة



التوزيع متماثل  
معامل الالتواء = 0



التوزيع غير متماثل  
وملتو من جهة اليسار  
معامل الالتواء = قيمة سالبة

## ١- معامل الالتواء المعياري :-

معامل الالتواء المعياري =  $3(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسط})$

### الانحراف المعياري

#### النتج :-

- ١- صفر أو يقترب من الصفر إذا فالتوزيع معتدل أو متماثل أو طبيعي .
- ٢- موجب إذا التوزيع ملتوي جهة اليمين .
- ٣- سالب إذا التوزيع ملتوي جهة اليسار .

#### مثال :-

إذا كان متوسط درجات الطلاب في مقرر الاحصاء ٨٥ درجة وذلك بانحراف معياري قدره ١٠ درجات فإذا علمت أن قيمه وسيط الدرجات لهذا المقرر هو ٨٠ درجة المطلوب حساب معامل الالتواء المعياري لدرجات الطلاب في هذا المقرر ؟

معامل الالتواء المعياري =  $3(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسط})$

### الانحراف المعياري

$$= \frac{3 \times (85 - 80)}{10} = 1.5$$

حيث ان الناتج قيمته موجبة إذا فهذا التوزيع ملتوي جهة اليمين .

بنسبه لمعامل الالتواء لربيع الاعلى و الادني غير مطالبين فيه