المحاضرة الحادية عشر

تحليل الإنحدار

يعتبر تحليل للانحدار أكثر طرق التحليل الإحصائى استخداما، حيث يتم من خلاله التنبؤ بقيمة احد المتغيرات (المتغير التابع) عند قيمة محددة لمتغير أو متغيرات أخرى (المتغيرات المستقلة).

وتسمى العلاقة الرياضية التى تصف سلوك المتغيرات محل الدراسة والتى من خلالها يتم التنبؤ بسلوك احد المتغيرين عند معرفة الاخر بمعادلة خط الانحدار.

وهناك صورتان أساسيتان لمعادلة الانحدار وهما:

الصورة الأولى: معادلة انحدار x|y (التى يطلق عليها معادلة انحدار y على x)

الصورة الثانية: معادلة انحدار y|x (التى يطلق عليها معادلة انحدار x على y)

معادلة انحدار y على x

وهى تلك المعادلة التى يطلق عليها معادلة انحدار y | x. أى تتحدد قيمة المتغير y تبعا لقيمة المتغير x لذلك يمكن التعبير عن تلك العلاقة الخطية بالمعادلة التالية:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

حيث يسمى b_0 ثابت الانحدار او الجزء الثابت او الجزء المقطوع من محور الصادات بينما b_1 يطلق عليها معامل الانحدار أو معدل التغير فى الدالة .

ولتحديد المعادلة الدالة على العلاقة بين المتغيرين y و x لابد من تقدير قيمة للثابتين b_0 و b_1 الذين يمكن تقديرهما من خلال تطبيق طريقة المربعات الصغرى كما يلى:

تقوم نظرية المربعات الصغرى على تدنية مجموع مربعات الأخطاء فى التقدير إلى اقل حد ممكن.

ويمكن استخدام المعادلات التالية لحساب معامل الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

$$b_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b_0 = \frac{\sum y}{n} - b_1 \frac{\sum x}{n}$$

$$= \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

مثال

عند دراسة العلاقة بين عدد غرف المسكن وكمية الكهرباء المستهلكة بالألف كيلو وات فكانت كما يلي:

عدد الغرف	12	9	14	6	4	7	10	5	8
استهلاك كهرباء	9	7	10	5	3	7	8	10	4	6

المطلوب أوجد:

1. معادلة انحدار y على x ؟
2. تحديد معدل التزايد أو التناقص فى استهلاك الكهرباء؟
3. ماهو الاستهلاك المتوقع لمسكن مكون من 8 غرف؟

الحل:

نقوم بعمل الجدول التالى:

x	y	xy	x^2	y^2
12	9	108	144	81
9	7	63	81	49
14	10	140	196	100
6	5	30	36	25
4	3	12	16	9
7	7	49	49	49
8	10	80	100	64
10	10	100	100	100
5	4	20	25	16
8	6	48	64	36
85	69	650	811	529

من خلال الجدول السابق يمكن تقدير معادلة انحدار x على y كما يلي:

اولاً- يتم تقدير قيمة معامل الانحدار b_1

$$b_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b_1 = \frac{10\ (650\ ) - (69\ )(\ 85\ )}{10\ (811\ ) - (\ 85\ )^2}$$

$$= \frac{635}{885} = 0\ .\ 717$$

وبالتالى يكون معدل التزايد فى استهلاك الكهرباء هو b_1 لأنها موجبة ويساوى 0.717 أى أن كل غرفة بالمسكن تعمل على زيادة استهلاك الكهرباء بمقدار 717 كيلو وات.

ثانياً – تقدير قيمة b_0

$$b_0 = \frac{\sum y}{n} - b_1 \frac{\sum x}{n}$$

$$b_0 = \frac{69}{10} - 0\ .717\ \ \frac{85}{10}$$

$$= 6.9\ \ - 6.0945\ \ \ = 0.8055$$

معادلة انحدار x على y هي:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

$$\hat{y} = 0\ .8055\ \ \ + 0\ .717\ \ \ x$$

الاستهلاك المتوقع لمسكن مكون من 8 غرف:

يتم التعويض فى معادلة الانحدار التى سبق إيجادها عندما تكون x = 8 كما يلي:

$$\hat{y} = 0\ .8055\ \ \ + 0\ .717\ \ (8) = 6\ .54$$

أى أن الاستهلاك المتوقع لمسكن مكون من 8 غرف هو 6540 كيلو وات

معادلة انحدار x على y

وهى التى يطلق عليها معادلة انحدار x | y. أى تتحدد قيمة المتغير x تبعا لقيمة المتغير y لذلك يمكن التعبير عن تلك العلاقة الخطية بالمعادلة التالية:

$$\hat{x} = c_0 + c_1 y$$

حيث يسمى c_0 ثابت الانحدار او الجزء الثابت بينما c_1 يطلق عليها معامل الانحدار أو معدل التغير فى الدالة

ولتحديد المعادلة الدالة على العلاقة بين المتغيرين x و y لابد من تقدير قيمة للثابتين c_0 و c_1 الذين يمكن تقديرهما من خلال تطبيق طريقة المربعات الصغرى فتكون النتيجة كما يلي:

$$c_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum y^2 - (\sum y)^2}$$

$$c_0 = \frac{\sum x}{n} - c_1 \frac{\sum y}{n}$$

$$= \overline{x} - c_1 \overline{y}$$

مثال

باستخدام بيانات المثال السابق لعدد الغرف واستهلاك الكهرباء، وعلى اعتبار هو المتغير المستقل وعدد الغرف هو المتغير التابع، أوجد التالي:

عدد الغرف	12	9	14	6	4	7	10	10	5	8
استهلاك كهرباء	9	7	10	5	3	7	8	10	4	6

المطلوب أوجد:

1. معادلة انحدار x على y ؟
2. ماهو عدد الغرف المتوقع لأستهلاك 25000 كيلو وات ؟

الحل:

نقوم بعمل الجدول التالي:

x	y	xy	x^2	y^2
12	9	108	144	81
9	7	63	81	49
14	10	140	196	100
6	5	30	36	25
4	3	12	16	9
7	7	49	49	49
10	8	80	100	64
10	10	100	100	100
5	4	20	25	16
8	6	48	64	36
85	69	650	811	529

من خلال الجدول السابق يمكن تقدير معادلة انحدار x على y كما يلي:

اولاً- يتم تقدير قيمة معامل الانحدار c_1

$$c_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum y^2 - (\sum y)^2}$$

$$c_1 = \frac{10\ (650\ ) - (85\ )(\ 69\ )}{10\ (529\ ) - (\ 69\ )^2}$$

$$= \frac{635}{529} = 1\ .2004$$

ثانياً – تقدير قيمة c_0

$$c_0 = \frac{\sum x}{n} - c_1 \frac{\sum y}{n}$$

$$c_0 = \frac{85}{10} - 1\ .2004 \quad \frac{69}{10}$$

$$= 8\ .5\ -\ 8.283 \quad = 0.217$$

معادلة انحدار x على y هي:

$$\hat{x} = c_0 + c_1 y$$

$$\hat{x} = 0\ .217 \quad + 1\ .2004 \quad y$$

إذا كان الاستهلاك للمنزل 25000 كيلوات
فإن عدد الغرف المتوقعة هو:
يتم التعويض في معادلة الانحدار التي سبق إيجادها عندما تكون y = 25 كما يلي:

$$\hat{x} = 0.217 + (1.2004)(25) = 0.217 + 30.01 = 30.227$$

أي أنه إذا كان استهلاك الكهرباء في احد المنازل 25000 كيلوات فإن عدد الغرف المتوقع في هذا المنزل = 30 غرفة تقريبا.

العلاقة بين معاملي معادلتي الانحدار y على x و معادلة انحدار x على y

اذا علم معامل معادلة انحدار y على x b_1 ومعامل معادلة انحدار x على y c_1 فإنة يمكن تقدير كلاً من معامل التحديد ومعامل الارتباط كما يلي:

$$r^2 = b_1 \times c_1$$

فكما يبدوا معامل التحديد هو عبارة عن حاصل ضرب معاملى الانحدار b_1 و c_1 وبالتالي يمكن الحصول على معامل الارتباط بأخذ الجذر التربيعى لمعامل التحديد كما يلي:

$$r = \sqrt{r^2}$$

مع ملاحظة أن اشارة معامل الارتباط تكون موجبة أو سالبة بما يتفق وإشارة كلا من b_1 و c_1 حيث أن إشارتهم جميعا واحدة، لأن الاشارة لأي منهم تتوقف على البسط نفسه وهو التغاير بين المتغيرين x و y .

كما يمكن معرفة قيمة أي معامل انحدار بمعلومية الأخر كما يلي:

$$b_1 = r \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad c_1 = r \times \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

حيث أن:

σ_x	الانحراف المعيارى للمتغير x
σ_y	الانحراف المعيارى للمتغير y

مثال:

أحسب معامل الارتباط بين عدد الغرف والمستهلك من الكهرباء إذا علمت أن:

$$c_1 = 1.2004 \quad \text{و} \quad b_1 = 0.717$$

الحل:

إيجاد معامل التحديد كالتالي:

$$r^2 = b_1 \times c_1$$
$$= 0.717 \times 1.2004$$
$$= 0.8606$$

أى أن عدد الغرف يفسر 86.06 % من التغير فى استهلاك الكهرباء

إيجاد معامل الارتباط كالتالي:

$$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{0.8606} = 0.9276$$

مما يدل على وجود ارتباط طردى قوى بين عدد الغرف و استهلاك الكهرباء