أمثلة على المجموعات:

مثال:

$A=\{a, b, c, d\}$

أي أن المجموعة A تتكون من العناصر a و b و c و d

$b \in A$

أي أن العنصر b ينتمي إلى المجموعة A

$f \notin A$

أي أن العنصر f لا ينتمي إلى المجموعة A

مثال:

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية؟

1) $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{3,1,5,7\}$

2) $A = \{0,1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$

الحل:

1) $A = B$

2) $A \equiv B$

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

1) $A \cup B$
2) $A \cap B$
3) $A-B$
4) $\overline{A}$
5) $\overline{B}$

الحل:

1) $A \cup B = \{1,2,3,4,5, x, y, w\}$

2) $A \cap B = \{3, x\}$

3) $A - B = \{1,2, y\}$

4) $\overline{A} = \{4,5, w, z\}$

5) $\overline{B} = \{1,2, y, z\}$

مثال:

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

A={1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

B={1, 2, 3, 6, 8, 11, 12, 14, 16}

$\overline{A}$ ={2, 4, 6, 20}

$\overline{B}$ ={4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20}

قذفت قطعة نقود معدنية ثلاث مرات، أوجد فراغ العينة Ω وعدد عناصرها واكتب الحوادث التالية وعدد عناصر كل منها:

- الحادثة A ظهور صورة في الرمية الأولى.
- الحادثة B ظهور صورة واحدة على الأقل.
- الحادثة C ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية.

- الحادثة $(A \cap B)$
- الحادثة $(A \cup C)$
- الحادثة $(\overline{A} \cup \overline{B})$
- الحادثة $(A \cap \overline{B})$
- الحادثة $\overline{(A \cap B)}$

الحل :

فراغ العينة Ω يمكن إيجاده من خلال حساب ظهور كل رمية مباشرة على النحو التالي:

Ω= {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH), (TTT)}

- الحادثة A ظهور صورة في الرمية الأولى:

A= {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT)}

- الحادثة B ظهور صورة واحدة على الأقل.

B= {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH)}

- **الحادثة C ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية.**

C = {(THH), (TTH)}

$(A \cap B)$ = {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT)}

$(A \cup C)$ = {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH)}

$(\overline{A} \cup \overline{B})$ = {(THH), (THT), (TTH), (TTT)}

$(A \cap \overline{B})$ = ϕ

$\overline{(A \cap B)}$ = {(THH), (THT), (TTH), (TTT)}

أوجد فراغ العينة في كل من التجارب العشوائية التالية:

١. رمي عملة معدنية واحدة.
٢. رمي عملة معدنية مرتين.
٣. رمي حجر نرد مرتين.

الحل:

١- عند رمي عملة معدنية مرة واحدة جميع النتائج الممكن الحصول عليها إما صورة H أو كتابة T، فيكون بالتالي فراغ العينة :

$\Omega = \{H , T\}$

تابع الحل:

٢- عند رمي عملة معدنية مرتين تكون جميع النتائج الممكن الحصول عليها إما صورة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية أو صورة في الرمية الأولى وكتابة في الرمية الثانية أو كتابة في الرمية الأولى وصورة في الثانية أو كتابة في الأولى وكتابة في الثانية فيكون بالتالي فراغ العينة في هذه التجربة :

$\Omega=\{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

تابع الحل:

٣- عند رمي حجر نرد مرتين (حجر النرد هو مكعب صغير كتب أو رسم على أوجهه الستة الأرقام من ١ إلى ٦) فتكون جميع النتائج الممكن الحصول عليها إما ظهور رقم ١ في الرمية الأولى ورقم ١ في الرمية الثانية أو رقم ١ في الرمية الأولى ورقم ٢ في الرمية الثانية وهكذا، فيكون بالتالي فراغ العينة في هده التجربة :

Ω = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

مثال

في تجربة **رمي عملة معدنية ثلاث مرات**، اكتب فضاء العينة لهذه التجربة وعبر عن الحوادث التالية:

- الحصول على H (صورة) مرة واحدة
- الحصول على H (صورة) مرتين
- الحصول على H (صورة) ثلاث مرات
- عدم الحصول على H (صورة)

الحل:

-عند رمي عملة معدنية ثلاث مرات فيكون بالتالي **فراغ العينة** :

Ω= {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

الحل:

-ويمكن الحصول على الحادثة **H (صورة) لمرة واحدة** ونرمز لها بالرمز A1 كالتالي:

A1 ={HTT, THT, TTH}

الحل:

- ويمكن الحصول على الحادثة **H (صورة) لمرتين** ونرمز لها بالرمز A2 كالتالي:

A2 ={HHT, HTH, THH}

الحل:

– ويمكن الحصول على الحادثة **H (صورة) ثلاث مرات** ونرمز لها بالرمز A3 كالتالي:

A3 ={HHH}

الحل:

- ويمكن **عدم الحصول** على الحادثة **H (صورة)** ونرمز لها بالرمز A4 كالتالي:

A4 ={TTT}

مثال

في طريقك إلى الجامعة توجد إشارتا مرور، ما هو فضاء العينة لتجربة ذهابك إلى الجامعة؟

الحل:

نفترض أنه عندما تكون الإشارة خضراء نرمز لها بالرمز G وعندما تكون حمراء نرمز لها بالرمز R فيكون بالتالي فضاء العينة كالتالي:

$$\Omega=\{GG, GR, RG, RR\}$$

مثال

في تجربة رمي حجر نرد مرتين عبر عن الحوادث التالية بدلالة نقاط العينة والصفة المميزة؟

- A : الحصول على مجموع يساوي ٧
- D : الحصول على ١ في الرمية الأولى
- F : الحصول على مجموع أقل من أو يساوي ٢

تابع الحل:

وإذا رمزنا للرمية الأولى بـ x والرمية الثانية بـ y فإنه يمكننا كتابة الحوادث المطلوبة في السؤال على النحو التالي :

أولا – الحصول على مجموع يساوي 7

– بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

$$A=\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

– بطريقة الصفة المميزة:

$$A=\{ (x,y) : x + y = 7 \}$$

تابع الحل:

الحصول على الرقم 1 في الرمية الأولى

- بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

$$D=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$$

- بطريقة الصفة المميزة:

$$D=\{ (x,y) : x = 1 \}$$

تابع الحل:

الحصول على مجموع أقل من أو يساوي 2

- بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

$$F=\{(1,1)\}$$

- بطريقة الصفة المميزة:

$$F=\{ (x,y) : x + y \leq 2 \}$$

عبر بالكلمات عن كل الحوادث الممثلة بالمجموعات الجزئية التالية من نقاط العينة:

$G=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$K=\{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

الحل:

الحادثة	التعبير بالكلمات عن الحوادث
الحادثة G	تعني الحصول على نفس العدد في الرمية الأولى والرمية الثانية
الحادثة K	تعني الحصول على عدد زوجي في كلا الرميتين

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	٥	٧	١٢
القسم الثاني	٨	١٤	٢٢
القسم الثالث	١٠	٦	١٦
المجموع	٢٣	٢٧	٥٠

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن يكون العامل متزوجا أو من القسم الأول
- احتمال أن يكون العامل من القسم الثالث أو أعزب

نفرض أن الحادثة **A1** أن يكون **العامل متزوجا** أي أن A1 = {أن يكون العامل متزوج}
نفرض أن الحادثة **A2** أن يكون **العامل من القسم الأول** أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

فيكون الإحتمال المطلوب:

P(A1)=27/50
P(A2)=12/50
P(A1 ∪ A2) =P(A1)+P(A2)-P(A1 ∩ A2) = (27/50)+(12/50)-(7/50) = 32/50= 0.64

نفرض أن الحادثة **A1** أن يكون **العامل من القسم الثالث** أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الثالث}

نفرض أن الحادثة **A2** أن يكون **العامل أعزب** أي أن A2 = {أن يكون العامل أعزب}

فيكون الإحتمال المطلوب:

P(A1)=16/50

P(A2)=23/50

P(A1 ∪ A2) =P(A1)+P(A2)-P(A1 ∩ A2) = (16/50)+(23/50)-(10/50) = 29/50= 0.58

مثال:

إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات 0.64 واحتمال نجاحه في مقرر الإحصاء ومقرر الرياضيات معا 0.32 فما هو احتمال نجاحه في مقرر الإحصاء؟ علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات.

الحل:

نفرض أن A_1={نجاح الطالب في مقرر الإحصاء}

A_2={نجاح الطالب في مقرر الرياضيات}

وبذلك يكون:

$P(A_2)=0.64$

$P(A_1 \cap A_2)=0.32$

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو حساب $P(A_1 \mid A_2)$ **وبتطبيق العلاقة :**

$$P(A_1 \mid A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.32}{0.64} = 0.5$$

إذا احتمال نجاح الطالب في مقرر الإحصاء علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات هو 0.5

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به فإذا سحب عاملان من المصنع مع الإرجاع (أي إرجاع العامل الأول قبل سحب العامل الثاني) احسب :

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	٥	٧	١٢
القسم الثاني	٨	١٤	٢٢
القسم الثالث	١٠	٦	١٦
المجموع	٢٣	٢٧	٥٠

اختير عاملان من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

١. احتمال أن يكون العاملان من القسم الأول؟

٢. احتمال أن يكون العاملان متزوجان؟

الحل:

١- احتمال أن يكون العاملان من القسم الأول يعني أن يكون العامل الأول من القسم الأول (الحادثة A1) والعامل الثاني من القسم الأول (الحادثة A2) وحيث أنهما مستقتان (لأن السحب مع الإرجاع) فإن:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times (P(A_2) = \frac{12}{50} \times \frac{12}{50} = \frac{144}{2500} = 0.0576$$

٢- احتمال أن يكون العاملان متزوجان ، يعني أن يكون العامل الأول متزوج (الحادثة B1) والعامل الثاني متزوج (الحادثة B2) وحيث أنهما مستقتان (لأن السحب مع الإرجاع) فإن:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times (P(B_2) = \frac{27}{50} \times \frac{27}{50} = \frac{729}{2500} = 0.2916$$

مثال:

إذا كان لدينا الحورف التالية a, b, c

كم عدد المرات التي يمكننا أن نرتب هذه الحروف

abc, acb, bac, bca, cab, cba

$$P_n^n = n! = (3)(2)(1) = 6$$

مثال:

حدد عدد الطرق الممكنة لاختيار ثلاث أشخاص من بين عشرة أشخاص تم ترشيحهم لعضوية مجلس إدارة إحدى الشركات.

الحل:

هنا نجد أن r=3 و n=10 وبالتالي :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!} = C_3^{10} = \frac{(10)(9)(8)}{3!} = \frac{720}{(3)(2)(1)} = \frac{720}{6} = 120$$

أي أنه توجد 120 طريقة لاختيار ثلاثة أفراد من بين عشرة مرشحين لعضوية مجلس الإدارة، لاحظ أن ترتيب اختيار المرشحين الثلاثة ليست له أهمية تذكر.

مثال:

حدد عدد الطرق الممكنة لاختيار ثلاث طلبة من بين عشرين طالبا لمنحهم ثلاث جوائز مختلفة.

الحل:

وحيث أن الجوائز مختلفة لذا فإن ترتيب الاختيار ضروري، وبالتالي تستخدم التباديل لتحديد عدد الطرق الممكنة، لاحظ وجود 20 طريقة لمنح الجائزة الأولى، و19 طريقة لمنح الجائزة الثانية، و 18 طريقة لمنح الجائزة الثالثة، أي أن الطرق الكلية (عدد التبديلات الكلية) لمنح الجوائز الثلاث لثلاث طلاب من عشرين طالبا هو:

$$P_r^n = n! = P_3^{20} = 20(19)(18) = 6840$$

مثال:

مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى ٢٠% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٣٥% والثالثة بنسبة ٤٥% ، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٢% و ٢,٥% و ٣% ، سحبت وحدة عشوائيا من إنتاج المصنع فوجد أنها معيبة، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الأولى؟

٢- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الثانية؟

إذا أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الأولى إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.2\times0.02}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.152$$

واحتمال أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الثانية إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.35\times0.025}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.333$$

مثال:

مستشفى به أربعة أقسام، نسب عمال النظافة في هده الأقسام هي ٣٠% ، ٤٠% ، ٢٠% ، ١٠% على التوالي، إدا كانت نسب العمال المدخنين بهده الأقسام هي ١٥% ، ١٨% ، ١٢% ، ٩% على التوالي، أختير عامل عشوائيا فوجد أنه مدخن ، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن يكون العامل من القسم الأول؟

٢- أن يكون العامل من القسم الثاني؟

٣- أن لا يكون العامل من القسم الأول؟

الحل:

نفرض أن

A_1={أن يكون العامل من القسم الأول}	$P(B \mid A1)=0.15$	$P(A1)=0.3$
A_2={أن يكون العامل من القسم الثاني}	$P(B \mid A2)=0.18$	$P(A2)=0.4$
A_3={أن يكون العامل من القسم الثالث}	$P(B \mid A3)=0.12$	$P(A3)=0.2$
A_4={أن يكون العامل من القسم الرابع}	$P(B \mid A4)=0.09$	$P(A4)=0.1$

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{0.3\times 0.15}{(0.3\times 0.15)+(0.4\times 0.18)+(0.2\times 0.12)+(0.1\times 0.09)} = 0.3$$

واحتمال أن يكون العامل من القسم الثاني إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.4\times0.18}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.48$$

واحتمال أن لا يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1^c|B)=1-0.3=0.7$$

مثال:

يتلقى قسم شرطة فى المتوسط **5** مكالمات في الساعة فيكون احتمال تلقى مكالمتين في ساعة مختارة عشوائياً هو :

$$P(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= \frac{e^{-5}5^{x}}{x!} = \ , \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$= \frac{(25)(0.00674)}{(2)(1)} = 0.08425$$

مثال

احتمال أن تكون قيمة Z أكبر من ٢:

الحل:

حيث أن احتمال أن تكون Z أقل من صفر = ٠.٥٠٠٠ ومن الجدول احتمال Z في (٢،٠) = ٠.٤٧٧٢٥ اذن احتمال أن تكون قيمة Z أكبر من ٢ هي :

0.02275 = 0.47725 - 0.5000

مثال

- احتمال أن تقع Z بين صفر و 0.5.
- احتمال أن تقع Z بين 0.5 و 0.5-.

الحل:

من الرسم المساحة المظللة بين 0 و 0.5 تمثل احتمال أن تقع Z بين (0 و 0.5)، والمساحة المظللة إلى شمال (0 ويمين 0.5 -) هي احتمال أن تقع Z في الفترة (- 0, 0.5) .

واحتمال أن تقع Z في الفترة (0, 05) والمساحة المقابلة لقيمة Z = 0.19146 ،
كذلك احتمال أن تقع Z في الفترة (0, -0.5) = 0.19146

مثال

•قامت إحدى الشركات بإجراء اختبار للمتقدمين لشغل بعض الوظائف الشاغرة بها، فإذا علمت أن درجات هذا الاختبار تتبع توزيعا معتدلا وسطه الحسابي 500 وانحرافه المعياري 100 درجة وأن أحد الممتحنين قد اختير عشوائيا،

•ما هو احتمال أن تكون درجة المتقدم أكبر من 700؟

الحل:

إذا كانت X تمثل أي درجة لأي ممتحن، فإن X تتبع توزيعا معتدلا وسطه الحسابي 500 درجه وإنحرافه المعياري 100 درجه، وباستخدام المعادلة الخاصة بالدرجة المعيارية

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

نجد أن القيمة المعيارية Z للقيمة 700 هي :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{700 - 500}{100} = \frac{200}{100} = +2$$

مثال:

افترض أن إدارة المرور بالاحساء وضعت جهازا للرادار على طريق الدمام عند مدخل المبرز وذلك لضبط السيارات المسرعة في فترة معينة من اليوم، افترض أن X تمثل السرعة في الساعة للسيارات التي تمر بمدخل المبرز في فترة عمل الرادار، إذا كانت X تتوزع توزيعا معتدلا وسطه الحسابي 60 ميلا وتباينه 25 ميلا، أوجد التالي:

- نسبة السيارات التي تقل سرعتها عن 50 ميلا في الساعة .

الحل:

١- نسبة السيارات التي تقل سرعتها عن ٥٠ ميلا في الساعة :

$$P(X<50)=P(\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{50-60}{\sqrt{25}})=P(Z<-2)=1-0.9772=0.0228$$

مثال:

أوجد نقطة القطع العليا للمتغير العشوائي t عندما تكون درجات الحرية 20 ومستوى الدلالة 0.95

الحل :

$$t_{(20,0.95)}=-t_{(20,0.05)}=1.725$$

مثال:

أخذت عينة عشوائية حجمها **144** بوسط مقداره **100** وانحراف معيارى مقداره **60** وبالتالي فإن فترة تقدير الوسط الحسابي للمجتمع بدرجة ثقة ٩٥% هي :

الحل:

$$\hat{\mu} = \overline{X} \pm 1.96 S_{\overline{X}}$$

$$= \overline{X} \pm 1.96 \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= 100 \pm 1.96 \frac{60}{\sqrt{144}}$$

$$= 100 \pm 1.96(5)$$

$$= 100 \pm 9.8$$

مثال:

إذا كانت دخول الأفراد اليومية في إحدى دول العالم النامية تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 15$ دولاراً، فما هو حجم العينة المناسب لتقدير متوسط دخول الأفراد في هذه الدولة بحيث لا يتعدى الخطأ في تقدير متوسط الدخل اليومي 5 دولارات، وذلك بدرجة ثقة 99 % ؟

الحل :

بالتعويض بهذه القيم في المعادلة التي تحدد حجم العينة وهي : $n = \frac{Z^2\sigma^2}{(e)^2}$

فإن حجم العينة مقرباً لأقرب عدد صحيح هو :

$$n = \frac{(2.58)^2(15)^2}{5^2}$$
$$= \frac{(6.65)(225)}{25}$$
$$= \frac{1496.25}{25} = 59.85 \approx 60$$

مثال:

عينة عشوائية حجمها 144 ناخباً سحبت من إحدى المدن فوجد أن عدد المؤيدين في العينة لمرشح معين هو 60 ناخباً، أنشئ فترة تقدير لنسبة المؤيدين لهذا المرشح في المدينة كلها بدرجة ثقة 95 %.

الحل:

$$P = 0.42 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.42 \times 0.58}{144}}$$

$$= 0.42 \pm (1.96)(0.0411)$$

$$= 0.42 \pm 0.08$$

$$\therefore P\begin{cases} 0.34 \\ 0.50 \end{cases}$$

مثال:

أفترض أن شركة ترغب في اختبار ما إذا كان يمكنها الادعاء بأن متوسط عمر المصباح من إنتاجها هو 1000 ساعة احتراق. وأنها قامت بأخذ عينة عشوائية حجمها $n = 100$ من إنتاجها فوجدت أن متوسط العينة $\bar{X} =$ 980 ساعة والانحراف المعياري للعينة $s = 80$ ساعة.

فإذا أرادت الشركة القيام بالاختبار عند مستوى معنوية 5%، فعليها القيام بالتالي:

.

الحل:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{80 / \sqrt{100}} = \frac{-20}{8} = -2.5$$

مثال على اختبار Z :

إذا كان متوسط استهلاك الفرد السعودي من الدجاج حسب تقارير وزارة الصحة هو (١٢) كيلوجرام بانحراف معياري (٦) كيلوجرامات لفترة السبعينات الميلادية. أجرى أحد الباحثين دراسة في عام ٢٠٠٣م من عينة قوامها (٤٩) فرداً ووجد أن متوسط الاستهلاك للفرد هو (١٤) كيلوجرام. هل تشير الدراسة الحالية أن متوسط الاستهلاك أرتفع عما عليه في السبعينات.

الحل:

١) فرض العدم والفرض البديل.

فرض العدم: $H_0: \mu=12$

الفرض البديل: $H_1: \mu>12$

٢) مستوى الدلالة =(0.05):

٣) إحصائية الاختبار (Z):

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{14-12}{6/\sqrt{49}} = 2.33$$

مثال :

أراد باحث أن يعرف أثر برنامج التدريب الصيفي في الميدان على أداء الطلاب وتحصيلهم في كلية العلوم الإدارية، ولغرض تحقيق ذلك قام الباحث باختبار الطلاب قبل وبعد البرنامج التدريبي، ولكون نفس الطلاب أخذوا الاختبارين، فإن الباحث يتوقع معامل ارتباط موجب بين تحصيل الطلبة في كلا القياسين. ولغرض اختبار مدى دلالة الفروق بين الاختبار القبلي والاختبار البعدي، لا بد على الباحث أن يتأكد من قيمة الارتباط بين الاختبارين والتي كانت $r = 0.46$ ، وقد كانت النتائج التي تم التوصل إليها كما يلي :

الإختبار القبلي	الإختبار البعدي
n_1 = ١٠٠	n_2 = ١٠٠
$\overline{X_1}$ = ٥٤,٢٨	$\overline{X_2}$ = ٥٨,٦٦
S_1^2 = ٤٩	S_2^2 = ٦٤

فهل تدل هذه البيانات على أن أداء الطلاب التحصيلي في الكلية بعد أخذ البرنامج التدريبي كان أفضل من أدائهم قبل أخذ البرنامج التدريبي عند مستوى α = ٠.٠٥ ؟

الحل :

سيتم اختبار الفرضيات التالية :

الفرضية الصفرية : لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسط تحصيل الطلاب قبل وبعد البرنامج التدريبي ($\mu_1=\mu_2$).

الفرضية البديلة : توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسط تحصيل الطلاب قبل وبعد البرنامج التدريبي ($\mu_1 \neq \mu_2$)

مستوى الدلالة : $\alpha = ٠.٠٥$

منطقة الرفض : قيمة مستوى الدلالة $\alpha = ٠.٠٥$ والاختبار بذيلين، ودرجات الحرية = ١٠٠-١= ٩٩ ، بذلك تكون قيمة (ت) الجدولية = ١.٩٨٠

القرار :

قيمة (ت) المحسوبة (٥.٥٧) أكبر من قيمـــة (ت) المجدولة (١.٩٨٠) .عند مستوى دلالة α = ٠.٠٥ .

∴ نرفض الفرضية الصفرية ونقبل البديلة، أي أن للبرنامج التدريبي تأثير إيجابي على تحصيل الطلاب وأدائهم في الكلية وذلك عند مستوى دلالة α.٠٥

مثال:

إذا عرف أن تباين قوة مقاومة الكسر للكابلات التي تنتجها إحدى الشركات لاتزيد عن 40000 ، وتستخدم الشركة الآن طريقة إنتاج جديدة يعتقد أنها ستزيد من تباين قوة مقاومة الكابلات للكسر، سحبت عينة عشوائية من عشرة كابلات فوجد تباينها يساوي 50000 .

بافتراض أن قوة مقاومة الكسر للكابلات تتبع التوزيع المعتدل، اختبر الفرض القائل بوجود زيادة معنوية في التباين عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

وحيث أن قيمة χ^2 لاختبار تباين المجتمع يتم حسابها كالتالي :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{(10-1)50000}{40000} = \frac{(9)50000}{40000} = \frac{450000}{40000} = 11.25$$

وحيث أن قيمة χ^2 المحسوبة أقل من قيمة χ^2 المجدولة، فإننا بالتالي نقبل الفرضية الصفرية H_0 عند مستوى دلالة 0.01 وبالتالي يمكننا القول أن بيانات العينة تدل على أن الزيادة الظاهرة في التباين ليست معنوية عند مستوى الدلالة المحدد ، والشكل التالي يوضح ذلك.

.

مثال:

اختار أحد الباحثين عينة حجمها n=800 شخصا من أحد القبائل، وكان توزيعهم حسب فصيلة الدم كالتالي:

فصيلة الدم	A	B	AB	O
عدد الأشخاص (التكرار المشاهد)	200	150	100	350

.

القرار:

ونلاحظ أن $\chi_0^2 > \chi_\alpha^2(\nu)$ لذا سوف نرفض فرضية العدم وبالتالي فإن توزيع فصيلة الدم في القبيلتين مختلف