جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

اسم المقرر

التحليل الإحصائي

استاذ المقرر

المحاضر/ محمد بن فهد الحنيف

المحاضرة الأولى

المجموعات

تعريف المجموعة:

المجموعة ببساطة هي تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماماً. وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شئ آخر.

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل:

$$A, B, C, ---$$

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل:

$$a, b, c, ---$$

الانتماء:

يستخدم الرمز ϵ "ينتمي إلى" ليبين عناصر المجموعة ، فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصرا من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \notin A$

ملاحظة : تعد دراسة المجموعات ذات أهمية كبيرة في دراسة العلاقات والدوال.

أمثلة على المجموعات:

مثال:

$A=\{a, b, c, d\}$

أي أن المجموعة A تتكون من العناصر a و b و c و d

$b \in A$

أي أن العنصر b ينتمي إلى المجموعة A

$f \notin A$

أي أن العنصر f لا ينتمي إلى المجموعة A

طرق كتابة المجموعات:

١- طريقة العد (سرد العناصر):

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة "،"

مثل:

$$A = \{1,3,5,7\}$$

$$B = \{a, b, c, d\}$$

$$C = \{1,2,3,\cdots\}$$

بحيث لا يتم تكرار العناصر

طرق كتابة المجموعات:

٢- طريقة القاعدة (الصفة المميزة):

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ، فمثلاً :

A={x: عدد طبيعي زوجي x }

B={x:كلية بجامعة الملك فيصل x}

C={x: طالب مسجل بالمقرر الحالي x}

D={x: 0≤x ≤12 ،عدد صحيح X}

مثال على طرق كتابة المجموعات:

فمن خلال رمي حجر نرد مرتين نستطيع أن نعبر عن الحادثة (الحصول على مجموع يساوي ٧) من خلال التالي:

– طريقة سرد جميع العناصر وبينهما فاصلة كالتالي:

$$A=\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

-ويمكن أن نعبر عن الحادثة نفسها بطريقة الصفة المميزة و هي كتابة مميزات العناصر بين القوسين {} عوضا عن كتابة العناصر نفسها كالتالي:

- $A=\{ (x,y) : x + y = 7 \}$

إذا المجموعة بشكل عام يمكن أن تكتب بميزة عناصرها بأشكال مختلفة طالما كانت الميزة كافيه لتحديد العناصر بشكل دقيق.

أنواع المجموعات:

١- المجموعة الخالية:

وهي مجموعة الأعداد الصحيحة التي بين العددين ١، ٠ مجموعة خالية، أيضا مجموعة أسماء الأسماك التي تتحدث اللغة العربية مجموعة خالية بالتأكيد. ويرمز للمجموعة الخالية بالرمز $\emptyset$ أو بقوسين { }.

A={x: عدد طبيعي زوجي وفردي x }

B={x: دولة عربية تقع في اوروبا x }

أنواع المجموعات:

٢- المجموعة المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات منتهية

$$A = \{2,4,6,8\}$$

$$B = \{1,2,3,..,100\}$$

$$C = \{x, y, z, w, u\}$$

أنواع المجموعات:

٣- المجموعة غير المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات غير منتهية

A={x: عدد طبيعي فردي x }

$$B = \{10, 20, 30, ...\}$$

أنواع المجموعات:

٤- المجموعة الشاملة:

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية منها، ويرمز لها بالرمز U.

أنواع المجموعات:

٥- المجموعة الجزئية:

فنقول عن مجموعة A أنها مجموعة جزئية subset من مجموعة B إذا كان كل عنصر ينتمي إلى A ينتمي إلى B ونعبر عن هذا بكتابة

فإذا كانت $A \subset B$ وكانت $A \neq B$ قلنا أن A جزئية فعلية proper subset من B أو A محتواه في B أو المجموعة B تحتوي A

أما إذا كانت A=B فإن كل عنصر ينتمي إلى أحدهما ينتمي للأخرى وبالتالي $A \subset B$ و $B \subset A$

أنواع المجموعات:

أمثلة:

x. إذا كانت $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

فان $A\subset B$

٢. مجموعة جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

أنواع المجموعات:

٦- تساوي المجموعات:

تكون المجموعتان A ،B **متساويتان** إذا كانت

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

مثال:

$$\{-1,+1\} = \{x : x^2 = 1\}$$

{س، ل، م} ≠ {x : x حرف من كلمة سلام }

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصورة $A \equiv B$

أنواع المجموعات:

مثال:

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية؟

$$1)\ A=\{1,3,5,7\}\ ,\ B=\{3,1,5,7\}$$

$$2)\ A=\{0,1,2\}\ \ ,\ \ B=\{a,b,c\}$$

الحل:

$$1)\quad A=B$$

$$2)\quad A\equiv B$$

العمليات على المجموعات:

- **الاتحاد**

اتحاد المجموعتين A ، B $(A \cup B)$ هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما. مثال :

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cup B)$ = {1, 2, -6, -7, -11}

العمليات على المجموعات:

- **التقاطع**

تقاطع المجموعتين A ، B $(A \cap B)$ هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً. أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال على ذلك:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$A \cap B$ = {-6, -7}

العمليات على المجموعات:

- **المكملة أو المتممة:**

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A. أي أن

مثال:

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

A={1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

B={1, 2, 3, 6, 8, 11, 12, 14, 16}

$\overline{A}$ **={2, 4, 6, 20}**

$\overline{B}$**={4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20}**

العمليات على المجموعات:

- **الفرق**

إذا كانت مجموعتان A، B فان A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة A وليست في B.أي أن

إذا كانت $A = \{1,2,3, x, y\}$ و $B = \{3,4,5, x, w\}$

فإن $A - B = \{1,2, y\}$

العمليات على المجموعات:

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

1) $A\cup B$

الحل:

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,x,y,w\}$$

العمليات على المجموعات:

مثال:

إذا كانت $A = \{1,2,3, x, y\}$ و $B = \{3,4,5, x, w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U = \{1,2,3,4,5, w, x, y, z\}$

فأوجد:

2) $A \cap B$

الحل:

$$A \cap B = \{3, x\}$$

العمليات على المجموعات:

مثال:

إذا كانت $A = \{1,2,3,x,y\}$ و $B = \{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U = \{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

3) $A - B$

الحل:

$$A - B = \{1,2,y\}$$

العمليات على المجموعات:

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

4) $\overline{A}$

الحل:

$$\overline{A}=\{4,5,w,z\}$$

العمليات على المجموعات:

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

5) $\overline{B}$

الحل:

$$\overline{B}=\{1,2,y,z\}$$

تدريبات

X. نفترض أن $A=\{3,4,5,x,y\}$ و $B=\{4,x,y,z\}$ ضع الرمز $\in$ أو $\notin$ في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة .

$(i)\quad 3$ ______________ A

$(ii)\quad 3$ ______________ B

$(iii)\quad x$ ______________ A

$(iv)\quad x$ ______________ B

$(v)\ z$ ______________ A

$(vi)\ z$ ______________ B

$(vii)\ 1$ ______________ A

$(viii)\ 1$ ______________ B

٤. اسرد عناصر كل مجموعة من المجموعات التالية . يمكن استخدام النقط للتعبير عن استمرار سرد عناصر المجموعة عندما يكون بها عدد لانهائي من العناصر

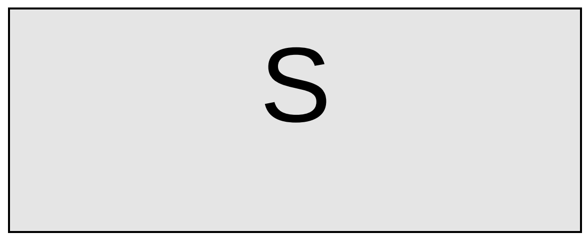
i. A={x: ٧ عدد طبيعي اصغر من x}
ii. B={x: ٢عدد طبيعي زوجي يقبل القسمة على x}
iii. C={y: h و c حرف من حروف الهجاء المحصور بين y}
iv. D={x: ١٧ عدد طبيعي فردي اصغر من x}

أشكالِ فنْ
VIN Figures

يمكن تمثيل المجموعات والعمليات المختلفة عليها من خلال استعمال اشكال هندسية تسمى أشكالِ فنْ وذلك وفق ما يلي:

١- المجموعة الشاملة:

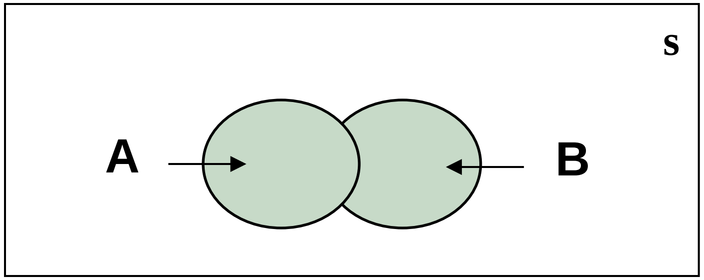
تمثل المجموعات الكلية بمستطيل ويرمز لها بالرمز S



S

٢ – إتحاد الحوادث Events Union :

لأي حادثتين A و B فإن الحادثة التي تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B أو إلى كليهما معا يطلق عليها إتحاد حادثتين ويرمز لها $(A \cup B)$ أو (A أو B) والشكل التالي يوضح ذلك:



شكل فِنْ لتمثيل إتحاد حادثتين A و B

$$(A \cup B)$$

وبشكل عام لأي n حادثة An .... ,A1 , A2, A3 فإن إتحاد هده الحوادث هو :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots\ldots \cup_n$$

ويمكن القول أن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ هو حدث يقع إذا وقع أحد هذه الحوادث Ai على الأقل وهو ما يطلق عليه جمع الأحداث

فالإتحاد ∪ يعني اتحاد المجموعتين A و B وهو مجموع العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين دون تكرار العناصر.

مثال:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cup B)$ = {1, 2, -6, -7, -11}

خواص العمليات الجبرية لإتحاد الحوادث:

- إدا كانت A و B و C ثلاث حوادث فإن :

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

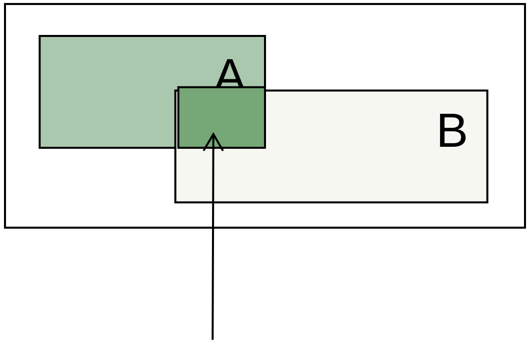
ويعني ذلك توزيع الإتحاد على التقاطع.

- وكذلك هناك خاصية التبديل والتي تعني أن

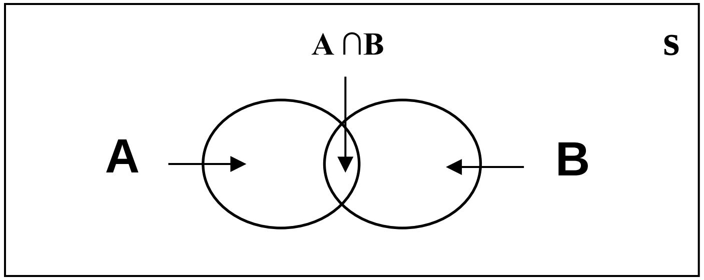
$$(A\cup B)=(B\cup A)$$

٣- تقاطع الحوادث Events Intersection :

لأي حادثتين A و B فإن الحادثة التي تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى A و B أو إلى كليهما معا في نفس الوقت يطلق عليها تقاطع حادثتين ويرمز لها $(A \cap B)$ أو (A و B) وباستخدام أشكال ِفنْ يكون الجزء المحدد بـ A and B هو الذي يمثل تقاطع الحادثتين :



$(A \cap B)$



شكل ِفنْ لتمثيل تقاطع حادثتين A و B

وبشكل عام لأي n حادثة **A1 , A2, A3, ... An** فإن تقاطع هده الحوادث هو :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots\ldots \cap_n$$

ويمكن القول أن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ هو حدث يقع إذا وفقط وقعت كل الحوادث **Ai** على الأقل وهو ما يطلق عليه ضرب الحوادث

تقاطع الحوادث Events Intersection :

فالتقاطع $\cap$ إذاَ هو مجموعة العناصر المشتركة بين مجموعتين أو أكثر.

مثال:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cap B)$ = {-6, -7}

خواص العمليات الجبرية لتقاطع الحوادث:

- إدا كانت A و B و C ثلاث حوادث فإن :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

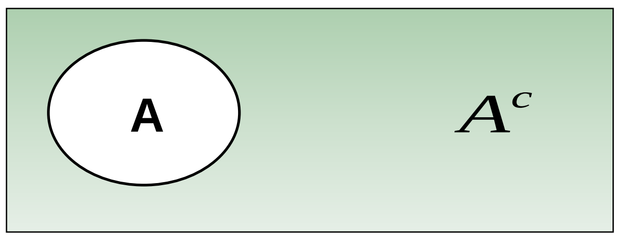
ويعني دلك توزيع التقاطع على الإتحاد.

- وكذلك هناك خاصية التبديل والتي تعني أن

$$(A \cap B) = (B \cap A)$$

٤ – الحادثة المتممة Complementary Event :

لأي حادثة A فإن متممتها هي الحادثة التي تتضمن كافة العناصر التي لا تنتمي إلى A ويرمز لها بالرمز A^c أو $\overline{A}$ وهو حدث يتألف من جميع عناصر Ω غير المنتمية إلى A وباستخدام أشكالِ فنْ فإن الجزء المظلل يمثل الحادثة المتمة :



$$\overline{A} \quad A^c$$

شكل ِفنْ لتمثيل مكملة الحادثة A

مثال:

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

A={1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

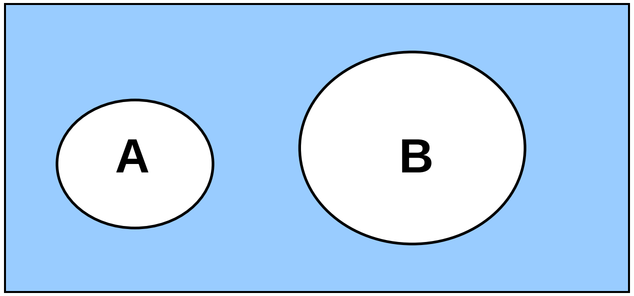
B={1, 2, 3, 6, 8, 11, 12, 14, 16}

$\overline{A}$ **={2, 4, 6, 20}**

$\overline{B}$ **={4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20}**

٥–الحوادث المتنافية Mutually Execlusive Events :

الحادثتان A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كان تقاطعهما خاليا أي أن $A \cap B = \phi$
ويمكن القول أيضا أن $A \cap A^c = \phi$ ، وباستخدام أشكالٍ فنْ فإن الحادثتان المنفصلتان يمثلان بالشكل التالي :



$$A \cap B = \phi$$

$$A \cap A^c = \phi$$

شكل ِفنْ لتمثيل حادثتان متنافيتان A و B

بعض العلاقات المهمة

$$A \cup A^c = S$$

$$\overline{B \cup A} = \overline{B} \cap \overline{A}$$

$$A \cap A^c = \phi$$

$$\overline{B \cap A} = \overline{B} \cup \overline{A}$$

$$\overline{S} = \phi$$

إذا كانت $A \subset B$ فإن:

$$\overline{\phi} = S$$

$$A = A \cap B$$

$$A \cup S = S$$

$$B = A \cup B$$

$$\overline{B} \subset \overline{A}$$

$$A \cap S = A$$

$$A \cap \phi = \phi$$

يراد شراء ثلاثة أنواع من اللحوم من جزار معين، فإذا رمزنا للحم الدجاج بـ A ولحم الضأن بـ B ، ولحم العجل بـ C فإن :

– توفر أنواع اللحوم الثلاثة يعني توفر لحم A و B و C أي بمعنى : $A \cap B \cap C$

– عدم توفر أي نوع من اللحوم يعني عدم توفر A و B و C أو كلها أي بمعنى :

$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

– توفر نوع واحد من اللحوم على الأقل هو توفر A أو B أو C أو كلها أي بمعنى :

$$A \cup B \cup C$$

– توفر نوع A فقط يعني : $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

– توفر نوع واحد من اللحم يعني إما توفر A وعدم توفر النوعين الآخرين أو توفر B وعدم توفر النوعين الآخرين ، أو توفر C وعدم توفر النوعين الآخرين أي بمعنى :

$$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

قذفت قطعة نقود معدنية ثلاث مرات، أوجد المجموعة الشاملة Ω وعدد عناصرها واكتب الحوادث التالية وعدد عناصر كل منها:

- الحادثة A ظهور صورة في الرمية الأولى.
- الحادثة B ظهور صورة واحدة على الأقل.
- الحادثة C ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية.

- الحادثة $(A \cap B)$
- الحادثة $(A \cup C)$
- الحادثة $(\overline{A} \cup \overline{B})$
- الحادثة $(A \cap \overline{B})$
- الحادثة $\overline{(A \cap B)}$

الحل :

المجموعة الشاملة Ω يمكن إيجاده من خلال حساب ظهور كل رمية مباشرة على النحو التالي:

$$\Omega = \{(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH), (TTT)\}$$

- الحادثة A ظهور صورة في الرمية الأولى:

$$A = \{(HHH), (HHT), (HTH), (HTT)\}$$

- الحادثة B ظهور صورة واحدة على الأقل.

$$B = \{(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH)\}$$

- **الحادثة C ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية.**
C = {(THH), (TTH)}

$(A \cap B)$ = {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT)}

$(A \cup C)$ = {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH)}

$(\overline{A} \cup \overline{B})$ = {(THH), (THT), (TTH), (TTT)}

$(A \cap \overline{B})$ = ϕ

$(\overline{A \cap B})$ = {(THH), (THT), (TTH), (TTT)}

أخيرا

شكرا لحسن متابعتكم

وتمنياتي لكم بالتوفيق

المحاضرة الثانية

طرق العد ونظرية الاحتمالات

تعريف الاحتمالات

يمكن تعريف الاحتمالات بطرق عديدة غير أن أبسطها

"هو مقياس لامكانية وقوع حدث (Event) معين"

وتستعمل كلمة احتمالات بشكل دائم في حياتنا اليومية مثل:

- احتمال أن ينجح الطالب في مقرر دراسي.
- احتمال نزول المطر اليوم

وفي أحيان أخرى تستخدم كلمة احتمالات كلمة مرادفة لبعض الكلمات الأخرى مثل: ممكن، غالبا، مؤكد، مستحيل ...

وقد ارتبط المفهوم التقليدي للاحتمال بألعاب الحظ لمدة طويلة، وتختلف درجة إمكانية تحقق أي حادثة من شخص إلى آخر حسب خبرته والمعلومات المتوفرة لديه عن الحادثة

وقد تطور علم الاحتمالات تطورا كبيرا وسريعا وأصبح أساسا لعلم الإحصاء وبحوث العمليات وغيرها.

١-التجربة العشوائية Random Experiment :

هي تلك التجربة التي تكون جميع نتائجها معلومة مسبقا ولكن لا يمكن التنبؤ بحدوث أي من هده النتائج بصفة مؤكدة مثلا:

رمي حجر نرد مرة واحدة يعتبر تجربة عشوائية، حيث نعلم جميع قيم نتائج التجربة وهي إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ولكن لا يمكن تحديد أي الأرقام يظهر إلى الأعلى بصورة مؤكدة قبل إجراء التجربة.

-رمي عملة معدنية مرة واحدة أو عدد من المرات يعتبر تجربة عشوائية معروف جميع نتائجها قبل أن تبدأ التجربة، ولكن لا يمكن الجزم بظهور أي منها في رمية معينة.

-المشاركة في سباق الخيل لحصان معين يعتبر تجربة عشوائية فهو إما أن يفوز أو يخسر أو يتعادل.

نستنتج من ذلك أنه في مثل هذه التجارب تكون النتائج التي نحصل عليها من تكرار للتجربة تتذبذب عشوائيا ومهما حاولنا التحكم بظروف التجربة فإن النتائج المتعاقبة ستتغير بشكل غير منتظم.

٢ –الحادث والفراغ العيني:

فراغ العينة هو المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز Ω ويطلق علية الحالات الممكنة Possible Cases

افترض أننا نقوم بإجراء تجربة ما كرمي زهرة النرد مثلاً ونلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الأوجه الستة ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم فردي أي ١ أو ٣ أو ٥ من التجربة . وهكذا فإن عملية رمي الزهرة تسمى **تجربة** **(Experiment)** وظهور رقم فردي هو محل اهتمامنا يسمى **حادثاً** **(Event)** ومجموعة جميع الحالات الممكنة الظهور تسمى **بالفراغ العيني** **(Sample Space)** ويلاحظ أن الحادث قد يكون حالة او اكثر من الفراغ العيني .

الحادثة هي مجموعة جزئية من فراغ العينة وتمثل مجموعة النتائج التي تحقق الحدث وتسمى أيضا الحالات المواتية Favorable Cases ، فمثلا الحصول على رقم زوجي في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة تكون الحادثة هي {٢ ، ٤ ، ٦} ، ويمكن أن تحتوي الحادثة على عنصر واحد أو أكثر.

أوجد فراغ العينة في كل من التجارب العشوائية التالية:

١. رمي عملة معدنية واحدة.
٢. رمي عملة معدنية مرتين.
٣. رمي حجر نرد مرتين.

الحل:

١- عند رمي عملة معدنية مرة واحدة جميع النتائج الممكن الحصول عليها إما صورة H أو كتابة T، فيكون بالتالي فراغ العينة :

$\Omega = \{H , T\}$

تابع الحل:

٢- عند رمي عملة معدنية مرتين تكون جميع النتائج الممكن الحصول عليها إما صورة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية أو صورة في الرمية الأولى وكتابة في الرمية الثانية أو كتابة في الرمية الأولى وصورة في الثانية أو كتابة في الأولى وكتابة في الثانية فيكون بالتالي فراغ العينة في هذه التجربة :

$$\Omega=\{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$$

تابع الحل:

٣- عند رمي حجر نرد مرتين (حجر النرد هو مكعب صغير كتب أو رسم على أوجهه الستة الأرقام من ١ إلى ٦) فتكون جميع النتائج الممكن الحصول عليها إما ظهور رقم ١ في الرمية الأولى ورقم ١ في الرمية الثانية أو رقم ١ في الرمية الأولى ورقم ٢ في الرمية الثانية وهكذا، فيكون بالتالي فراغ العينة في هده التجربة :

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

تابع الحل:

كما يمكننا كتابة فراغ العينة في تجربة رمي حجر النرد مرتين على شكل جدول كالتالي:

X,y	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

مثال

في تجربة **رمي عملة معدنية ثلاث مرات**، اكتب فضاء العينة لهذه التجربة وعبر عن الحوادث التالية:

- الحصول على H (صورة) مرة واحدة
- الحصول على H (صورة) مرتين
- الحصول على H (صورة) ثلاث مرات
- عدم الحصول على H (صورة)

الحل:

-عند رمي عملة معدنية ثلاث مرات فيكون بالتالي **فراغ العينة** :

Ω= {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

الحل:

-ويمكن الحصول على الحادثة **H (صورة) لمرة واحدة** ونرمز لها بالرمز A1 كالتالي:

$$A1 = \{HTT, THT, TTH\}$$

الحل:

- ويمكن الحصول على الحادثة **H (صورة) لمرتين** ونرمز لها بالرمز A2 كالتالي:

A2 ={HHT, HTH, THH}

الحل:

– ويمكن الحصول على الحادثة **H (صورة) ثلاث مرات** ونرمز لها بالرمز A3 كالتالي:

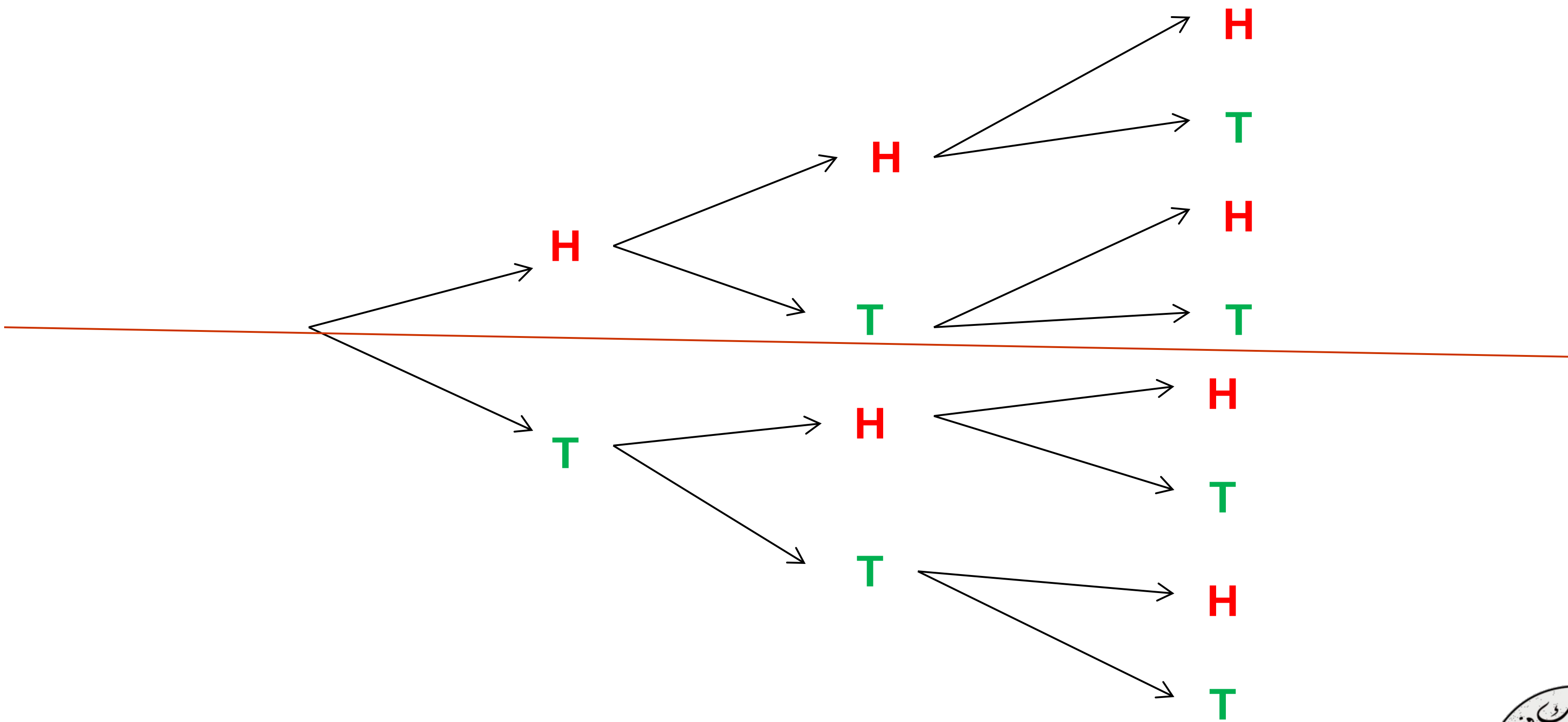
$$A3 = \{HHH\}$$

الحل:

- ويمكن **عدم الحصول** على الحادثة **H (صورة)** ونرمز لها بالرمز A4 كالتالي:

A4 ={TTT}

ويمكن من خلال استخدام **الرسم الشجري** معرفة فراغ العينة للمثال السابق (في تجربة رمي عملة معدنية ثلاث مرات) كالتالي:



مثال

في طريقك إلى الجامعة توجد إشارتا مرور، ما هو فضاء العينة لتجربة ذهابك إلى الجامعة؟

الحل:

نفترض أنه عندما تكون الإشارة خضراء نرمز لها بالرمز G وعندما تكون حمراء نرمز لها بالرمز R فيكون بالتالي فضاء العينة كالتالي:

$$\Omega=\{GG, GR, RG, RR\}$$

مثال

في تجربة رمي حجر نرد مرتين عبر عن الحوادث التالية بدلالة نقاط العينة والصفة المميزة؟

- A : الحصول على مجموع يساوي ٧
- B : الفرق بين العددين الناتجين يساوي القيمة المطلقة ١
- C : الحصول على مجموع يساوي ٩ على الأقل
- D : الحصول على ١ في الرمية الأولى
- E : الحصول على حاصل ضرب يساوي ٦ على الأكثر
- F : الحصول على مجموع أقل من أو يساوي ٢

الحل:

يمكننا كتابة فراغ العينة في تجربة رمي حجر النرد مرتين على شكل جدول كالتالي:

X,y	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

تابع الحل:

وإذا رمزنا للرمية الأولى بـ x والرمية الثانية بـ y فإنه يمكننا كتابة الحوادث المطلوبة في السؤال على النحو التالي :

أولا – الحصول على مجموع يساوي 7

– بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

$$A=\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

– بطريقة الصفة المميزة:

$$A=\{ (x,y) : x + y = 7 \}$$

تابع الحل:

الفرق بين العددين الناتجين يساوي القيمة المطلقة 1

- بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

B={(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)}

- بطريقة الصفة المميزة:

$B=\{ (x,y) : x - y = | 1 | \}$

تابع الحل:

الحصول على مجموع يساوي 9 على الأقل

- **بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):**

C={(4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (3,6). (6,4), (6,5), (6,6)}

- **بطريقة الصفة المميزة:**

$$C=\{ (x,y) : x + y \geq 9 \}$$

تابع الحل:

الحصول على الرقم 1 في الرمية الأولى

– **بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):**

$$D=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$$

– **بطريقة الصفة المميزة:**

$$D=\{ (x,y) : x = 1 \}$$

تابع الحل:

الحصول على حاصل ضرب يساوي 6 على الأكثر

- بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

E={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1), (1,6), (6,1), (5,1)}

- بطريقة الصفة المميزة:

$E=\{ (x,y) : x * y \leq 6 \}$

تابع الحل:

الحصول على مجموع أقل من أو يساوي 2

- **بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):**

$F=\{(1,1)\}$

- **بطريقة الصفة المميزة:**

$F=\{ (x,y) : x + y \leq 2 \}$

عبر بالكلمات عن كل الحوادث الممثلة بالمجموعات الجزئية التالية من نقاط العينة:

$G=\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$H=\{(1,1), (2,1), (1,2), (3,1), (2,2), (1,3)\}$

$I=\{(5,1), (1,5), (6,2), (2,6)\}$

$J=\{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4)\}$

$K=\{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

الحل:

الحادثة	التعبير بالكلمات عن الحوادث
الحادثة G	تعني الحصول على نفس العدد في الرمية الأولى والرمية الثانية
الحادثة H	تعني الحصول على مجموع رميتين أقل من (٥)
الحادثة I	تعني الحصول على فرق بين الرميتين يساوي (٤)
الحادثة J	تعني الحصول على (٤) في الرمية الثانية
الحادثة K	تعني الحصول على عدد زوجي في كلا الرميتين

3–الحالات الممكنة (Possible Cases)

هي الحالات أو النتائج المختلفة التي يمكن أن تظهر نتيجة لإجراء تجربة معينة، فمثلاً عند رمي قطعة عملة تكون نتيجتها صورة أو كتابة ،

وعند رمي زهرة نرد تكون نتيجتها ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ فيقال أن عدد الحالات الممكنة ٢ في حالة رمي قطعة العملة و ٦ في حالة رمي زهرة النرد.

4-الحالات المواتية (Favorable Cases)

هي النتائج او الحالات التي تؤدي إلى تحقيق الحادث الذي هو موضع اهتمامنا، فإذا كان الحادث هو الحصول على رقم فردي في حالة رمي زهرة النرد فإن الحالات التي تحقق هذا الحادث هي الحصول على ١ أو ٣ أو ٥ ، هذه الحالات الثلاثة تسمى الحالات المواتية.

٥-الحالات المتماثلة (Equally Likely Cases)

إذا كان لدينا عدة كرات معدنية مصنوعة من مادة واحدة متجانسة في الكثافة ولها نفس الوزن والحجم وضعناها في كيس وسحبنا كرة منها بعد خلطها جيداً فإن هذه الكرات تكون حالات متماثلة أي يكون لكل منها نفس النصيب في السحب.

٦-الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events)

يقال عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا. فمثلاً عند رمي عملة معدنية لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

٧-الحوادث المستقلة (Independent Events)

يعتبر الحادثين A أو B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الآخر. فمثلاً عند رمي قطعة عملة واحدة مرتين متتاليتين فإن نتيجة الرمية الثانية لا تتأثر بنتيجة الأولى.

٨-الحوادث الشاملة (Exhaustive Events)

تسمى الحوادث A ، B ، C ... حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لابد من حدوث إحداها عند إجراء التجربة.

فمثلاً عند اختيار طالب من الجامعة لمعرفة حالته ما إذا كان مدخنا أو غير مدخن تعتبر هذه الحالات حوادث شاملة لأنه لابد للفرد أن يكون له صفة واحدة من هذه الصفات. كذلك فإن الحصول على العدد ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ عند رمي حجر النرد تعتبر حوادث شاملة لأنه لابد من حدوث إحداها.

طرق العد

إن من المهم لحساب احتمال حدوث معين في تجربة ما هو أن نعرف عدد مرات حدوث هذا الحادث بالنسبة لعدد الاحتمالات الممكنة لتلك التجربة، وقد يكون من السهل عد الاحتمالات الممكنة ومرات حدوث ذلك الحادث في بعض التجارب كما في تجربة إلقاء حجر نرد أو قطعة نقد، إلا إنه في كثير من الأحيان يصعب فعل ذلك باستخدام العد لكل احتمال ممكن بعينه.. فيستلزم بالتالي أن نستخدم طرق رياضية لحساب عدد مرات الحدوث بدون الحاجة لمعرفة كل عنصر بالتحديد من عناصر مجموعتي الحادث والمجموعة الشاملة.

طريقة الضرب

إذا كانت التجربة E_1 تحدث في n من الطرق ومع كل طريقة من هذه الطرق كانت التجربة E_2 تحدث في m من الطرق فإن التجربتين تحدثان معا في $n \times m$ من الطرق.

طريقة الضرب

مثال: إذا كان هنا طريقان يمكن أن يستخدمهما المسافر من الأحساء إلى الرياض، و 3 طرق مختلفة يمكن أن يستخدمها المسافر من الرياض إلى مكة المكرمة

فإن عدد الطرق التي يمكن أن يستخدمها المسافر من الأحساء إلى مكة المكرمة مرورا بالرياض هي:

طريقة الضرب

السفر من الأحساء إلى الرياض: E_1 ويحصل في عدد من الطرق مقداره:

$$n = 2$$

السفر من الرياض إلى مكة المكرمة: E_2 ويحصل في عدد من الطرق مقداره:

$$m = 3$$

طريقة الضرب

إذاً عدد الطرق للسفر من الأحساء إلى مكة المكرمة مرورا

بالرياض:

$$n \times m = 2 \times 3 = 6$$

طريقة الضرب

مثال: إذا فرض أن بإمكان طالب أن يسجل 3 مقررات هذا الفصل، بحيث يختار مقرر من قسم المحاسبة من بين 4 مقررات متاحة، ويختار مقرر واحد من قسم التمويل من بين 3 مقررات متاحة، ومقرر واحد من قسم إدارة الأعمال من بين مقررين متاحين.

طريقة الضرب

عدد الطرق لاختيار هذه المقررات الثلاثة:

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

طريقة الجمع

إذا كانت تجربتان مانعتين لبعضهما البعض وكانت الأولى تحدث في n من الطرق وكانت الثانية تحدث في m من الطرق فإن واحدة منهما أو الأخرى تحدث في $n + m$ من الطرق.

طريقة الجمع

مثال: إذا فرض أن طالبا من كلية العلوم الإدارية متاح له أن يسجل مقرر واحد فقط من كلية التربية كمتطلب للتخرج بحيث يختاره حسب اختياره من بين الأقسام العلمية في الكلية المتاحة له. ما عدد الطرق لاختيار هذا المقرر إذا علمت أن المقررات المتاحة له كالآتي:

طريقة الجمع

م	القسم	عدد المقررات المتاحة
1	الدراسات الإسلامية	3
2	اللغة العربية	4
3	اللغة الإنجليزية	2
4	علم النفس	1

عدد الطرق لاختيار مقرر من بين هذه المقررات هو:

$$3 + 4 + 2 + 1 = 10$$

المضروب

عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها n من الأشياء ويرمز له بالرمز $n!$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \ldots \ldots \ldots . \times 3 \times 2 \times 1$$

ملاحظة:

$$0! = 1$$

ملاحظة:

$$\begin{aligned} n! &= n \times (n-1)! \\ &= n \times (n-1) \times (n-2)! \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)! \end{aligned}$$

المضروب

أمثلة

$$2! = 2 \times 1 = 2$$
$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$
$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$
$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$
$$\begin{aligned} 5! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 5 \times 4! \\ &= 5 \times 4 \times 3! \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 2! \\ &= 120 \end{aligned}$$

المضروب

أمثلة

$$\frac{7!}{6!} = \frac{7 \times 6!}{6!} = 7$$

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

التباديل

هي ترتيب جميع عناصر أو جزء من عناصر أي مجموعة.

ويرمز له بالرمز: P

والتباديل يأخذ صورا مختلفة يمكن تصنيفها كالآتي:

(أ) ترتيب n من الأشياء المميزة مأخوذة سويا(جميعها):

$$P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$$

التباديل

مثال: ترتيب الحروف: a, b, c

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba$$

$$P(n, n) = n! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

مثال: ترتيب ستة أشخاص على ستة كراسي:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

التباديل

(ب) ترتيب n من الأشياء المميزة مأخوذة r في كل مرة حيث:

$r \leq n$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف:

a, b, c, d, e

التباديل

$$P(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4$$

$$= 20$$

طريقة أخرى:

$$P(5,2) = 5 \times 4 = 20$$

التباديل

ولتوضيح ذلك أكثر:

$$P(100,3) = 100 \times 99 \times 98 = 970200$$

$$P(32,4) = 32 \times 31 \times 30 \times 29 = 863040$$

مثال: ترتيب 4 من الأشخاص على 6 كراسي في خط أفقي:

$$P(6,4) = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360$$

التباديل

(جـ) ترتيب n من الأشياء التي من بينها n_1 عنصرا متماثلا، و n_2 عنصرا متماثلا، و n_3 عنصرا متماثلا...إلخ:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \ldots}$$

التباديل

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة:

$$Statistics$$

$$\frac{10!}{3!\times 3!\times 2!\times 1!\times 1!}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3!}{3!\times 3!\times 2!\times 1!\times 1!}$$

$$=10\times 9\times 8\times 7\times 5\times 2$$

$$=50400$$

السحب مع الإرجاع

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب رقم مكون من عشر خانات من بين الأعداد:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

الخانة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الخيارات الممكنة	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠

$$10^{10} = 10,000,000,000$$

السحب مع الإرجاع

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب رقم مكون من ثلاث خانات من

بين الأعداد:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

الخانة	١	٢	٣
الخيارات الممكنة	١٠	١٠	١٠

$$10^3 = 1,000$$

السحب بدون إرجاع:

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب رقم مكون من عشر خانات مختلفة

من بين الأعداد:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

الخانة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الخيارات الممكنة	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 3628800$$

السحب مع الإرجاع

مثال: بكم طريقة يمكن ترتيب رقم مكون من ثلاث خانات مختلفة

من بين الأعداد:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

الخانة	١	٢	٣
الخيارات الممكنة	١٠	١٠	١٠

$$P(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

التوافيق

التوافيق: هي الطرق التي نختار بها عددا معينا من عناصر مجموعة معينة دون النظر إلى الترتيب. ويرمز له بالرمز:

$$C(n,r)$$

ويتم حسابه باستخدام العلاقة التالية:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

التوافيق

مثال: ما عدد الطرق التي نختار بها حرفين من الحروف:

$$a, b, c$$

الحل:

$$ab, ac, bc$$

$$C(n,r) = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2!}{2! \times 1!} = 3$$

التوافيق

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار 4 طلاب من بين 20 طالبا لإعفاءهم من دخول الاختبار؟

$$C(20,4) = \frac{20!}{4! \times 16!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4!}$$

$$= 4845$$

التوافيق

مثال: إذا فرض أن طالبا يحق له تسجيل 5 مقررات هذا الفصل من بين 8 مقررات متاحة له، فبكم طريقة يمكنه اختيار هذه المقررات الخمسة؟

الحل:

$$C(8,5) = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

التوافيق

ملاحظات:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = n,$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad , \quad \binom{n}{n} = 1$$

التوافيق

مثال: احسب قيمة كلا مما يلي:

$$\binom{12}{1} = 12$$

$$\binom{20}{20} = 1$$

$$\binom{23}{23} = 1$$

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \binom{9}{6}$$

المحاضرة الثالثة

نظرية الاحتمالات

ترتبط كلمة احتمال دائما بذكر حدثا ما، فاحتمال وقوع حدث معين هو نسبة وقوع هذا الحدث في الأجل الطويل، فعندما نقول إن احتمال الحصول على وحدة معيبة من إنتاج إحدى الآلات هو 0.08 ، فإننا نعني بذلك أن 8 في المئة من إنتاج هذه الآلة في الأجل الطويل سيكون معيبا، ونحن لا نستطيع ضمان وجود نسبة معينة من الوحدات المعيبة بالضبط في أي 100 وحدة من إنتاج هذه الآلة، ولكننا نتوقع أن نجد نسبة معينة في المئة من إنتاج هذه الآلة معيبا إذا فحصنا عددا كبيرا وكافيا من إنتاجها.

وللإحتمالات تعريفات عدة سنتعرض لها فيما يلي:

تعريف الاحتمالات

التعريف النسبي للاحتمالات Rational Probability Definition :

عند إجراء تجربة عدد N من المرات وكان A حدثا عشوائيا متعلقا بهده التجربة فإن التكرار النسبي يعرف على أنه حاصل قسمة عدد مرات حدوث الحادثة A مقسوما على عدد مرات حدوث التجربة أو بمعنى :

$$f_N(A) = \frac{N_A}{N_\Omega}$$

أي أن التكرار النسبي لـ A يساوي تكرار A مقسوما على التكرار الكلي.

$0 \leq f_N(A) \leq 1$ التكرار النسبي لـ A أكبر من أو يساوي (صفر) وأصغر من أو يساوي (١)

$f_N(A) = 1$ إدا وفقط إدا وقع الحدث A في N مرة أجريت فيها التجربة.

$f_N(A) = 0$ إدا وفقط إدا لم يقع الحدث A في N مرة أجريت فيها التجربة.

إدا كان A و B حادثتان متنافيتان فإن $f_N(A \cup B) = f_N(A) + f_N(B)$

إن التكرار النسبي $f_N(A)$ لحادثة A يأخذ قيمة ثابتة إدا زاد عدد محاولات التجربة عن عدد معين ، ويكون في العادة العدد كبير، وهدا ما نسميه إحتمال وقوع الحادثة A .

مثال:

إذا أخدنا التجربة العشوائية رمي قطعة نقود عدة مرات وتسجيل عدد مرات ظهور الحادثة الحصول على صورة H وكررنا التجربة لعدد من المرات سجلت النتائج في الجدول التالي:

عدد الرميات الكلي N	عدد مرات ظهور الصورة H	التكرار النسبي
30	12	12 / 30
50	20	20 / 50
80	38	0.475
100	49	0.49
300	150	0.5
500	250	0.5
1000	500	0.5
1500	750	0.5

نلاحظ أنه كلما زاد عدد الرميات N فإن التكرار النسبي يختلف اختلافا بسيطا حتى تستقر عند قيمة معينة 0.5 وهدا يوضح لنا تعريف الاحتمال وفق مفهوم التكرار النسبي.

التعريف التقليدي للاحتمالات Classical Probability Definition :

لأي حادثة A فإن احتمال حدوثها يمثل نسبة عدد حالات ظهورها إلى عدد حالات ظهور فراغ العينة الكلي أي بمعنى:

$$\text{أي أن} \quad \frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

$$P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega}$$

وللتعريف التقليدي للاحتمال عدد من المسلمات وهي :

قيمة أي احتمال أكبر من أو يساوي صفر، بمعنى أنه لأي حادثة A فإن $P(A) \geq 0$

قيمة احتمال فراغ العينة يساوي واحد صحيح $P(\Omega) = 1$

إذا كانت A1 و A2 حادثتين متنافيين أو منفصلين بمعنى $A_1 \cap A_2 = \phi$ فإن

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

ويمكن القول بشكل عام لأي n حادثة منفصلة :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \ldots + P(A_n)$$

مثال:

رمي حجر نرد مرد واحدة ، أحسب التالي:

- احتمال الحصول على رقم ٥
- احتمال الحصول على رقم زوجي
- احتمال الحصول على رقم أكبر من ٢
- احتمال الحصول على رقم أقل من ٧
- احتمال الحصول على رقم ٧

الحل:

فراغ العينة لهذه التجربة هو : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فيكون بالتالي الحل كما يلي:

$P(A=5)=1/6$

$P(A=2,4,6)=3/6$

$P(A>2)=4/6$

$P(A<7)=6/6=1$

$P(A=7)=0/6=0$

ويستنتج من ذلك أن أقل قيمة للاحتمال تساوي الصفر ويقال أن الحدث في هده الحالة (حدث مستحيل) بينما تساوي واحد إذا كان الحدث مؤكد.

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	٥	٧	١٢
القسم الثاني	٨	١٤	٢٢
القسم الثالث	١٠	٦	١٦
المجموع	٢٣	٢٧	٥٠

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

- أن يكون أعزبا
- أن يكون متزوجا
- أن يكون من القسم الأول
- أن يكون من القسم الأول أو الثاني
- أن يكون من القسم الأول وأعزب

الحل:

نفرض أن الحادثة **A** أن يكون **العامل أعزب** أي A = {أن يكون العامل أعزب} فيكون الإحتمال المطلوب:

$$P(A)= \frac{\text{عدد العمال العزاب}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 23/50= 0.46$$

نفرض أن الحادثة **B** أن يكون **العامل متزوج** أي أن B = {أن يكون العامل متزوج} فيكون الإحتمال المطلوب:

$$P(B)= \frac{\text{عدد العمال المتزوجين}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 27/50= 0.54$$

نفرض أن الحادثة **C** أن يكون **العامل من القسم الأول** أي أن C = {أن يكون العامل من القسم الأول} فيكون الإحتمال المطلوب:

$$P(C)= \frac{\text{عدد عمال القسم الأول}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 12/50= 0.24$$

نفرض أن الحادثة **D** أن يكون **العامل من القسم الأول أو الثاني** أي أن D = {أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني} فيكون الإحتمال المطلوب:

$$P(D) = \frac{\text{عدد عمال القسم الأول أو الثاني}}{\text{عدد العمال الكلي}} = (12+22)/50 = 34/50 = 0.68$$

نفرض أن الحادثة **E** أن يكون **العامل من القسم الأول و أعزب** أي أن E = {أن يكون العامل من القسم الأول وأعزب} فيكون الإحتمال المطلوب:

$$P(E) = \frac{\text{عدد عمال القسم الأول وعزاب}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 5/50 = 0.1$$

بدهيات الاحتمال

(1)احتمال وقوع الحادث الأكيد يساوي واحداً:

$$P(S) = 1$$

(2) احتمال وقوع الحادث المستحيل يساوي صفراً:

$$P(\emptyset) = 0$$

بدهيات الاحتمال

(3)إذا كان الحادث A مجموعة جزئية من الفضاء العيني S فإن:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

(4)إذا كان A و B حادثين منفصلين بمعنى $P(A \cap B) = 0$

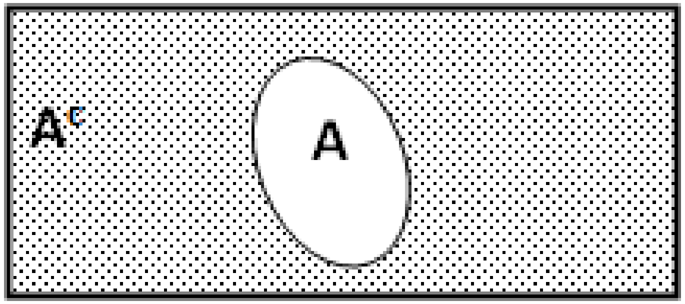
فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

نظريات الاحتمال

(1)إذا كانت A^c متممة الحادث A فإن:

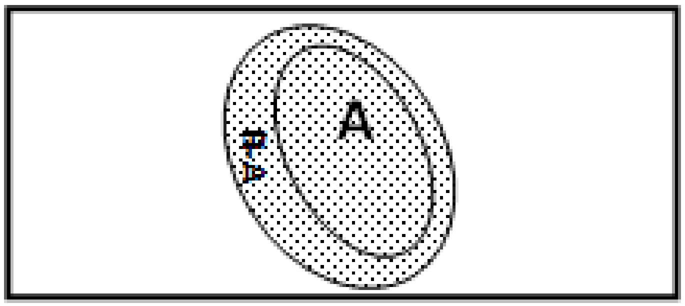
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



نظريات الاحتمال

(2)إذا كان $A \subset B$ فإن :

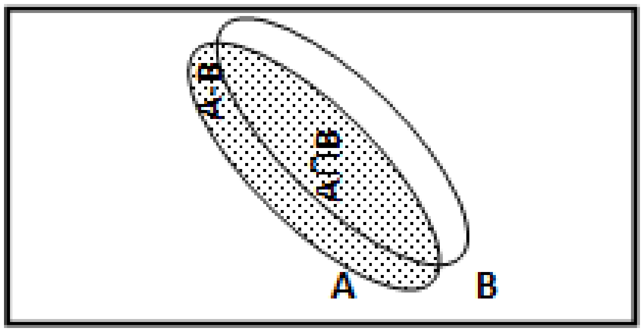
$$P(A) \leq P(B)$$



نظريات الاحتمال

(3)إذا كان A و B أي حادثين فإن:

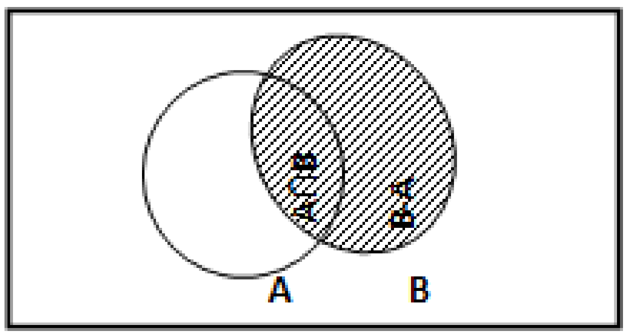
$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



نظريات الاحتمال

(4)إذا كان A و B أي حادثين فإن:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$



نظريات الاحتمال

مثال:أجري امتحانان في مادة الإحصاء على 100 طالب فنجح في الامتحان الأول 60 طالبا ونجح في الامتحان الثاني 40 طالبا ونجح في الامتحانين معا 20 طالبا. أوجد احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الأول واحتمال نجاح الطلاب في الامتحان الثاني واحتمال نجاح الطلاب في الامتحانين معاً؛ ثم أوجد احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الأول أو الامتحان الثاني.

نظريات الاحتمال

أولا نفرض:

نجاح الطلاب في الامتحان الأول $\equiv A$

نجاح الطلاب في الامتحان الثاني $\equiv B$

نجاح الطلاب في الامتحانين معا $\equiv A \cap B$

نجاح الطلاب في أحد الامتحانين $\equiv A \cup B$

نظريات الاحتمال

$$P(A) = \frac{60}{100}$$

$$P(B) = \frac{40}{100}$$

$$P(A \cap B) = \frac{20}{100}$$

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{60}{100} + \frac{40}{100} - \frac{20}{100}$$

$$= \frac{80}{100}$$

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	٥	٧	١٢
القسم الثاني	٨	١٤	٢٢
القسم الثالث	١٠	٦	١٦
المجموع	٢٣	٢٧	٥٠

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني.
- احتمال أن يكون العامل متزوجا أو من القسم الأول
- احتمال أن يكون العامل من القسم الثالث أو أعزب

الحل:

نفرض أن الحادثة **A1** أن يكون **العامل من القسم الأول** أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

نفرض أن الحادثة **A2** أن يكون **العامل من القسم الثاني** أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الثاني}

فيكون الإحتمال المطلوب:

$P(A1)=12/50$

$P(A2)=22/50$

$P(A1 \cup A2)$ $=P(A1)+P(A2)= (12/50)+(22/50) = 34/50= 0.68$

نفرض أن الحادثة **A1** أن يكون **العامل متزوجا** أي أن A1 = {أن يكون العامل متزوج}
نفرض أن الحادثة **A2** أن يكون **العامل من القسم الأول** أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

فيكون الإحتمال المطلوب:

$P(A1)=27/50$

$P(A2)=12/50$

$\mathbf{P(A1 \cup A2)} = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (27/50)+(12/50)-(7/50) = 32/50 = 0.64$

نفرض أن الحادثة **A1** أن يكون **العامل من القسم الثالث** أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الثالث}

نفرض أن الحادثة **A2** أن يكون **العامل أعزب** أي أن A2 = {أن يكون العامل أعزب}

فيكون الإحتمال المطلوب:

$P(A1)=16/50$

$P(A2)=23/50$

$\mathbf{P(A1 \cup A2)} = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (16/50)+(23/50)-(10/50) = 29/50 = 0.58$

Conditional Probability الاحتــمال الشرطي

- الاحتـمال الشـرطي

إذا كان لدينا الحادثين A1 , A2 وكان P: (A2) لا يساوي الصفر فأن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يعطي بالمعادلة التالية:

$$P(A1 \mid A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ A1 , A2 على احتمال الحادث A2

مثال:

إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات 0.64 واحتمال نجاحه في مقرر الإحصاء ومقرر الرياضيات معا 0.32 فما هو احتمال نجاحه في مقرر الإحصاء؟ علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات.

الحل:

نفرض أن A_1={نجاح الطالب في مقرر الإحصاء}

A_2={نجاح الطالب في مقرر الرياضيات}

وبذلك يكون:

$P(A_2)=0.64$

$P(A_1 \cap A_2)=0.32$

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو حساب **$P(A_1 | A_2)$ وبتطبيق العلاقة :**

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.32}{0.64} = 0.5$$

إذا احتمال نجاح الطالب في مقرر الإحصاء علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات هو 0.5

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	٥	٧	١٢
القسم الثاني	٨	١٤	٢٢
القسم الثالث	١٠	٦	١٦
المجموع	٢٣	٢٧	٥٠

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احسب احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج؟
- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث؟

الحل:

نفرض أن A_1={أن يكون العامل من القسم الأول}

A_2={أن يكون العامل متزوج}

B_3={أن يكون العامل من القسم الثالث}

B_4={أن يكون العامل أعزب}

فيكون بالتالي:

١- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو:

$$\frac{\text{احتمال أن يكون من القسم الأول ومتزوج}}{\text{احتمال أن يكون متزوج}}$$

$$P(A_1 \mid A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{7}{27}$$

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو 0.259

٢- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو:

$$\frac{\text{احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث}}{\text{احتمال أن يكون من القسم الثالث}}$$

$$P(B_1 \mid B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{16}{50}} = \frac{10}{16}$$

إذا احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو 0.625

ضـــرب الاحتـــمالات

قانون الضرب في الاحتمالات :

من قانون الاحتمال الشرطي:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نستنتج أن:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \setminus B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \setminus A)$$

ضـــرب الاحتــمالات

$$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A) \times (B \setminus A) \times (C \setminus A, B)}$$

ضـــرب الاحتــمالات

مثال: إذا كان الجدول التالي يمثل الاحتمال لرغبة وقدرة زبون على الشراء من محل تجاري:

القدرة / الرغبه	عنده قدرة الشراء	ليس عنده قدرة الشراء
عنده رغبة الشراء	0.3	0.1
ليس عنده رغبة الشراء	0.2	0.4

(أ) ما احتمال أن يكون لدى هذا الزبون رغبة الشراء؟

$$P(A) = 0.3 + 0.1 = 0.4$$

ضـــرب الاحتــمالات

(ب) ما احتمال أن يكون قادرا على الشراء إذا كان يرغب في الشراء؟

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

ضــــرب الاحتـــمالات

مثال: إذا فرض أن مركزا لتحليل الأسواق المالية يعتقد أنه سوف يكون هناك ارتفاع عام في القيمة السوقية باحتمالية 60% وأنه في حال حصل ذلك فإن احتمالية أن تحقق محفظة البركة المالية أرباحا كبيرة هي 85%. فأوجد احتمال أن تحقق أن يحصل ارتفاع عام في السوق وأن تحقق المحفظة المذكورة أرباحا كبيرة.

ضـــرب الاحتــمالات

نفرض أن:

ارتفاع عام في القيمة السوقية $\equiv A$

تحقيق محفظة البركة المالية أرباحا كبيرة في حال حصل ارتفاع

عام $\equiv B \setminus A$

حصول ارتفاع عام و تحقيق المحفظة أرباحا كبيرة $\equiv A \cap B$

ضـــرب الاحتــمالات

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \setminus A)$$

$$= \frac{60}{100} \times \frac{85}{100} = \frac{5100}{10000} = \frac{51}{100} = 51\%$$

المحاضرة الرابعة

نظرية الاحتمالات

Conditional Probability   الاحتــمـال الشرطي

- الاحتــمـال الشـرطي

إذا كان لدينا الحادثين A1 , A2 وكان P: (A2) لا يساوي الصفر فأن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يعطي بالمعادلة التالية:

$$P(A1 \mid A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ A1 , A2 على احتمال الحادث A2

ضـــرب الاحتـــمالات

قانون الضرب فى الاحتمالات :

من قانون الاحتمال الشرطي:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نستنتج أن:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \setminus B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \setminus A)$$

استقلال الحوادث

يقال عن حادثين A و B أنهما مستقلان إذا حدوث أحدهما لايعتمد على حدوث الآخر والمعنى الرياضي لذلك هو:

$$P(A \setminus B) = P(A)$$

$$P(B \setminus A) = P(B)$$

استقلال الحوادث

وبالتالي فإن احتمال وقوعهما معا مساوٍ لحاصل ضرب احتمال كل منهما ونكتب رياضيا:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \setminus B)$$

$$= P(B) \times P(A)$$

وكذلك:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \setminus A)$$

$$= P(A) \times P(B)$$

استقلال الحوادث

مثال: إذا كان A و B حادثين في S بحيث أن:

$$P(A) = 0.5\,, \quad P(B) = 0.6\,, \quad P(A \cup B) = 0.8$$

هل A و B حادثان مستقلان.

استقلال الحوادث

أولا: من المعلوم أنه لأي حادثين A و B فإن:

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.8 = 0.5 + 0.6 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.8$$

$$= 0.3$$

استقلال الحوادث

ثانيا: نحسب حاصل ضرب احتمالي وقوع الحادثين:

$$P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$$

استقلال الحوادث

بما أن العلاقة التالية تتحقق:

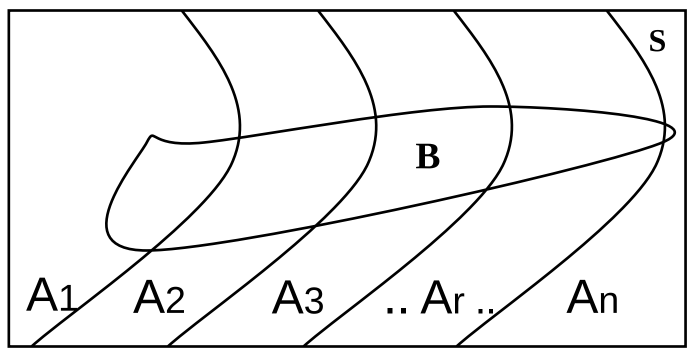
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

إذاً: الحادثان A و B مستقلان.

نظريـــة بايــز (Bayes' Theorem)

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ مجموعة أحداث متنافية وكانت احتمالات حدوثها
$P(A_1), P(A_2), \ldots\ldots P(A_n)$ وإذا كان هناك حدث B يحدث إذا حدث أي من الأحداث المتنافية
أنظر الشكل بالأسفل ، فإن احتمال حدوث الحدث A_r بشرط حدوث B هو :

$$P(A_r|B) = \frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \qquad 1 \le r \le n$$



مثال:

مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى ٢٠% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٣٥% والثالثة بنسبة ٤٥% ، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٢% و ٢,٥% و ٣% ، سحبت وحدة عشوائيا من إنتاج المصنع فوجد أنها معيبة، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الأولى؟

٢- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الثانية؟

الحل:

نفرض أن

A1={إنتاج الآلة الأولى}

A2={إنتاج الآلة الثانية}

A3={إنتاج الآلة الثالثة}

B= {إنتاج سلعة معينة}

$P(A1)=0.2$

$P(A2)=0.35$

$P(A3)=0.45$

فيكون بالتالي:

$P(B|A1)=0.02$

$P(B|A2)=0.025$

$P(B|A3)=0.03$

إذا أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الأولى إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.2\times 0.02}{(0.2\times 0.02)+(0.35\times 0.025)+(0.45\times 0.03)}=0.152$$

واحتمال أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الثانية إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.35\times 0.025}{(0.2\times 0.02)+(0.35\times 0.025)+(0.45\times 0.03)}=0.333$$

مثال:

مستشفى به أربعة أقسام، نسب عمال النظافة في هده الأقسام هي ٣٠% ، ٤٠% ، ٢٠% ، ١٠% على التوالي، إدا كانت نسب العمال المدخنين بهده الأقسام هي ١٥% ، ١٨% ، ١٢% ، ٩% على التوالي، أختير عامل عشوائيا فوجد أنه مدخن ، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن يكون العامل من القسم الأول؟

٢- أن يكون العامل من القسم الثاني؟

٣- أن لا يكون العامل من القسم الأول؟

الحل:

نفرض أن

A_1={أن يكون العامل من القسم الأول}	$P(B \mid A1)=0.15$	$P(A1)=0.3$
A_2={أن يكون العامل من القسم الثاني}	$P(B \mid A2)=0.18$	$P(A2)=0.4$
A_3={أن يكون العامل من القسم الثالث}	$P(B \mid A3)=0.12$	$P(A3)=0.2$
A_4={أن يكون العامل من القسم الرابع}	$P(B \mid A4)=0.09$	$P(A4)=0.1$

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.3\times0.15}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.3$$

واحتمال أن يكون العامل من القسم الثاني إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{0.4\times 0.18}{(0.3\times 0.15)+(0.4\times 0.18)+(0.2\times 0.12)+(0.1\times 0.09)} = 0.48$$

واحتمال أن لا يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1^c|B) = 1-0.3 = 0.7$$

المحاضرة الخامسة

المتغيرات العشوائية المنفصلة والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة

مقدمة

عند دراسة تجربة عشوائية قد يكون اهتماما متوجها إلى نتائج تلك التجربة بذاتها كما في الفصل السابق وقد يكون الاهتمام متوجها إلى قيم عددية مرتبطة بالنتائج وهذه القيم تسمى بالمتغير العشوائي؛ فمثلا في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين عندما يكون الحادث A هو ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل فإن فضاء العينة والحادث A واحتماله هم على التوالي:

مقدمة

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$A = \{HH, HT, TH\}$$

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

مقدمة

أما في حالة المتغير العشوائي فيكون الاهتمام متوجها على سبيل المثال إلى عدد مرات ظهور الصورة، فتكون القيم العددية التي يأخذها المتغير العشوائي وليكن X في المثال السابق هي:

$$X = \{2,1,0\}$$

المتغير العشوائي

المتغير العشوائي Random Variable:

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين،

وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

- المتغيرات العشوائية المنفصلة Discrete Random Variables
- المتغيرات العشوائية المتصلة(المستمرة) Continuous Random Variables

المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة):

المتغير العشوائي المنفصل هو الذي يأخذ قيم بينية، ومتباعدة، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف الأبجدية الكبيرة $X, Y, Z, \ldots$ ويرمز للقيم التي يأخذها المتغير بالحروف الأبجدية الصغيرة، $x, y, z, \ldots$

فالمتغير العشوائي المنفصل هو كل قيمة من قيم المتغير العشوائي كنتيجة لعد الأشياء،
ومن أمثلة هذه المتغيرات:

- **عدد الأولاد الذكور في الأسرة المكونة من أربع أولاد** X، $X:\{x=0,1,2,3,4\}$.
- **عدد العملاء الذين يتم إنهاء خدمتهم البنكية كل** 10 **دقائق** Y ، $Y:\{y=0,1,2,3,....\}$.
- **عدد مرات استخدام نوع معين من الأسمدة خلال الدورة الزراعية.**
- **عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج** 200 **وحدة كل موسم.**
- **عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.**
- **وهكذا..... الأمثلة كثيرة**

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير.

فإذا كان المتغير العشوائي المنفصل X يأخذ القيم، $X : \{x = x_1, x_2, ..., x_n\}$ ، وكان $P(X = x_i) = f(x_i)$ هو احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ القيمة x_i ، فإنه، يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، وهو جدول مكون من عمودين، الأول به القيم الممكنة للمتغير $X : \{x = x_1, x_2, ..., x_n\}$ ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير $P(X = x_i) = f(x_i)$ ، أي أن:

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل

x_i	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$
Σ	1

وتسمى الدالة $f(x_i)$ بدالة الاحتمال

شروط التوزيع الاحتمالي

1) $0 \leq P(x_i) \leq 1$

2) $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$

مثـــال :

إذا كانت نسبة مبيعات أحد المراكز التجارية من التفاح الأمريكي 0.60، بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح 0.40، اشترى أحد العملاء عبوتين،

والمطلوب:

- كون فراغ العينة.

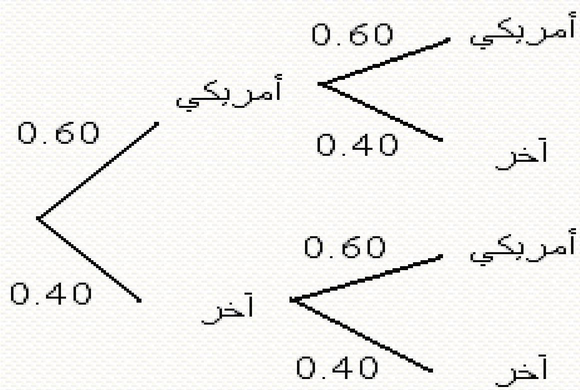
إذا عرف المتغير العشوائي بأنه عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، فأوجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي .
- ارسم دالة الاحتمال لهذا المتغير.

الحـل:

تكوين فراغ العينة:

التجربة هنا هو شراء وحدتين من عبوات التفاح، ومن ثم فراغ العينة يتكون من أربع نتائج، هي:



S	عدد العبوات X	$P(X=x)=f(x)$
(أمريكي،أمريكي)	2	0.36
(آخر,أمريكي)	1	0.24
(أمريكي,آخر)	1	0.24
(آخر,آخر)	0	0.16

التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي

من المعلوم أن العميل اشترى عبوتين، وأن المتغير العشوائي هو عدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي، لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

$x=0$ **إذا كانت العبوتين من النوع الآخر، أى إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، آخر)**

$x=1$ **إذا كان أحد العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، أمريكي) أو (أمريكي،آخر)**

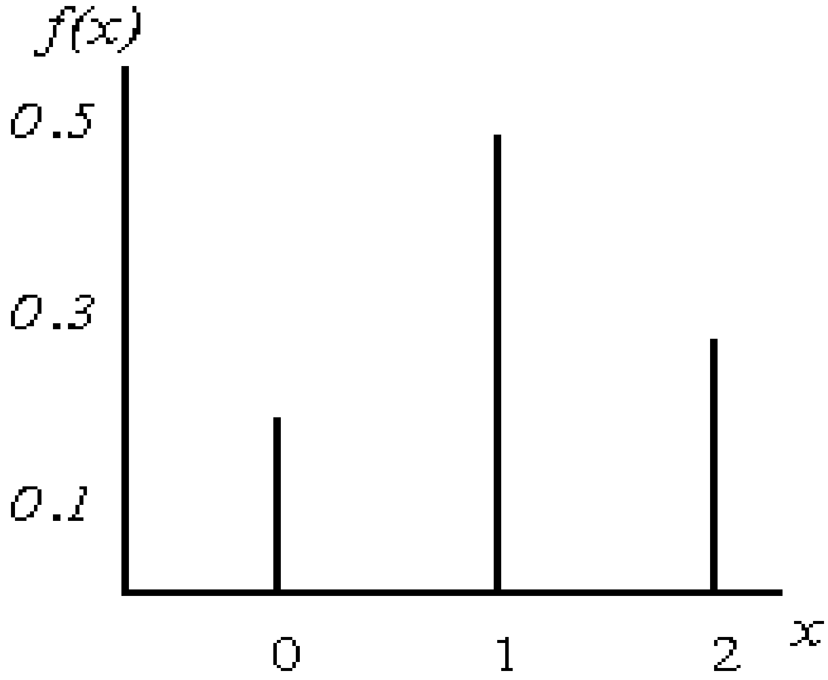
$x=2$ **إذا كان العبوتين من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (أمريكي ، أمريكي)**

ومن ثم يأخذ المتغير القيم: $X:\{x=0,1,2\}$ **، ويرتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين أعلاه، ومن ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي** X **هو:**

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الأمريكي

x_i	$f(x_i)$
0	٠,١٦=٠,٤*٠,٤
1	٠,٤٨=(٠,٦*٠,٤)+(٠,٦*٠,٤)
2	٠,٣٦ـ=٠,٦*٠,٦
$\sum$	1

رسم دالة الاحتمال $f(x)$:



الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي المنفصل:

يرمز للوسط الحسابي للمتغير العشوائي بالرمز (ميو)، ويحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{\mu = \sum x_i \, f(x_i)}$$

وأما التباين ويرمز له بالرمز σ^2 (سيجما)٢، فيحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum (x_i - \mu)^2 \, f(x_i) \\ &= \sum x_i^2 \, f(x_i) - \mu^2\end{aligned}}$$

مثـال:

في المثال السابق احسب ما يلي:

- الوسط الحسابي لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي:
- احسب الانحراف المعياري لعدد العبوات المشتراة من النوع الأمريكي.
- أوجد معامل الاختلاف النسبي

.

الحل:

الوسط الحسابي لعدد العبوات من النوع الأمريكي:

لحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري يتم استخدام المعادلة الخاصة بذلك وهذا يتطلب تكوين جدول يشمل المجاميع التالية: $\sum x_i^2 \ f(x_i)$ ، $\sum x_i \ f(x_i)$ ، وذلك كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
0	0.16	0	0
1	0.48	0.48	0.48
2	0.36	0.72	1.44
$\sum$	1	1.20	1.92

إذا الوسط الحسابي هو:

$$\mu = \sum x_i \; f(x_i) = 1.20$$

ولحساب الانحراف المعياري يجب أولا حساب التباين وهو:

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 \; f(x_i) - \mu^2 = 1.92 - (1.20)^2 = 0.48$$

إذا الانحراف المعياري قيمته هي:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.48} = 0.693$$

معامل الاختلاف النسبي هو:

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{0.693}{1.2} \times 100 = 57.7$$

التوزيعات الإحتمالية للمتغيرات المنفصلة:

وكما أوضحنا في المحاضرة السابقة أن المتغير العشوائي المنفصل (مقارنة بالمتصل) هو المتغير الذى يمكن أن يأخذ قيما محدودة ومتميزة، وتسمى مجموعة كل القيم الممكنة للمتغير العشوائي واحتمالاتها المناظرة بالتوزيع الاحتمالى، ويكون مجموع الاحتمالات = 1

التوزيعات الاحتمالية الخاصة

أ- توزيع ذي الحدين:

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام وتسمى بحالة النجاح، والأخرى تسمى بحالة الفشل، **ومن أمثلة ذلك:**

- عند إعطاء مريض نوع معين من الأدوية، لها نتيجتان:

(استجابة للدواء، أو عدم استجابة)

- عند فحص عبوة بداخلها نوع معين من الفاكهة، لها نتيجتان

(الوحدة إما أن تكون سليمة، أو تكون معيبة)

- عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان

(ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة)

- نتيجة الطالب في الاختبار

(نجاح، رسوب)

- استخدام المزارع لبرنامج معين في الزراعة

(يستخدم، أو لا يستخدم)

شكل التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين:

إذا كررت محاولة من المرات، بحيث أن كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

- النتيجة محل الاهتمام " حالة نجاح " وتتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو p
- النتيجة الأخرى " حالة فشل " وتتم باحتمال ثابت أيضا هو $q = 1 - p$

وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، بمعنى أن نتيجة كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الأخرى، وإذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد حالات النجاح "عدد النتائج محل الاهتمام" في الـ n محاولة، فإن مدي المتغير العشوائي X والذي يعبر عن عدد حالات النجاح هو: $X : \{x = 0,1,2,\ldots,n\}$

إذا فتوزيع ذو الحدين هو أحد التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، ويستخدم لإيجاد احتمال وقوع حدث معين (نجاح) عدداً من المرات مقداره **X** من بين **n** من المحاولات لنفس التجربة (ونرمز لهذا الاحتمال بالرمز **P(X)** وذلك عندما تتحقق الشروط التالية :

- هناك ناتجان ممكنان فقط ومتنافيان لكل محاولة
- المحاولات وعددها **n** **مستقلة** عن بعضها البعض
- احتمال وقوع الحدث المعين فى كل محاولة (النجاح) **P** ثابت ولا يتغير من محاولة لأخرى .

فبالتالي يمكن حساب الاحتمال من خلال المعادلة التالية:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x}$$

$$P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} P^x (1-P)^{n-x}$$

حيث ! **n** (وتقرأ " مضروب **n** ") = **n. (n-1). (n-2)…3.2.1 =1, 0!.**

ويكون متوسط توزيع ذى الحدين $\mu = np$

وانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

تحديد شكل التوزيع:

يتحدد شكل التوزيع ثنائي الحدين وفقا لقيمة احتمال النجاح كما يلي:

- إذا كان $p = 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون متماثل.
- إذا كان $p < 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون موجب الالتواء.
- إذا كان $p > 0.5$ فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون سالب الالتواء.

$p > 0.5$ الاحتمال أكبر من ٠,٥

مثال:

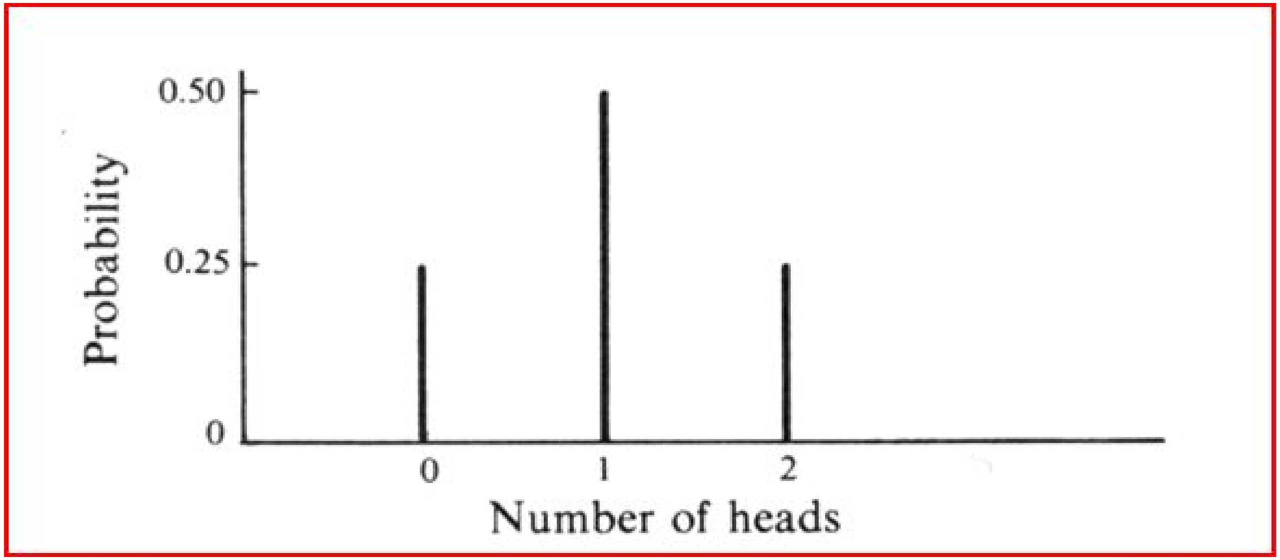
عند رمى عملة متوازنة مرتين فإن النواتج الممكنة هى **TT,TH,HT,HH**وإذن :

$$P(X=0)=\frac{1}{4} \qquad \mathrm{P(X=1)}=\frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \mathrm{P(X=2)}=\frac{1}{4}$$

وهكذا فإن عدد الصور متغير عشوائى منفصل ، وتمثل مجموعة كل النواتج الممكنة مع احتمالاتها المناظرة توزيعاً احتمالياً منفصلا، أنظر الجدول التالي:

الاحتمال	إمكانية حدوثها	عدد الصور
0.25	TT	0
0.50	TH, HT	1
0.25	HH	2

ويمكن كذلك تمثيل ذلك من خلال الرسم التالي:



مثال:

باستخدام توزيع ذي الحدين يمكننا إيجاد احتمال الحصول على **4** صور في **6** رميات لعملة متوازنة كالاتى :

$$P(X)=\frac{n!}{X!(n-X)!}P^{x}(1-P)^{n-X}$$

$$P(4)=\frac{6!}{4!(6-4)!}(1/2)^{4}(1/2)^{2}=\frac{6\bullet5\bullet4\bullet3\bullet2\bullet1}{4\bullet3\bullet2\bullet1\bullet2\bullet1}(1/16)(1/4)=15(1/64)=\frac{15}{64}\cong0.23$$

إن عدد الصور المتوقع في ست رميات هو:

$$\mu=np=(6)(1/2)=3$$

ويكون الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لست رميات هو:

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{(6)(1/2)(1/2)} = \sqrt{6/4} = \sqrt{1.5} \cong 1.22 heads$$

ب- توزيع بواسون:

توزيع بواسون هو توزيع احتمالي منفصل آخر يستخدم لتحديد احتمال وقوع عدد معين من النجاحات في وحده الزمن، وذلك عندما تكون الأحداث أو "النجاحات " مستقلة عن بعضها البعض وعندما يبقى متوسط عدد النجاحات ثابتاً لوحدة الزمن. عندئذ :

$$P(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$,\quad x = 0,1,2,\ldots$$

حيث : x = العدد المعين من النجاحات.

$P(x)$ = احتمال عدد x من النجاحات.

e = أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعي **وتوجد في بعض الآلات الحاسبة، وقيمتها هي:** $e = 2.718$ **تقريبا، ويمكن حساب قيمتها باستخدام الآلة الحاسبة.**

$x!$ = مضروب العدد x " ويساوي: $x! = x(x-1)(x-2)...3\times 2\times 1$

ويكثر استخدام هذا التوزيع في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقا لمعدلات زمنية، وكذلك في حالة الأحداث نادرة الوقوع، **ومن أمثلة ذلك:**

- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر $X:\{x=0,1,2,\ldots\}$
- عدد مرات ري نوع معين من المحاصيل الزراعية خلال الموسم $X:\{x=0,1,2,\ldots\}$
- عدد العملاء الذين يتم خدمتهم البنكية كل 10 دقائق $X:\{x=0,1,2,\ldots\}$
- عدد مرات زيارة المريض للطبيب كل سنة $X:\{x=0,1,2,\ldots\}$
- عدد مرات تناول الأسرة للحوم الحمراء خلال الأسبوع $X:\{x=0,1,2,\ldots\}$
- عدد أخطاء الطباعة لكل صفحة من صفحات الكتاب $X:\{x=0,1,2,\ldots\}$

شكل التوزيع الاحتمالي البواسوني

إذا كان متوسط عدد مرات وقوع حادث وفقا لمعدل زمني معين هو μ، وكان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد مرات وقوع الحادث وفقا لهذا المعدل، فإن مدي المتغير العشوائي X هو: $X:\{x=0,1,2,...\}$ ، وهذا المدى عبارة عن فئة مفتوحة من اليمين، فإن الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ والذي يعبر عن احتمال وقوع الحادث عدد من المرات وفقا لهذا المعدل.

مثال:

إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

- ما نوع المتغير العشوائي؟
- اكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير.
  - احسب الاحتمالات التالية:
    - احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
    - احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟
  - احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.
  - حدد شكل التوزيع.

الحل:

عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة متغير كمي منفصل، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو: :

$$X : \{x = 0,1,2,3,\dots\}$$

شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $\mu = 3$ ، إذا دالة الاحتمال هي:

$$P(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= \frac{e^{-3}3^{x}}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,\dots$$

حساب الاحتمالات:

حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر، $p(2)$

$$P(2)=\frac{e^{-3}3^{2}}{2!}=\frac{0.0498(9)}{2\times 1}=0.22404$$

احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:

$$P(X \le 3) = p(3) + p(2) + p(1) + p(0)$$

$$= \left[\frac{3^3}{3!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^0}{0!}\right]\left[\frac{0.0498}{1}\right]$$

$$= [0.0498]\left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1}\right) = 0.0498(13) = 0.6474$$

حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع البواسون هو معلمة معطاة هي:

$$\mu = 3$$

في هذا التوزيع، فإن التباين يساوي الوسط الحسابي:

أي أن:

$$\sigma^2 = \mu = 3$$

ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{3} = 1.732$$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التي سبق استخدامها في الفصل السابق، وهو:

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.732}{3} \times 100 = 57.7\%$$

تحديد شكل التوزيع:

<u>دائما توزيع بواسون موجب الالتواء</u>

مثال:

يتلقى قسم شرطة فى المتوسط **5** مكالمات في الساعة فيكون احتمال تلقى مكالمتين في ساعة مختارة عشوائياً هو :

$$P(X=2)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$=\frac{e^{-5}5^{x}}{x!}= \quad , \quad x=0,1,2,\ldots$$

$$=\frac{(0.00674)(25)}{(2)(1)}=0.08425$$

قريباً إن شاء اللّٰه سيتم إضافة باقي المحاضرات

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق

M O T A Y A M

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning & Distance Education

تمت
بحمد الله

جامعة الملك فيصل
١٩٧٥ ١٣٩٥
اقرأ وربك الأكرم
KING FAISAL UNIVERSITY