المحاضرة الرابعة

نظرية الاحتمالات

Conditional Probability الاحتـمال الشرطي

- الاحتـمال الشرطي

إذا كان لدينا الحادثين A1 , A2 وكان (A2) :P لا يساوي الصفر فأن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يعطي بالمعادلة التالية:

$$P(A1 \mid A2) =$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ A1 , A2 على احتمال الحادث A2

ضــرب الاحتـمالات

قانون الضرب في الاحتمالات :

من قانون الاحتمال الشرطي:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نستنتج أن:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \setminus B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \setminus A)$$

استقلال الحوادث

يقال عن حادثين A و B أنهما مستقلان إذا حدوث أحدهما لايعتمد على حدوث الآخر والمعنى الرياضي لذلك هو:

$$P(A \setminus B) = P(A)$$

$$P(B \setminus A) = P(B)$$

وبالتالي فإن احتمال وقوعهما معا مساوٍ لحاصل ضرب احتمال كل منهما ونكتب رياضيا:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \times P(A \setminus B) \\ &= P(B) \times P(A) \end{aligned}$$

وكذلك:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B \setminus A) \\ &= P(A) \times P(B) \end{aligned}$$

مثال: إذا كان A و B حادثين في S بحيث أن:

$$P(A) = 0.5\,,\ \ P(B) = 0.6\,,\ \ P(A \cup B) = 0.8$$

هل A و B حادثان مستقلان.

أولا: من المعلوم أنه لأي حادثين A و B فإن:

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.8 = 0.5 + 0.6 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.8$$

$$= 0.3$$

ثانيا: نحسب حاصل ضرب احتمالي وقوع الحادثين:

$$P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$$

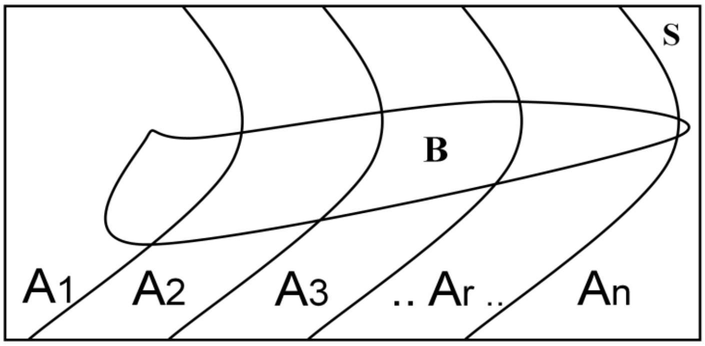
بما أن العلاقة التالية تتحقق:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

إذاً: الحادثان A و B مستقلان.

نظريـــة بايـز (Bayes' Theorem)

إذا كانت A_n .... $A_1, A_2,$ مجموعة أحداث متنافية وكانت احتمالات حدوثها $P(A_n)$ .... $P(A_1), P(A_2),$ وإذا كان هناك حدث B يحدث إذا حدث أي من الأحداث المتنافية أنظر الشكل بالأسفل ، فإن احتمال حدوث الحدث A_r بشرط حدوث B هو :



مثال:

مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى ٢٠% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٣٥% والثالثة بنسبة ٤٥% ، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٢% و ٢.٥% و ٣% ، سحبت وحدة عشوائيا من إنتاج المصنع فوجد أنها معيبة، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الأولى؟

٢- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الثانية؟

الحل:

نفرض أن

A1={إنتاج الآلة الأولى} $P(A1)=0.2$

A2={إنتاج الآلة الثانية} $P(A2)=0.35$

A3={إنتاج الآلة الثالثة} $P(A3)=0.45$

B= {إنتاج سلعة معينة}

فيكون بالتالي:

$P(B|A1)=0.02$

$P(B|A2)=0.025$

$P(B|A3)=0.03$

إذا أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الأولى إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.2\times0.02}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.152$$

واحتمال أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الثانية إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.35\times0.025}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.333$$

مثال:

مستشفى به أربعة أقسام، نسب عمال النظافة في هده الأقسام هي ٣٠% ، ٤٠% ، ٢٠% ، ١٠% على التوالي، إدا كانت نسب العمال المدخنين بهده الأقسام هي ١٥% ، ١٨% ، ١٢% ، ٩% على التوالي، أختير عامل عشوائيا فوجد أنه مدخن ، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن يكون العامل من القسم الأول؟
٢- أن يكون العامل من القسم الثاني؟
٣- أن لا يكون العامل من القسم الأول؟

الحل:

نفرض أن

A1={أن يكون العامل من القسم الأول}	P(B│A1)=0.15	P(A1)=0.3
A2={أن يكون العامل من القسم الثاني}	P(B│A2)=0.18	P(A2)=0.4
A3={أن يكون العامل من القسم الثالث}	P(B│A3)=0.12	P(A3)=0.2
A4={أن يكون العامل من القسم الرابع}	P(B│A4)=0.09	P(A4)=0.1

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.3\times 0.15}{(0.3\times 0.15)+(0.4\times 0.18)+(0.2\times 0.12)+(0.1\times 0.09)}=0.3$$

واحتمال أن يكون العامل من القسم الثاني إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.4\times 0.18}{(0.3\times 0.15)+(0.4\times 0.18)+(0.2\times 0.12)+(0.1\times 0.09)}=0.48$$

واحتمال أن لا يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1^c|B)=1-0.3=0.7$$