

تعريف الاحتمالات:

يمكن تعريف الاحتمالات بطرق عديدة غير أن أبسطها

"هو مقياس لامكانية وقوع حدث (Event) معين"

وتستعمل كلمة احتمالات بشكل دائم في حياتنا اليومية مثل:

احتمال أن ينجح الطالب في مقرر دراسي.

احتمال نزول المطر اليوم

وفي أحيان أخرى تستخدم كلمة احتمالات ككلمة مرادفة لبعض الكلمات الأخرى مثل: ممكن، غاليا، مؤكد، مستحيل ...

وقد ارتبط المفهوم التقليدي للاحتتمال بالعباء الحظ لمدة طويلة، وتختلف درجة إمكانية تحقق أي حادثة من شخص إلى آخر حسب خبرته والمعلومات المتوفرة لديه عن الحادثة

وقد تطور علم الاحتمالات تطورا كبيرا وسريعا وأصبح أساسا لعلم الإحصاء وبحوث العمليات وغيرها.

١- التجربة العشوائية Random Experiment :

هي تلك التجربة التي تكون جميع نتائجها معلومة مسبقا ولكن لا يمكن التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج يصفة مؤكدة مثلا:

رمي حجر ترد مرة واحدة يعتبر تجربة عشوائية، حيث نعلم جميع قيم نتائج التجربة وهي إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ولكن لا يمكن تحديد أي الأرقام يظهر إلى الأعلى بصورة مؤكدة قبل إجراء التجربة.

-رمي عملة معدنية مرة واحدة أو عدد من المرات يعتبر تجربة عشوائية معروف جميع نتائجها قبل أن تبدأ التجربة، ولكن لا يمكن الجزم بظهور أي منها في رمية معينة.

-المشاركة في سباق الخيل لحصان معين يعتبر تجربة عشوائية فهو إما أن يفوز أو يخسر أو يتعادل.

٢- الحادث والفراغ العيني:

فراغ العينة هو المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز Ω ويطلق عليه الحالات الممكنة .

افترض أننا نقوم بإجراء تجربة ما كرمي زهرة النرد مثلاً وبلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الأوجه الستة ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦. ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم فردي أي ١ أو ٣ أو ٥ من التجربة . وهكذا فإن عملية رمي الزمرة تسمى **تجربة (Experiment)** وظهور رقم فردي هو محل اهتمامنا يسمى **حادثاً (Event)** ومجموعة جميع الحالات الممكنة الظهور تسمى **بالفراغ العيني (Sample Space)** وبلاحظ أن الحادث قد يكون حالة أو أكثر من الفراغ العيني .

الحادثة هي مجموعة جزئية من فراغ العينة وتمثل مجموعة النتائج التي نحقق الحدث وتسمى أيضاً الحالات المواتية **Favorable Cases** ، فمثلاً الحصول على رقم زوجي في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة تكون الحادثة هي $\{٢، ٤، ٦\}$ ، ويمكن أن تحتوي الحادثة على عتصر واحد أو أكثر .



٣- أنواع الحوادث :

أ- الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events)
يقال عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معاً. فمثلاً عند رمي عملة معدنية لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

ب- الحوادث المستقلة (Independent Events)
يعتبر الحادثين A أو B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداها أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الآخر. فمثلاً عند رمي قطعة عملة واحدة مرتين متتاليتين فإن نتيجة الرمية الثانية لا تتأثر بنتيجة الأولى.

ج- الحوادث الشاملة (Exhaustive Events)
تسمى الحوادث A ، B ، C ... حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لا بد من حدوث إحداها عند إجراء التجربة. فمثلاً عند اختيار طالب من الجامعة لمعرفة حالته ما إذا كان مسافراً أو غير مسافراً تعتبر هذه الحالات حوادث شاملة لأنه لا بد للفرء أن يكون له صفة واحدة من هذه الصفات. كذلك فإن الحصول على العدد ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ عند رمي حجر النرد تعتبر حوادث شاملة لأنه لا بد من حدوث إحداها.



مثال:

بمضي حجر نرد مرة واحدة ، احسب التالي:

- احتمال الحصول على رقم ٥
- احتمال الحصول على رقم زوجي
- احتمال الحصول على رقم أكبر من ٣
- احتمال الحصول على رقم أقل من ٧
- احتمال الحصول على رقم ٧

الحل:

فراغ العينة لهذه التجربة هو : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فيكون بالتالي الحل كما يلي:

$$P_{(A=5)} = \frac{1}{6}$$

$$P_{(A \in \{2, 4, 6\})} = \frac{3}{6}$$

$$P_{(A > 2)} = \frac{4}{6}$$

$$P_{(A < 7)} = \frac{6}{6} = 1$$

$$P_{(A=7)} = \frac{0}{6} = 0$$

ويستنتج من ذلك أن أقل قيمة لاحتمال تساوي الصفر ويقبل أن الحدث في هذه الحالة (حدث مستحيل) بينما يساوي واحد إذا كان الحدث مؤكد.

**مثال:**

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

- أن يكون أعزباً
- أن يكون متزوجاً
- أن يكون من القسم الأول
- أن يكون من القسم الأول أو الثاني
- أن يكون من القسم الأول وأعزب



الحل:

نفرض أن الحادثة **A** أن يكون **العمال أعزب** أي $A = \{\text{أن يكون العامل أعزب}\}$ فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(A) = \frac{\text{عدد العمال العزاب}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 23/50 = 0.46$$

نفرض أن الحادثة **B** أن يكون **العمال متزوج** أي $B = \{\text{أن يكون العامل متزوج}\}$ فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(B) = \frac{\text{عدد العمال المتزوجين}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 27/50 = 0.54$$

نفرض أن الحادثة **C** أن يكون **العمال من القسم الأول** أي $C = \{\text{أن يكون العامل من القسم الأول}\}$ فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(C) = \frac{\text{عدد عمال القسم الأول}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 12/50 = 0.24$$



تابع الحل:

نفرض أن الحادثة **D** أن يكون **العمال من القسم الأول أو الثاني** أي $D = \{\text{أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني}\}$ فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(D) = \frac{\text{عدد عمال القسم الأول أو الثاني}}{\text{عدد العمال الكلي}} = (12+22)/50 = 34/50 = 0.68$$

نفرض أن الحادثة **E** أن يكون **العمال من القسم الأول و أعزب** أي $E = \{\text{أن يكون العامل من القسم الأول و أعزب}\}$ فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(E) = \frac{\text{عدد عمال القسم الأول و أعزب}}{\text{عدد العمال الكلي}} = \underline{5/50} = 0.1$$



جمع الاحتمالات

✎

أ- في حالة كون الحوادث متنافية

إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, A_3, \dots$ حوادث متنافية بمعنى أن حدوث أحدها يؤدي إلى استحالة حدوث أي من الحوادث الأخرى وبالتالي فإن احتمال حدوث هذه الحوادث معاً يكون معيئاً فإن
احتمال وقوع أي حدث من الحوادث المتنافية يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث

الشكل (١)



حوادث متنافية

فإذا كان $A \cdot B$ حادثين متنافيين كما في الشكل (١)

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B) \text{ فإن}$$

يرمز أيضاً لاحتمال وقوع أحد الحادثين بالرمز
حوادث متنافية

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



مثال:

✎

رسمي حجر نرد مرة واحدة ، احسب:
احتمال الحصول على رقم ٥ أو ٦
احتمال الحصول على رقم زوجي

الحل:

حيث أن الحصول على رقم ٥ أو ٦ حادثان متنافيان ، أي أن:
 $A_1 = \{\text{الحصول على الرقم ٥}\}$ و $A_2 = \{\text{الحصول على الرقم ٦}\}$ فإن:

$$P(A_1 \cup A_2) = (1/6) + (1/6) = 1/3$$

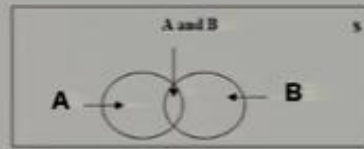
وحيث أن الحصول على رقم زوجي يعني الحصول على رقم ٢ أو رقم ٤ أو رقم ٦ وكلها حوادث متنافية، أي أن:
 $A_1 = \{\text{الحصول على الرقم ٢}\}$ و $A_2 = \{\text{الحصول على الرقم ٤}\}$ و $A_3 = \{\text{الحصول على الرقم ٦}\}$ فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = (1/6) + (1/6) + (1/6) = 1/2$$

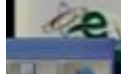


بـ في حالة كون الحوادث غير متنافية

عند عدم اشتراط تنافي الحادثين A و B يكون المقصود بالحدث (A أو B) وقوع A على انفراد أو وقوع B على انفراد أو وقوع الحادثين A و B معا في وقت واحد كما يتضح من الشكل التالي



حوادث غير متنافية

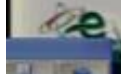


الآن $P(A) + P(B)$ تمثل مجموع الحالات المواتية للحدث A مضافاً إليها مجموع الحالات المواتية للحدث B ولكن يجب ملاحظة أن كل من الحالات المواتية للحدث A وتلك المواتية للحدث B تتضمن الحالات المواتية لوقوع A و B معا ، وبهذا فإنه في حالة جمع $P(A)$ و $P(B)$ فإننا نجمع $P(A \text{ و } B)$ مرتين ، لهذا لابد من طرح $P(A \text{ و } B)$ مرة واحدة لنحصل على الاحتمال $P(A \text{ أو } B)$ وهذا هو :

$$P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B)$$

أو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



مثال:-

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني.
- احتمال أن يكون العامل متزوجاً أو من القسم الأول
- احتمال أن يكون العامل من القسم الثالث أو أعزب



الحل:

نفرض أن الحادثة **A1** أن يكون العامل من القسم الأول أي أن $A1 = \{\text{أن يكون العامل من القسم الأول}\}$
نفرض أن الحادثة **A2** أن يكون العامل من القسم الثاني أي أن $A2 = \{\text{أن يكون العامل من القسم الثاني}\}$
فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(A1) = 12/50$$

$$P(A2) = 22/50$$

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) = (12/50) + (22/50) = 34/50 = 0.68$$

نفرض أن الحادثة **A1** أن يكون العامل متزوجاً أي أن $A1 = \{\text{أن يكون العامل متزوج}\}$
نفرض أن الحادثة **A2** أن يكون العامل من القسم الأول أي أن $A2 = \{\text{أن يكون العامل من القسم الأول}\}$
فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(A1) = 27/50$$

$$P(A2) = 12/50$$

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1 \cap A2) = (27/50) + (12/50) - (7/50) = 32/50 = 0.64$$



تابع الحل:

نفرض أن الحادثة **A1** أن يكون العامل من القسم الثالث أي أن $A1 = \{\text{أن يكون العامل من القسم الثالث}\}$
نفرض أن الحادثة **A2** أن يكون العامل أعزب أي أن $A2 = \{\text{أن يكون العامل أعزب}\}$
فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(A1)=16/50$$

$$P(A2)=23/50$$

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1 \cap A2) = (16/50) + (23/50) - (10/50) = 29/50 = 0.58$$



الاحتمال الشرطي Conditional Probability

- الاحتمال الشرطي

إذا كان لدينا الحادثين $A1$, $A2$ وكان $P(A2)$ لا يساوي الصفر فإن الاحتمال الشرطي للحادث $A1$ بشرط وقوع الحادث $A2$ يعطي بالمعادلة التالية:

$$P(A1 | A2) = \frac{P(A1 \cap A2)}{P(A2)}$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث $A1$ بشرط وقوع الحادث $A2$ يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ $A1$, $A2$ على احتمال الحادث $A2$



مثال:

إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات 0.64 واحتمال نجاحه في مقرر الإحصاء ومقرر الرياضيات معا 0.32 فما هو احتمال نجاحه في مقرر الإحصاء؟ علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات.

الحل:

نفرض أن A_1 = {نجاح الطالب في مقرر الإحصاء}
 A_2 = {نجاح الطالب في مقرر الرياضيات}

وبذلك يكون:

$$P(A_2) = 0.64$$

$$P(A_1 \cap A_2) = 0.32$$

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو حساب $P(A_1 | A_2)$ وينطبق العلاقة:

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.32}{0.64} = 0.5$$

إذا احتمال نجاح الطالب في مقرر الإحصاء علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات هو 0.5

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احسب احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج؟
- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث؟

المعطى:
 A_1 = {أن يكون العامل من القسم الأول}
 A_2 = {أن يكون العامل متزوج}
 B_3 = {أن يكون العامل من القسم الثالث}
 B_4 = {أن يكون العامل أعزب}

فيكون بالتالي:
 ١- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو:
 احتمال أن يكون من القسم الأول ومتزوج

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{7}{27}$$

احتمال أن يكون متزوج

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو 0.259

٢- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو:
 احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث

$$P(B_1 | B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{16}{50}} = \frac{10}{16}$$

احتمال أن يكون من القسم الثالث

إذا احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو 0.625



ضرب الاحتمالات

إن احتمال حدوث حادثين مستقلين أو أكثر معاً يساوي حاصل ضرب احتمال حدوث كل واحد من هذه الحوادث ببعضها بعضاً

فمثلاً إذا كان لدينا صندوق به ١٠ كرات متماثلة منها ٦ بيضاء و ٤ سوداء وسحبنا كرة من الصندوق فإن احتمال أن تكون بيضاء 6/10 واحتمال أن تكون سوداء 4/10، فإذا أعادنا الكرة إلى الصندوق (ليصبح العدد مكتملاً كما كان) وسحبنا الكرة مرة أخرى فإن احتمال أن تكون بيضاء 6/10 واحتمال أن تكون سوداء 4/10 ، فنكرر العملية يؤدي إلى نفس الاحتمال. ومن هذا نرى أن نتيجة السحب الأول لا تؤثر على نتيجة السحب الثاني وهذا ما يسمى سحب بإرجاع أو إحلال أو إعادة.

فإذا كان لدينا الحادثين المستقلين A_1 و A_2 فإن احتمال حدوثهما معاً هو:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

بمعنى أن احتمال وقوع حدثين مستقلين معاً يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع أي منهما بمفرده في احتمال وقوع الحدث الآخر بمفرده وفي حالة التعميم لـ n فإن :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$



مثال:

إذا رمينا قطعة نقود مرة واحدة ، احسب الاحتمالات التالية:
• أن تكون الأولى صورة والثانية كتابة.
• أن تكون كلتاها صورة.

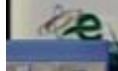
الحل:

نفرض أن: $A_1 = \{\text{ظهور صورة في الرمية الأولى}\}$
 $A_2 = \{\text{ظهور كتابة في الرمية الثانية}\}$

فيكون: $P(A_1) = \frac{1}{2}$ ، $P(A_2) = \frac{1}{2}$

حيث أن الحادثان A_1 و A_2 مستقلتين فإن احتمال أن تكون الرمية الأولى صورة والثانية كتابة هو :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمل أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به فإذا سحب عاملان من المصنع مع الإرجاع (أي إرجاع العامل الأول قبل سحب العامل الثاني) احسب :

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عاملان من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

١. احتمال أن يكون العاملان من القسم الأول؟
٢. احتمال أن يكون العاملان متزوجان؟
٣. احتمال أن يكون للعاملين نفس الحالة الاجتماعية؟
٤. احتمال أن يكون العاملان من القسم نفسه؟



الحل:

١- احتمال أن يكون العاملان من القسم الأول يعني أن يكون العامل الأول من القسم الأول (الحادثة A_1) والعامل الثاني من القسم الأول (الحادثة A_2) وحيث أنهما مستقلان (لأن السحب مع الإرجاع) فإن:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2) = \frac{12}{50} \times \frac{12}{50} = \frac{144}{2500} = 0.0576$$

٢- احتمال أن يكون العاملان متزوجان ، يعني أن يكون العامل الأول متزوج (الحادثة B_1) والعامل الثاني متزوج (الحادثة B_2) وحيث أنهما مستقلان (لأن السحب مع الإرجاع) فإن:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2) = \frac{27}{50} \times \frac{27}{50} = \frac{729}{2500} = 0.2916$$



٣- احتمال أن يكون للعاملين نفس الحالة الاجتماعية يعني أن يكون العاملان كلاهما متزوجين (الحادثة A) أو أن يكون كلاهما أعزبين (الحادثة B) فإن:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= P(A_1 A_2) + P(B_1 B_2) \\ &= P(A_1 \times A_2) + P(B_1 \times B_2) \\ &= \left[\frac{27}{50} \times \frac{27}{50} \right] + \left[\frac{23}{50} \times \frac{23}{50} \right] = 0.5032 \end{aligned}$$

٤- احتمال أن يكون العاملان من القسم نفسه يعني أن يكون العاملان كلاهما من القسم الأول (الحادثة A) أو أن يكون كلاهما من القسم الثاني (الحادثة B) أو أن يكون كلاهما من القسم الثالث (الحادثة C) فإن:

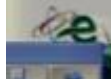
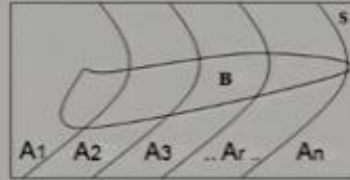
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= P(A_1 A_2) + P(B_1 B_2) + P(C_1 C_2) \\ &= P(A_1 \times A_2) + P(B_1 \times B_2) + P(C_1 \times C_2) \\ &= \left[\frac{12}{50} \times \frac{12}{50} \right] + \left[\frac{22}{50} \times \frac{22}{50} \right] + \left[\frac{16}{50} \times \frac{16}{50} \right] = 0.3536 \end{aligned}$$



نظرية بايز (Bayes' Theorem)

إذا كانت $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعة أحداث متنافية وكانت احتمالات حدوثها $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ وإذا كان هناك حدث B يحدث إذا حدث أي من الأحداث المتنافية $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، فإن احتمال حدوث الحدث A_r بشرط حدوث B هو :

$$P(A_r|B) = \frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)} \quad 1 \leq r \leq n$$



مثال:-

مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى ٢٠% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٣٥% والثالثة بنسبة ٤٥%، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٢% و ٢.٥% و ٣%، سحبت وحدة عشوائية من إنتاج المصنع فوجد أنها معيبة، احسب الاحتمالات التالية:

- ١- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الأولى؟
- ٢- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الثانية؟

الحل:

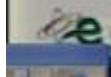
نفرض أن

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.2 & \{ \text{إنتاج الآلة الأولى} \} &= A_1 \\ P(A_2) &= 0.35 & \{ \text{إنتاج الآلة الثانية} \} &= A_2 \\ P(A_3) &= 0.45 & \{ \text{إنتاج الآلة الثالثة} \} &= A_3 \end{aligned}$$

$$\{ \text{إنتاج سلعة معينة} \} = B$$

فيكون بالتالي:

$$\begin{aligned} P(B|A_1) &= 0.02 \\ P(B|A_2) &= 0.025 \\ P(B|A_3) &= 0.03 \end{aligned}$$



تابع الحل:-

تكون السلعة من إنتاج الآلة الأولى إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{0.2 \times 0.02}{(0.2 \times 0.02) + (0.35 \times 0.025) + (0.45 \times 0.03)} = 0.152$$

واحتمال أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الثانية إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{0.35 \times 0.025}{(0.2 \times 0.02) + (0.35 \times 0.025) + (0.45 \times 0.03)} = 0.333$$

مثال:-

مستشفى به أربعة أقسام، نسب عمال النظافة في هذه الأقسام هي ٣٠%، ٤٠%، ٢٠%، ١٠% على التوالي. إذا كانت نسب العمال المدخنين بهذه الأقسام هي ١٥%، ١٨%، ١٢%، ٩% على التوالي، اختبر عامل عشوائياً فوجد أنه مدخن، احسب الاحتمالات التالية:

- ١- أن يكون العامل من القسم الأول؟
- ٢- أن يكون العامل من القسم الثاني؟
- ٣- أن لا يكون العامل من القسم الأول؟

الحل:

نفرض أن

$P(A_1)=0.3$	$P(B A_1)=0.15$	$A_1 = \{ \text{أن يكون العامل من القسم الأول} \}$
$P(A_2)=0.4$	$P(B A_2)=0.18$	$A_2 = \{ \text{أن يكون العامل من القسم الثاني} \}$
$P(A_3)=0.2$	$P(B A_3)=0.12$	$A_3 = \{ \text{أن يكون العامل من القسم الثالث} \}$
$P(A_4)=0.1$	$P(B A_4)=0.09$	$A_4 = \{ \text{أن يكون العامل من القسم الرابع} \}$

تابع الحل:-

احتمال أن يكون العامل من القسم الأول إذا علم - بشرط - أنه مدخن :

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^4 P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{0.3 \cdot 0.15}{(0.3 \cdot 0.15) + (0.4 \cdot 0.18) + (0.2 \cdot 0.12) + (0.1 \cdot 0.09)} = 0.3$$

وا احتمال أن يكون العامل من القسم الثاني إذا علم - بشرط - أنه مدخن :

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^4 P(A_i)P(B|A_i)} = \frac{0.4 \cdot 0.18}{(0.3 \cdot 0.15) + (0.4 \cdot 0.18) + (0.2 \cdot 0.12) + (0.1 \cdot 0.09)} = 0.48$$

وا احتمال أن لا يكون العامل من القسم الأول إذا علم - بشرط - أنه مدخن :

$$P(A_1^c|B) = 1 - 0.3 = 0.7$$



تمارين واجب :-

١- عرف المصطلحات التالية :-

(التجربة العشوائية - فراغ العينة - الحادث - الحوادث المتنافية - الحوادث المستقلة - الحوادث الشاملة) .

٢- الجدول التالي يمثل توزيع موظفي أحد الشركات حسب الحالة الاجتماعية للموظف والمستوى الإداري الذي يعمل به :

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
مستوى الإدارة الدنيا	10	14	24
مستوى الإدارة المتوسطة	16	28	44
مستوى الإدارة العليا	20	12	32
المجموع	46	54	100



تمارين واجب :-

أولاً :- اختر موقف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- أن يكون أعزباً.
- أن يكون متزوجاً .
- أن يكون من مستوى الإدارة الدنيا.
- أن يكون من مستوى الإدارة الدنيا أو المتوسطة .
- أن يكون من مستوى الإدارة الدنيا وأعزب .

ثانياً : اختر موقف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احسب احتمال أن يكون موظفي الإدارة الدنيا بشرط أنه متزوج؟
- احتمال أن يكون الموظف أعزب بشرط أنه من موظفي الإدارة العليا ؟

ثالثاً : تم اختيار ٢ موقف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

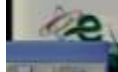
- احتمال أن يكون الموظفين من الإدارة الدنيا ؟
- احتمال أن يكون الموظفين متزوجان ؟
- احتمال أن يكون للموظفين نفس الحالة الاجتماعية؟
- احتمال أن يكون الموظفين من القسم نفسه؟



تمارين واجب :-

٣- مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى ٤٠% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٢٥% والباقي من إنتاج الآلة الثالثة، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٤% و ٣% و ٥.٥% ، سحبت وحدة عشوائية من إنتاج المصنع فوجد أنها جيدة ، احسب الاحتمالات التالية:

- أن تكون القطعة الجيدة من إنتاج الآلة الأولى؟
- أن تكون القطعة الجيدة من إنتاج الآلة الثانية؟





مَشْرِفٌ
بِحَمْدِ اللَّهِ

