التحليل الإحصائي

د.أحمد فرحان

إعداد :

Ghayda&dody-11

2014-2015

المحاضرة (١)

المجموعات

تعريف المجموعة :-

يمكن تعريف المجموعة على أنها عدد من العناصر بينها صفات مشتركة تكتب بين حاصرتين { } و تسمى بأحد الحروف الهجائية الكبيرة ..... A , B , C

و من الأمثلة على المجموعات $A= \{ 1,3,5,7,9,.......\}$

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b , c , ...

يستخدم الرمز ϵ "ينتمي إلى " ليبين عناصر المجموعة فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب على الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

$A = \{ 1,5,10,15\}$

$B= \{ a , b ,c , d \}$

$C= \{ 1 , 2 , 3 .....\}$

(و هي مجموعة منتظمة تسير بنفس الشكل١ ٢ ٣ ٤وهكذا)

$A = \{ 1, 2 , 3,....,100\}$

(و هي مجموعة مغلقة و لكن المساحة لا تكفي لكتابة من ١ إلى ١٠٠ و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ،فمثلاً :

A = { x: عدد زوجي X}

B = { x : طالب بمقرر الاحصاء في الادارة X}

C= { x : طالب بنظام التعليم عن بعد x }

D = {x: عدد صحيح -3 ≤ x ≤ 1 x}

x= { x : 0 ≤ x ≤ 12 عدد صحيح X}

أنواع المجموعات :-

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ (فاي) أو { } .

أمثلة :-

A= { x : عدد طبيعي زوجي و فردي x }

B = { x : دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية X }

المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

A = { 2 , 4 , 6 , 8 }

B = { 1 , 2 , 3 , …….. , 100}

C = { x , y , s, t u }

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (وهي المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

A = { X: عدد طبيعي فردي}

B = { 10, 20 , 30 ,……… }

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :-

$A \subset B$.

أمثلة :-

١- إذا كانت $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ فإن $A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$A \subseteq B \ , \ B \subseteq A \ \ggg\ggg A = B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- $A = \{1, 5, 7, 9\} \quad , \quad B = \{9, 7, 5, 1\}$

2- $A = \{2,5,9\} \quad , \quad B = \{a, s, d\}$

الحل

$1 - A = B$

$2 - A \equiv B$

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B $(A \cup B)$ هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :-

إذا كان $A = \{1, 2, 3, 7\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ أوجد $(A \cup B)$ ؟

الحل

(AUB) = {1 ,2 , 3, 4, 6, 7, 8}

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B (A∩B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في Aو في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان {3 , 2 , 1 , 0 , 1- } = Aو {,B = {0,2,4,6 أوجد A ∩ B

الحل

(A ∩ B) = {0 , 2 }

المكملة أو المتممة :-

يقال أن$\bar{A}$مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A.

مثال

إذا كان {U = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10و {A={2,4,6,8,10 أوجد

الحل

$\bar{A}$ = {1,3,5,7,9}

الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .

مثال :-

إذا كانت {A={1,2,3,x,y و {B={3,4,5,x,w أوجد A-B

الحل

A-B = { 1 , 2 , y }

مثال شامل :

إذا كانت :- {B={3,4,5,x,w و {A={1,2,3,x,y}

و المجموعة الكلية

1- A∪B
2- A ∩ B
3- B – A
4- $\bar{A}$
5- $\bar{B}$
6- $\bar{A} \cup \bar{B}$
7- $\bar{A} \cap \bar{B}$
8- $\bar{A}$ ∪ A
9- $\bar{A}$ ∩ A

$U = \{ 1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد :-

الحل

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$

2- $A \cap B = \{3, X\}$

3- $B - A = \{4, 5, w\}$

4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$

5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$

8- $\overline{A} \cup A = U$

9- $\overline{A} \cap A = \{\ \}$

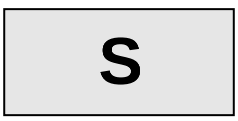
أشكال ِفنْ

VIN Figures

يمكن تمثيل المجموعات والعمليات المختلفة عليها من خلال استعمال اشكال هندسية تسمى أشكال ِفنْ وذلك وفق ما يلي:

١- المجموعة الكلية:

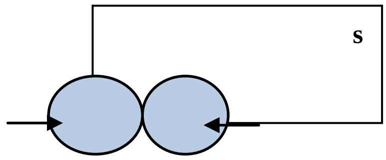
تمثل المجموعات الكلية بمستطيل ويرمز لها بالرمز S



S

٢- إتحاد الحوادث Events Union :

لأي حادثتين A و B فإن الحادثة التي تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B أو إلى كليهما معا يطلق عليها إتحاد حادثتين ويرمز لها (A B) أو (A أو B) والشكل التالي يوضح ذلك:



شكل ِفنْ لتمثيل إتحاد حادثتين A و B

$(A \cup B)$

وبشكل عام لأي n حادثة A1 , A2, A3, ... An فإن إتحاد هده الحوادث هو :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 ...... \cup_n$$

ويمكن القول أن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ هو حدث يقع إذا وقع أحد هذه الحوادث Ai على الأقل وهو ما يطلق عليه جمع الأحداث

الإتحاد :- يعني اتحاد المجموعتين A و B وهو مجموع العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين دون تكرار العناصر.

مثال:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cup B)$ **= {1, 2, -6, -7, -11}**

خواص العمليات الجبرية لإتحاد الحوادث:

- **إدا كانت A و B و C ثلاث حوادث فإن :**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

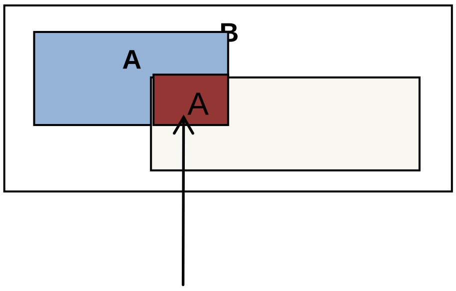
ويعني ذلك توزيع الإتحاد على التقاطع.

- وكذلك هناك خاصية التبديل والتي تعني أن

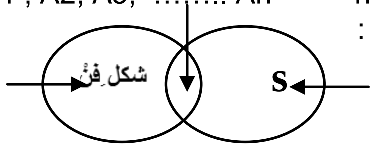
$$(A \cup B) = (B \cup A)$$

٣- تقاطع الحوادث Events Intersection :

لأي حادثتين A و B فإن الحادثة التي تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى A و B أو إلى كليهما معا في نفس الوقت يطلق عليها تقاطع حادثتين ويرمز لها (A   B) أو (A و B) وباستخدام أشكال ِفنْ يكون الجزء المحدد بـ A and B هو الذي يمثل تقاطع الحادثتين :



وبشكل عام لأي n حادثة A1 , A2, A3, …….. An فإن تقاطع هذه الحوادث هو :



$$(A \cap B)$$

B

فإن تقاطع هده الحوادث هو : A1 , A2, A3, …….. An حادثة nوبشكل عام لأي

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots\ldots \cap_n$$

ويمكن القول أن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ هو حدث يقع إذا وفقط وقعت كل الحوادث Ai على الأقل وهو ما يطلق عليه ضرب الحوادث

التقاطع :- إذا هو مجموعة العناصر المشتركة بين مجموعتين أو أكثر.

مثال:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cap B)$ **= {-6, -7}**

خواص العمليات الجبرية لتقاطع الحوادث:

- إذا كانت :C و B و A ثلاث حوادث فإن :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

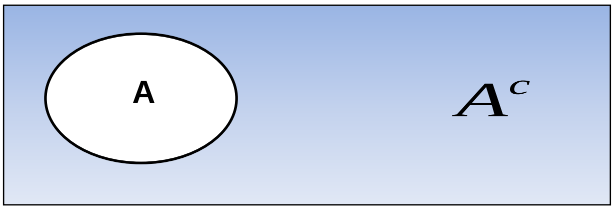
ويعني ذلك توزيع التقاطع على الإتحاد

- وكذلك هناك خاصية التبديل والتي تعني $(A \cap B) = (B \cap A)$

٤- الحادثة المتممة Complementary Event

فإن متممتها هي الحادثة التي تتضمن كافة العناصر التي لا تنتمي A ويرمز لها بالرمز A^c أو $\overline{A}$

وهو حدث يتألف صر غير المنتمية إلى A وباستخدام أشكال ِ فنْ فإن الجزء المظلل يمثل الحادثة المتممة من



$$\overline{A} \quad A^{c}$$

شكل فن لتمثيل مكملة حادثة A

مثال:

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

A={1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

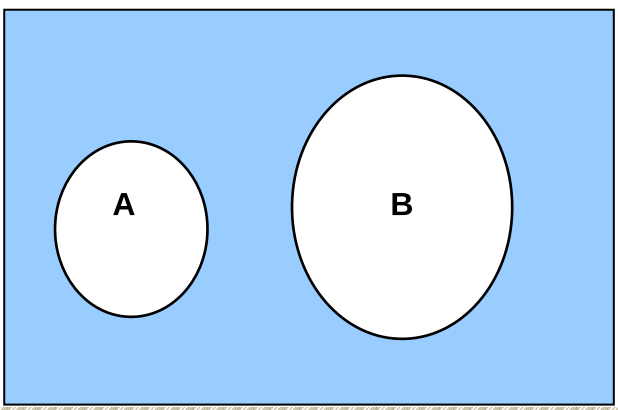
B={1, 2, 3, 6, 8, 11, 12, 14, 16}

$\overline{A}$ ={2, 4, 6, 20}

$\overline{B}$ ={4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20}

٥-الحوادث المتنافية Mutually Execlusive Events :

الحادثتان A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كان تقاطعهما خاليا أي أن $A \cap B = \phi$ ويمكن القول أيضا أن $A \cap A^{c} = \phi$



$$A \cap B = \phi$$

$$A \cap A^{c} = \phi$$

بعض العلاقات المهمة :-

$$\overline{B\cup A}=\overline{B}\cap\overline{A} \qquad A\cup A^c=S$$

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \qquad A\cap A^c=\phi$$

إذا كانت $A\subset B$ فإن:

$A=A\cap B$

$B=A\cup B$

$\overline{B}\subset\overline{A}$

$$\overline{S}=\phi$$

$$\overline{\phi}=S$$

$$A\cup S=S$$

$$A\cap S=A$$

$$A\cap\phi=\phi$$

و = ∩
أو = ∪

أمثلة وتمارين

يراد شراء ثلاثة أنواع من اللحوم من جزار معين، فإذا رمزنا للحم الدجاج بـ A ولحم الضأن بـ B ، ولحم العجل بـ C فإن :

– توفر أنواع اللحوم الثلاثة يعني توفر لحم A و B و C أي بمعنى

$A\cap B\cap C$.

– عدم توفر أي نوع من اللحوم يعني عدم توفر A و B و C أو كلها أي بمعنى :

$\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

– توفر نوع واحد من اللحوم على الأقل هو توفر A أو B أو C أو كلها أي بمعنى : $A\cup B\cup C$

– توفر نوع A فقط يعني : $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

– توفر نوع واحد من اللحم يعني إما توفر A وعدم توفر النوعين الآخرين أو توفر B وعدم توفر النوعين الآخرين ، أو توفر C

$$(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$$

تمارين :-

١- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: عدد سالب و موجب x }

(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }

(c) C = {x: دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية x }

(d) D = { 2 , 4 , 6 , …….,100}

(e) E = { 100 , 200 , 300 ,…….}

(f) F = { w , e , r , t }

٢- إذا كانت $A = \{3 , 5 , 7\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- $A = \{5 ,10 ,15 ,20\}$, $B = \{15 ,10 ,5 , 20\}$

2- $A = \{20,50,70\}$, $B = \{k , d , u\}$

إذا كانت $U = \{0 , 1, 2, 3,……,10\}$ وكانت $C = \{6, 7,8, 9,10\}$ ، $B = \{1 , 2 ,3 ,4 ,5\}$ ، $A = \{2, 4 ,6 ,8 ,10\}$
فجد ما يلي:-

1- $A \cup B$	5- $A \cap \bar{C}$
2- $A \cap C$	6- $A - (B \cap C)$
3- $\bar{A} \cap \bar{B}$	7- $(\bar{A} \cup B) - C$
4- $B \cup C$	8- $\overline{(\bar{B} \cap \bar{C})}$

حل المثال :-

1- $A \cup B = \{ 1 , 2 , 3 ,4 , 5 ,6 , 8 , 10 \}$

2- $A \cap C = \{ 6 , 8 , 10 \}$

3- $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = \{ 0 , 7 ,9 \}$

4- $B \cup C = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 ,10 \}$

5- $A \cap \bar{C} = A - C = \{ 2 , 4 \}$

6- $A - (B \cap C) = B \cap C = \emptyset$

$A - (B \cap C) = A - (\emptyset) = A$

7- $(\bar{A} \cup B) - C$

$\bar{A} = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$

$\bar{A} \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

$(\bar{A} \cup B) - C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

8- $(\overline{\bar{B} \cap \bar{C}}) = \overline{(\overline{B \cup C})} = B \cup C$

$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

تمارين :-

٤- إذا كانت

$A=\{8,10,12,r,m\}$ و $B=\{4,6,10,o,r\}$

أوجد المجموعة الكلية

ثم أوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\bar{A}$
5- $\bar{B}$
6- $\bar{A} \cup \bar{B}$
7- $\bar{A} \cap \bar{B}$
8- $\bar{A} \cup A$
9- $\bar{A} \cap A$

٥- نفترض أن $A = \{3,4,5,x,y\}$ و $B = \{4,x,y,z\}$ ضع الرمز $\in$ أو $\notin$ في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة .

$(i)\ 3$ ——— A

$(ii)\ 3$ ——— B

$(iii)\ x$ ——— A

$(iv)\ x$ ——— B

$(v)\ z$ ——— A

$(vi)\ z$ ——— B

$(vii)\ 1$ ——— A

$(viii)\ 1$ ——— B

المحاضرة (٢)

نظرية الاحتمالات

تعريف الاحتمالات:

يمكن تعريف الاحتمالات بطرق عديدة غير أن أبسطها

معين"(Event)"هو مقياس لامكانية وقوع حدث

وتستعمل كلمة احتمالات بشكل دائم في حياتنا اليومية مثل:

- احتمال أن ينجح الطالب في مقرر دراسي.
- احتمال نزول المطر اليوم

وفي أحيان أخرى تستخدم كلمة احتمالات ككلمة مرادفة لبعض الكلمات الأخرى مثل: ممكن، غالبا، مؤكد، مستحيل ...

وقد ارتبط المفهوم التقليدي للاحتمال بألعاب الحظ لمدة طويلة، وتختلف درجة إمكانية تحقق أي حادثة من شخص إلى آخر حسب خبرته والمعلومات المتوفرة لديه عن الحادثة

وقد تطور علم الاحتمالات تطورا كبيرا وسريعا وأصبح أساسا لعلم الإحصاء وبحوث العمليات وغيرها.

١ ـ التجربة العشوائية:-

هي تلك التجربة التي تكون جميع نتائجها معلومة مسبقا ولكن لا يمكن التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج بصفة مؤكدة مثلا:

رمي حجر نرد مرة واحدة يعتبر تجربة عشوائية، حيث نعلم جميع قيم نتائج التجربة وهي إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ولكن لا يمكن تحديد أي الأرقام يظهر إلى الأعلى بصورة مؤكدة قبل إجراء التجربة.

- رمي عملة معدنية مرة واحدة أو عدد من المرات يعتبر تجربة عشوائية معروف جميع نتائجها قبل أن تبدأ التجربة، ولكن لا يمكن الجزم بظهور أي منها في رمية معينة.
- المشاركة في سباق الخيل لحصان معين يعتبر تجربة عشوائية فهو إما أن يفوز أو يخسر أو يتعادل.

٢ـالحادث والفراغ العيني:

فراغ العينة هو المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له

Ω و يطلق عليه الحالات الممكنه

افترض أننا نقوم بإجراء تجربة ما كرمي زهرة النرد مثلاً ونلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الأوجه الستة ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم فردي أي ١ أو ٣ أو ٥ من التجربة . وهكذا فإن عملية رمي الزهرة تسمى تجربة (Experiment) وظهور رقم فردي هو محل اهتمامنا يسمى حادثاً (Event) ومجموعة جميع الحالات الممكنة الظهور تسمى بالفراغ العيني (Sample Space) ويلاحظ أن الحادث قد يكون حالة او اكثر من الفراغ العيني .

الحادثة هي مجموعة جزئية من فراغ العينة وتمثل مجموعة النتائج التي تحقق الحدث وتسمى أيضا الحالات المواتية Favorable Cases ، فمثلا الحصول على رقم زوجي في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة تكون الحادثة هي {٢ ، ٤ ، ٦} ، ويمكن أن تحتوي الحادثة على عنصر واحد أو أكثر.

٣ـ أنواع الحوادث :-

أـ الحوادث المتنافية

يقال عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا. فمثلاً عند رمي عملة معدنية لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد .

ب-الحوادث المستقلة

يعتبر الحادثين A أو B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الآخر. فمثلاً عند رمي قطعة عملة واحدة مرتين متتاليتين فإن نتيجة الرمية الثانية لا تتأثر بنتيجة الأولى

جـ -الحوادث الشاملة

تسمى الحوادث C ، B ، A .... حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لابد من حدوث إحداها عند إجراء التجربة. فمثلاً عند اختيار طالب من الجامعة لمعرفة حالته ما إذا كان مدخنا أو غير مدخن تعتبر هذه الحالات حوادث شاملة لأنه لابد للفرد أن يكون له صفة واحدة من هذه الصفات. كذلك فإن الحصول على العدد ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ عند رمي حجر النرد تعتبر حوادث شاملة لأنه لابد من حدوث إحداها .

مثال

رمي حجر نرد مرة واحدة ، أحسب التالي:

- احتمال الحصول على رقم ٥
- احتمال الحصول على رقم زوجي
- احتمال الحصول على رقم أكبر من ٢
- احتمال الحصول على رقم أقل من ٧
- احتمال الحصول على رقم ٧

الحل:

فراغ العينة لهذه التجربة هو : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فيكون بالتالي الحل كما يلي:

$$P_{(A=5)}=\frac{1}{6}$$

$$P_{(A=2,4,6)}=\frac{3}{6}$$

$$P_{(A>2)}=\frac{4}{6}$$

$$P_{(A<7)}=\frac{6}{6}=1$$

$$P_{(A=7)}=\frac{0}{6}=0$$

ويستنتج من ذلك أن أقل قيمة للاحتمال تساوي الصفر ويقال أن الحدث في هذه الحالة (حدث مستحيل) بينما تساوي واحد إذا كان الحدث مؤكد.

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

- أن يكون أعزبا
- أن يكون متزوجا
- أن يكون من القسم الأول
- أن يكون من القسم الأول أو الثاني
- أن يكون من القسم الأول وأعزب

الحل:

نفرض أن الحادثة A أن يكون العامل أعزب أي A= {أن يكون العامل أعزب} فيكون الاحتمال المطلوب

$$P(A)=\frac{\text{عدد العمال العزاب}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 23/50= 0.46$$

نفرض أن الحادثة B أن يكون العامل متزوج أي أن B = {أن يكون العامل متزوج} فيكون الإحتمال المطلوب

$$P(B)=\frac{\text{عدد العمال المتزوجين}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 27/50= 0.54$$

نفترض ان الحادثة C أن يكون العامل القسم الأول C أي = { أن يكون العامل من القسم الأول } فيكون الإحتمال المطلوب

$$P(C)=\frac{\text{عدد عمال القسم الأول}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 12/50= 0.24$$

نتفرض ان الحادثة D ان يكون العامل القسم الاول او الثاني D أي = { ان يكون العامل من القسم الاول او الثاني } فيكون الاحتمال المطلوب

P(D)= عدد عمال القسم الأول أو الثاني / عدد العمال الكلي = (12+22)/50=34/50= 0.68

نفترض ان الحادثة E ان يكون العامل من القسم الاول و أعزب أي ان E = { أن يكون العامل من القسم الاول و أعزب } فيكون الاحتمال المطلوب

P(E)= عدد عمال القسم الاول و أعزب / عدد العمال الكلي = 5/50= 0.1

جمع الاحتمالات

أ- في حالة كون الحوادث متنافية

إذا كانت الحوادث A1 , A2 , A3 .... حوادث متنافية بمعنى أن حدوث أحدها يؤدي إلى استحالة حدوث أي من الحوادث الأخرى وبالتالي فإن احتمال حدوث هذه الحوادث معاً يكون معدوماً فإن

احتمال وقوع أي حادث من الحوادث المتنافية يساوي مجموع احتمالات وقوع هذه الحوادث

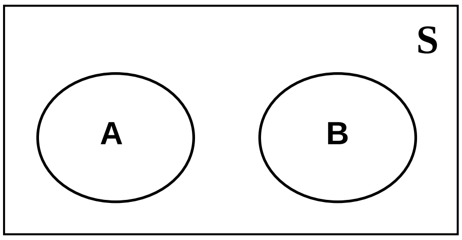
فإذا كان A ، B حادثين متنافيين كما في الشكل (١)

فإن P (A أو B) = P(A) + P(B)

يرمز أيضاً لاحتمال وقوع أحد الحادثين بالرمز

حوادث متنافية

P (AUB) = P (A) + P (B)



حوادث متنافية

مثال:

رمي حجر نرد مرة واحدة ، احسب:

احتمال الحصول على رقم ٥ أو ٦

احتمال الحصول على رقم زوجي

الحل:

حيث أن الحصول على رقم ٥ أو ٦ حادثتان متنافيتان ، أي أن:

A1={الحصول على الرقم ٥} ، و A2= {الحصول على الرقم ٦} فإن:

$P(A1 \cup A2)=(1/6)+(1/6)=1/3$

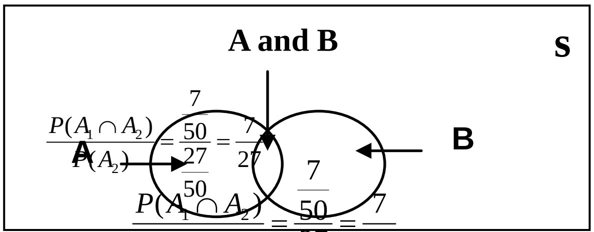
وحيث أن الحصول على رقم زوجي يعني الحصول على رقم ٢ أو رقم ٤ أو رقم ٦ وكلها حوادث متنافي، أي أن:

A1= {الحصول على الرقم ٢} ، و A2= {الحصول على الرقم ٤} ، و A3= {الحصول على الرقم ٦} فإن:

$$P(A1 \cup A2 \cup A3)=(1/6)+(1/6)+(1/6) = 1/2$$

ب- في حالة كون الحوادث غير متنافية

عند عدم اشتراط تنافي الحادثين A و B يكون المقصود بالحادث (A أو B) وقوع A على انفراد أو وقوع B على انفراد أو وقوع الحادثين A و B معا في وقت واحد كما يتضح من الشكل التالي



$$\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{7}{27}$$

حوادث غير متنافية

الآن P (A) + P (B) تمثل مجموع الحالات المواتية للحادث A مضافاً إليها مجموع الحالات المواتية للحادث B ولكن يجب ملاحظة أن كل من الحالات المواتية للحادث A وتلك المواتية للحادث B تتضمن الحالات المواتية لوقوع A و B معاً ، وبهذا فإنه في حالة جمع P (A) و P (B) فإننا نجمع
P (A و B) مرتين ، لهذا لابد من طرح P (A و B) مرة واحدة لنحصل على الاحتمال P (A أو B) وهذا هو :

P (A او B)= P (A) + P (B) – P (A و B)

أو

$$P (A\cup B) = P (A) + P(B) – P (A \cap B)$$

مثال:-

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- **احتمال أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني.**
- **احتمال أن يكون العامل متزوجا أو من القسم الأول**
- **احتمال أن يكون العامل من القسم الثالث أو أعزب**

الحل:

نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل من القسم الأول أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل من القسم الثاني أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الثاني}

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1)=12/50$

$P(A2)=22/50$

$$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2) = (12/50)+(22/50) = 34/50 = 0.68$$

نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل متزوجا أي أن A1 = {أن يكون العامل متزوج}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل من القسم الأول أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1)=27/50$

$P(A2)=12/50$

$$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (27/50)+(12/50)-(7/50) = 32/50 = 0.64$$

نفرض أن الحادثة A1 أن يكون العامل من القسم الثالث أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الثالث}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون العامل أعزب أي أن A2 = {أن يكون العامل أعزب}

فيكون الاحتمال المطلوب:

$P(A1)=16/50$

$P(A2)=23/50$

$P(A1 \cup A2) = P(A1)+P(A2)-P(A1 \cap A2) = (16/50)+(23/50)-(10/50) = 29/50 = 0.58$

Conditional Probability الاحتـمال الشرطي

إذا كان لدينا الحادثين A1 , A2 وكان P(A2) لا يساوي الصفر فإن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يعطي بالمعادلة التالية:

$$P(A1 \mid A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث A1 بشرط وقوع الحادث A2 يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ A1 , A2 على احتمال الحادث A2

مثال:

إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات 0.64 واحتمال نجاحه في مقرر الإحصاء ومقرر الرياضيات معا 0.32 فما هو احتمال نجاحه في مقرر الإحصاء؟ علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات.

الحل:

نفرض أن A1={نجاح الطالب في مقرر الإحصاء}

A2={نجاح الطالب في مقرر الرياضيات}

وبذلك يكون:

$P(A2)=0.64$

$P(A1 \cap A2)=0.32$

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو حساب P(A1 | A2) وبتطبيق العلاقة :

$$P(A1 \mid A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.32}{0.64} = 0.5$$

إذا احتمال نجاح الطالب في مقرر الإحصاء علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات هو 0.5

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الدي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- **احسب احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج؟**
- **احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث؟**

الحل :

نفرض أن A1={أن يكون العامل من القسم الأول}

A2={أن يكون العامل متزوج}

B3={أن يكون العامل من القسم الثالث}

B4={أن يكون العامل أعزب}

فيكون بالتالي:

١- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو:

احتمال أن يكون من القسم الأول ومتزوج

احتمال أن يكون متزوج

P (A1|A2) = $$\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{7}{27}$$

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو 0.259

٢- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو:

احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث

احتمال أن يكون من القسم الثالث

$$P\ (B1|B2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{16}{50}} = \frac{10}{16}$$

إذا احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو 0.625

ضــرب الاحتــمالات

إن احتمال حدوث حادثين مستقلين أو أكثر معاً يساوي حاصل ضرب احتمال حدوث كل واحد من هذه الحوادث

فمثلا إذا كان لدينا صندوق به ١٠ كرات متماثلة منها ٦ بيضاء و ٤ سوداء وسحبنا كرة من الصندوق فإن احتمال أن تكون بيضاء **6/10** واحتمال أن تكون سوداء **4/10**، فإذا أعدنا الكرة إلى الصندوق (ليصبح العدد مكتملا كما كان) وسحبنا الكرة مرة أخرى فإن احتمال أن تكون بيضاء **6/10** واحتمال أن تكون سوداء **4/10** ، فتكرار العملية يؤدي إلى نفس الاحتمال.
ومن هذا نرى أن نتيجة السحب الأول لا تؤثر على نتيجة السحب الثاني وهذا ما يسمى سحب بإرجاع أو إحلال أو إعادة.

فإذا كان لدينا الحادثين المستقلين A1 و A2 فإن احتمال حدوثهما معا هو:

P(A1∩A2) = P(A1) P(A2)

بمعنى أن احتمال وقوع حدثين مستقلين معا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع أي منهما بمفرده في احتمال وقوع الحدث الآخر بمفرده وفي حالة التعميم لـ n فإن :

P(A1 ∩ A2 ∩ A3 ∩ .... An) P (A1) P (A2) P (A3) ...... P(An)

مثال:

إذا رمينا قطعة نقود مرة واحدة ، احسب الاحتمالات التالية:

- أن تكون الأولى صورة والثانية كتابة.
- أن تكون كلتاهما صورة.

الحل:

نفرض أن: A1={ظهور صورة في الرمية الأولى}

A2={ظهور كتابة في الرمية الثانية}

فيكون :
$$P(A_1) = \frac{1}{2} \quad , P(A_2) = \frac{1}{2}$$

حيث أن الحادثتان A1 و A2 مستقلتين فإن احتمال أن تكون الرمية الأولى صورة والثانية كتابة هو :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times (P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

نفرض أن: B1={ظهور صورة في الرمية الأولى}

B2={ظهور صورة في الرمية الثانية}

فيكون

$$P(B_1) = \frac{1}{2} \quad , P(B_2) = \frac{1}{2}$$

وحيث أن الحادثتان B1 و B2 مستقلتين فإن احتمال أن تكون الرمية الأولى صورة والثانية صورة هو :

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times (P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

مما سبق يمكن القول أن الحوادث المعطاة تكون مستقلة عندما تبقى الاحتمالات ثابتة مثل الحوادث:

١- رمي قطع نقود (أو قطعة واحدة عدة مرات)

٢- رمي أحجار نرد (أو حجر نرد عدة مرات)

٣- السحب مع الإرجاع (أو الإعادة)

مثال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به فإذا سحب عاملان من المصنع مع الإرجاع (أي إرجاع العامل الأول قبل سحب العامل الثاني) احسب :

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	5	7	12
القسم الثاني	8	14	22
القسم الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير عاملان من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

1. احتمال أن يكون العاملان من القسم الأول؟
2. احتمال أن يكون العاملان متزوجان؟
3. احتمال أن يكون للعاملين نفس الحالة الاجتماعية؟
4. احتمال أن يكون العاملان من القسم نفسه؟

الحل:

١- احتمال أن يكون العاملان من القسم الأول يعني أن يكون العامل الأول من القسم الأول (الحادثة A1) والعامل الثاني من القسم الأول (الحادثة A2) وحيث أنهما مستقلان (لأن السحب مع الإرجاع) فإن:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times (P(A_2) = \frac{12}{50} \times \frac{12}{50} = \frac{144}{2500} = 0.0576$$

٢- احتمال أن يكون العاملان متزوجان ، يعني أن يكون العامل الأول متزوج (الحادثة B1) والعامل الثاني متزوج (الحادثة B2) وحيث أنهما مستقلان (لأن السحب مع الإرجاع) فإن:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times (P(B_2) = \frac{27}{50} \times \frac{27}{50} = \frac{729}{2500} = 0.2916$$

٣- احتمال أن يكون للعاملين نفس الحالة الاجتماعية يعني أن يكون العاملان كلاهما متزوجين (الحادثة A) أو أن يكون كلاهما أعزبين (الحادثة B) فإن:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + (P(B) \\ &= P(A_1A_2) + P(B_1B_2) \\ &= P(A_1 \times A_2) + P(B_1 \times B_2) \\ &= \left[\frac{27}{50} \times \frac{27}{50}\right] + \left[\frac{23}{50} \times \frac{23}{50}\right] = 0.5032 \end{aligned}$$

٤- احتمال أن يكون العاملان من القسم نفسه يعني أن يكون العاملان كلاهما من القسم الأول (الحادثة A) أو أن يكون كلاهما من القسم الثاني (الحادثة B) أو أن يكون كلاهما من القسم الثالث (الحادثة C) فإن:

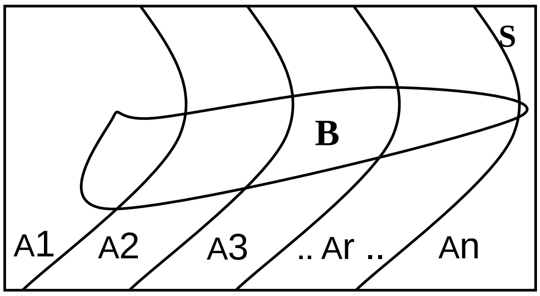
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + (P(B) + (P(C) \\ &= P(A_1A_2) + P(B_1B_2) + P(C_1C_2) \\ &= P(A_1 \times A_2) + P(B_1 \times B_2) + P(C_1 \times C_2) \\ &= \left[\frac{12}{50} \times \frac{12}{50}\right] + \left[\frac{22}{50} \times \frac{22}{50}\right] + \left[\frac{16}{50} \times \frac{16}{50}\right] = 0.3536 \end{aligned}$$

نظريـــة بايــز (Bayes' Theorem)

إذا كانت A1, A2, ... An مجموعة أحداث متنافية وكانت احتمالات حدوثها

P(A1), P(A2), ... P(An) وإذا كان هناك حدث B يحدث إذا حدث أي من الأحداث المتنافية أنظر الشكل بالأسفل ، فإن احتمال حدوث الحدث Ar بشرط حدوث B هو :

$$P(A_r|B)=\frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)} \qquad 1\le r\le n$$



مثال:-

مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى ٢٠% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٣٥% والثالثة بنسبة ٤٥% ، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٢% و ٢.٥% و ٣% ، سحبت وحدة عشوائيا من إنتاج المصنع فوجد أنها معيبة، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الأولى؟

٢- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الثانية؟

الحل:

نفرض أن

A1={إنتاج الآلة الأولى} P(A1)=0.2

A2={إنتاج الآلة الثانية} P(A2)=0.35

A3={إنتاج الآلة الثالثة} P(A3)=0.45

B= {إنتاج سلعة معينة}

فيكون بالتالي:

P(B|A1)=0.02

P(B|A2)=0.025

P(B|A3)=0.03

تكون السلعة من إنتاج الآلة الأولى إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.2\times0.02}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.152$$

واحتمال أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الثانية إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.35\times0.025}{(0.2\times0.02)+(0.35\times0.025)+(0.45\times0.03)}=0.333$$

مثال:-

مستشفى به أربعة أقسام، نسب عمال النظافة في هذه الأقسام هي ٣٠% ، ٤٠% ، ٢٠% ، ١٠% على التوالي، إذا كانت نسب العمال المدخنين بهذه الأقسام هي ١٥% ، ١٨% ، ١٢% ، ٩% على التوالي، اختير عامل عشوائيا فوجد أنه مدخن ، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن يكون العامل من القسم الأول؟

٢- أن يكون العامل من القسم الثاني؟

٣- أن لا يكون العامل من القسم الأول؟

الحل:

A1={أن يكون العامل من القسم الأول}	P(B|A1)=0.15	P(A1)=0.3
A2={أن يكون العامل من القسم الثاني}	P(B|A2)=0.18	P(A2)=0.4
A3={أن يكون العامل من القسم الثالث}	P(B|A3)=0.12	P(A3)=0.2
A4={أن يكون العامل من القسم الرابع}	P(B|A4)=0.09	P(A4)=0.1

احتمال أن يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.3\times0.15}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.3$$

واحتمال أن يكون العامل من القسم الثاني إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.4\times0.18}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.48$$

واحتمال أن لا يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1^c|B)=1-0.3=0.7$$

تمارين واجب :-

١- عرف المصطلحات التالية :-

(التجربة العشوائية – فراغ العينة – الحادث – الحوادث المتنافية – الحوادث المستقلة – الحوادث الشاملة) .

٢- الجدول التالي يمثل توزيع موظفي أحد الشركات حسب الحالة الاجتماعية للموظف والمستوى الاداري الذي يعمل به

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
مستوى الادارة الدنيا	10	14	24
مستوى الادارة المتوسطة	16	28	44
مستوى الادارة العليا	20	12	32
المجموع	46	54	100

أولاً :-اختر موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- أن يكون أعزبا.
- أن يكون متزوجا .
- أن يكون من مستوى الادارة الدنيا.
- أن يكون من مستوى الادارة الدنيا أو المتوسطة .
- أن يكون من مستوى الادارة الدنيا وأعزب .

ثانياً : اختير موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احسب احتمال أن يكون موظفي الادارة الدنيا بشرط أنه متزوج؟
- احتمال أن يكون الموظف أعزب بشرط أنه من موظفي الادارة العليا ؟

ثالثاً : تم اختيار ٢ موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- **احتمال أن يكون الموظفين من الادارة الدنيا ؟**
- **احتمال أن يكون الموظفين متزوجان؟**
- **احتمال أن يكون للموظفين نفس الحالة الاجتماعية؟**
- **احتمال أن يكون الموظفين من القسم نفسه؟**

٣- مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى ٤٠% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٢٥% والباقي من إنتاج الالة الثالثة، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٤% و ٣% و ٥.٥% ، سحبت وحدة عشوائيا من إنتاج المصنع فوجد أنها جيدة ، احسب الاحتمالات التالية:

- **أن تكون القطعة الجيدة من إنتاج الآلة الأولى؟**
- **أن تكون القطعة الجيدة من إنتاج الآلة الثانية؟**