الأساليب الكمية

د. ملفـي الرشيـدي

ترآتيل المسآء

المحاضرة السادسة

الطريقة المبسطة Simplex Method

المؤسس: Dr. Dantzing عام 1947

وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحل الأمثل لمسائل البرمجة الخطية، بغض النظر عن عدد متغيرات المسألة.

ساعد في انتشارها إمكانية برمجة المشكلات ذات العلاقة والتوصل الى نتائج باستخدام الحاسب الآلي.

اساسيات طريقة السمبلكس

تقوم فكرة السمبلكس على وجود الحل الامثل دائما عند احد اركان منطقة الحلول الممكنة. لكن بدلاً من ميزة رؤية هذه الاركان كما يظهرها الرسم البياني، تستخدم طريقة السمبلكس

عملية التحسن التدريجي:

١. **يجب ان يكون الركن التالي مجاور للركن الحالي.**
٢. **لا يمكن ان يعود الحل في اتجاه عكسي الى ركن تم تركه.**

الشكل القياسي (الصورة القياسية) Standard Form

يعتبر الشكل القياسي من الأشكال المهمة حيث لا يمكن تطبيق الطريقة المبسطة إلا بعد تحويل نموذج البرمجة الخطية الى الشكل القياسي:

١. **تتخذ دالة الهدف صفة التعظيم أو التصغير.**
٢. **جميع القيود الموجودة على شكل متباينات تتحول الى مساواة في الشكل القياسي على الشكل التالي:**

I. **إذا كانت إشارة القيد على شكل ≥ فإننا نضيف متغير راكد الى الطرف الأيسر في القيد.**
II. **إذا كانت إشارة القيد على شكل ≤ فإننا نطرح متغير راكد من الطرف الأيسر في القيد.**
III. **جميع المتغيرات (بما فيها المتغيرات الراكدة) غير سالبة.**
IV. **نقوم بنقل الطرف الأيمن من دالة الهدف الى الطرف الأيسر (عند Z) مع اضافة المتغيرات الراكدة بمعاملات ص**
V. **فرية مساوية لعدد القيود.**

مثـــــال

حول النموذج التالي الى الشكل القياسي.

$$\text{Max } Z = 5*X1 + 3*X2$$

s.t.

$$4\times X_1 + 3\times X_2 <= 2$$
$$2\times X_1 + X_2 >= 3$$
$$X_1, X_2 >= 0$$

- ✓ **ننقل الطرف الأيمن من دالة الهدف الى الطرف الأيسر ليصبح:**

$$\text{Max } Z - 5\times X_1 - 3\times X_2 = 0$$

- ✓ **نضيف متغير راكد موجب مثل S1 في الطرف الايسر للقيد الأول ليصبح:**

$$4\times X_1 + 3\times X_2 + S1 = 2$$

- ✓ **نطرح متغير راكد موجب مثل S2 في الطرف الايسر للقيد الثاني ليصبح:**

$$2\times X_1 + X_2 - S2 = 3$$

نسمي S1, S2 متغيرات راكدة Slack Variables

الشكل القياسي للمثال السابق :

$$\text{Max } Z - 5\times X_1 - 3\times X_2 = 0$$

s.t.

$$4\times X_1 + 3\times X_2 + S1 = 2$$

$$2\times X_1 + X2 - S2 = 3$$

$$X_1, X_2, S1, S2 >= 0$$

المطلوب اجاد تحويل البرنامج الي برنامج (الشكل)القياسي

$$\text{Max } z=3x_1-2x_2+10x_3$$

s.t

$4x_1 - 10x_2+3x_3 \le 100$

$-3x_1+ 4x_2 \ge 80$

$X_2 - x_3 \ge 40$

$X_1 ,x_2, x_3 \ge 0$

المثال هذا يتكون من ثلاث متغيرآت مع اختلاف الاشارات المعاملات
أذا اول خطوه بالحل سوف تكون بنقل معاملات داله الهدف من
الطرف الايمين الي الايسر مع مرعاه تغير الاشارات

الحل يبدأ

Max $z -3x_1+2x_2-10x_3 = 0$

s.t

$4x_1 - 10x_2+3x_3 + S_1 = 100$

$-3x_1 + 4x_2 - S_2 = 80$

$x_2 +x_3 - S_3 = 40$

$X_1 ,x_2, x_3 ,s_1,s_2,s_3 \ge 0$

القيد الاول $4x_1 - 10x_2+3x_3 \le 100$

الخطوه الثانيه النظر الي اشارات القيود نجد ان $\le$ هنا سوف
يضاف راكد اول هو S_1 لتخلص من المتباينه الاولى

القيد الثاني$-3x_1+ 4x_2 \ge 80$

هنا الاشاره $\ge$ سوف يطرح راكد الثاني s_2 لتخلص من المتباينه

القيد الثالث $X_2 - x_3 \ge 40$
لا يوجد معامل لـx_1 اذا فهو صفر وسوف نطرح راكد S_3
لتخلص من المتباينه مع ترتيب القيد

خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس

- **اولاً:** تحويل نموذج البرمجة الخطية الى الشكل القياسي Standard Form
- **ثانياً:** تفريغ المعاملات الواردة في النموذج القياسي في جدول يطلق عليه جدول الحل الابتدائي (الأولي).

المتغيرات الاساسية .Basic Var	المتغيرات غير الاساسية X1 X2 … Xm	S1 S2 … Sn	الثابت Solutions
S1	a11 a12… a1m	1 0 … 0	b1
S2	a21 a22 … a2m	0 1 … 0	b2
:	: : :	: : :	:
Sn	an1 an2 anm	0 0 1	bn
Z	c1 c2 … cm	0 0 …0	0

معاملات القيد ١,٢,٣...القيد الاخير sn

Z مع الصف تمثل داله الهدف

تمثل معامل المتغيرات بالقيود

مصفوفات قطريه اذا كان ١ فهو اضيف واذا كان بـ سالب ١ فهو طرح

هو طرف ثابت الذي يكون ع يمين اشاره المساواه

مثال

Max $z =10x_1-3x_2$

s.t

$4x_1 + 3x_2 \leq 12$

$x_1 + 5x_2 \leq 10$

$x_1 \geq 2$

$Max \quad z - 10x_1 + 3x_2 = 0$

s.t

$4x_1 + 3x_2 + s_1 = 12$

$x_1 + 5x_2 + s_2 = 10$

$x_1 - s_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

- ١- تحويل جميع عناصر z للاتجاه الاخر مع تغيير الاشاره
- ٢- ثم اضافه الراكد لكل قيد
- ٣- نشكل الجدول الأولى بناء ع البيانات
- ٤- نرتب المعاملات x وَ s اما الاصفار لعدم وجود معاملات لها وضحتها بالاسهم بأول قيد

متغيرات اساسيه	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الثابت
S_1	4	3	1	0	0	12
S_2	1	5	0	1	0	10
S_3	1	0	0	0	-1	2
z	-10	3	0	0	0	0

الحل الأمثل لوجود –

ثالثاً: التحقق من الأمثلية

يتم الحكم من خلال النظر الى صف z فإذا كانت جميع قيم المعاملات في هذا الصف صفريه اوموجبه فهذا يعني أننا قد توصلنا للحل الامثل.

أما اذا كان هناك على الاقل معامل واحد سالب فهذا يعني ان هناك مجال لتحسين الحل،

رابعاً: تحسين الحل: تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج

- المتغير الداخل:

في مسائل التعظيم، المتغير الداخل هو المتغير الذي له أكبر معامل سالب في دالة الهدف في جدول الحل.
ويطلق عليه العمود المحوري Pivot Column

- المتغير الخارج:

يتحدد عن طريق قسمة عمود الثوابت على القيم المناظرة لها في العمود المحوري مع إهمال المتغيرات ذات القيم السالبة او الصفرية. ويكون المتغير الخارج هو ذلك المتغير في الصف الذي يتضمن أقل خارج قسمة.
ويطلق عليه صف الارتكاز Pivot equation.

- نطلق على صف المتغير الخارج اسم معادلة الارتكاز. كما نطلق أسم "عنصر الارتكاز (العنصر المحوري)" pivot element على نقطة تقاطع العمود الداخل مع الصف الخارج

- نبتدي بتكوين الحل الاساسي الجديد بتطبيق طريقة "جاوس جوردان Gauss-Jordan" و التي تقوم على نوعين من العمليات الحسابية:

خامساً: تكوين الجدول الجديد

النوع ١ (معادلة الارتكاز)

معادلة الارتكاز الجديدة = معادلة الارتكاز القديمة / عنصر الارتكاز

النوع ٢ (كل المعادلات الاخرى بما فيها z).

معاملها معادلة

المعادلة الجديدة = المعادلة القديمة – في العمود * الارتكاز

الداخل الجديدة

- **ملاحظات:**

عمليات النوع الاول: ستجعل من عنصر الارتكاز يساوي ١ في معادلة الارتكاز الجديدة.

عمليات النوع الثاني: ستجعل كل المعاملات الاخرى في العمود الداخل مساوية للصفر.

تمثل نتائج كلا النوعين من العمليات الحسابية الحل الاساسي الجديد من خلال احلال المتغير الداخل في كل المعادلات الاخرى ما عدا معادلة الارتكاز