

**** تمارين واجب ******✕ التمرين الأول :**

١- عرف المصطلحات التالية :-

(التجربة العشوائية - فراغ العينة - الحادث - الحوادث المتنافية - الحوادث المستقلة - الحوادث الشاملة) .

التجربة العشوائية : هي تلك التجربة التي تكون جميع نتائجها معلومة مسبقا ولكن لا يمكن التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج بصفة.

فراغ العينة : هو المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز Ω ويطلق عليه الحالات الممكنة .

الحادث : هي مجموعة جزئية من فراغ العينة وتمثل مجموعة النتائج التي تحقق الحدث وتسمى أيضا الحالات المواتية Favorable Cases ، فمثلا الحصول على رقم زوجي في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة تكون الحادثة هي { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، ويمكن أن تحتوي الحادثة على عنصر واحد أو أكثر.

الحوادث المتنافية : يقال عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا. فمثلاً عند رمي عملة معدنية لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

الحوادث المستقلة : يعتبر الحادثين A أو B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الآخر. فمثلاً عند رمي قطعة عملة واحدة مرتين متتاليتين فإن نتيجة الرمية الثانية لا تتأثر بنتيجة الأولى.

الحوادث الشاملة : تسمى الحوادث A ، B ، C ... حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لابد من حدوث إحداهما عند إجراء التجربة.

✕ التمرين الثاني :

٢- الجدول التالي يمثل توزيع موظفي أحد الشركات حسب الحالة الاجتماعية للموظف والمستوى الإداري الذي يعمل به

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
مستوى الإدارة الدنيا	١٠	١٤	٢٤
مستوى الإدارة المتوسطة	١٦	٢٨	٤٤
مستوى الإدارة العليا	٢٠	١٢	٣٢
المجموع	٤٦	٥٤	١٠٠

أولاً :- اختر موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- أن يكون أعزباً.
- أن يكون متزوجاً .
- أن يكون من مستوى الإدارة الدنيا.
- أن يكون من مستوى الإدارة الدنيا أو المتوسطة .
- أن يكون من مستوى الإدارة الدنيا وأعزب .

الحل :

نفرض أن الحادثة **A** أن يكون الموظف أعزب أي $A = \{\text{أن يكون الموظف أعزب}\}$ فيكون الاحتمال المطلوب :

$$P(A) = \frac{\text{عدد الموظفين العزاب}}{\text{عدد الموظفين الكلي}} = \frac{46}{100} = 0.46$$

نفرض أن الحادثة **B** أن يكون الموظف متزوج أي أن $B = \{\text{أن يكون الموظف متزوج}\}$ فيكون الاحتمال المطلوب :

$$P(B) = \frac{\text{عدد الموظفين المتزوجون}}{\text{عدد الموظفين الكلي}} = \frac{54}{100} = 0.54$$

نفرض أن الحادثة **C** أن يكون الموظف من مستوى الإدارة الدنياأي أن $C = \{\text{أن يكون الموظف من مستوى الإدارة الدنيا}\}$ فيكون الاحتمال المطلوب :

$$P(C) = \frac{\text{عدد موظفين مستوى الإدارة الدنيا}}{\text{عدد الموظفين الكلي}} = \frac{24}{100} = 0.24$$

نتفرض أن الحادثة **D** أن يكون الموظف من مستوى الإدارة الدنيا أو المتوسطة . $D = \{\text{أن يكون الموظف من مستوى الإدارة الدنيا أو المتوسطة}\}$

فيكون الاحتمال المطلوب :

$$P(D) = \frac{\text{عدد موظفين مستوى الإدارة الدنيا أو المتوسطة}}{\text{عدد الموظفين الكلي}} = \frac{24+44}{100} = \frac{68}{100} = 0.68$$

• حدثان متنافيان أي لا يمكن حدوثهما معاً وذكرت أو بالسؤال أو + يتم جمع الحوادثنفترض أن الحادثة **E** أن يكون الموظف من مستوى الإدارة الدنيا وأعزب أي أن $E = \{\text{أن يكون الموظف من مستوى الإدارة الدنيا وأعزب}\}$ فيكون الاحتمال المطلوب :

$$P(E) = \frac{\text{عدد موظفين مستوى الإدارة الدنيا وأعزب}}{\text{عدد الموظفين الكلي}} = \frac{10}{100} = 0.1$$

الحل بطريقة الضرب :

$$P(E) = \frac{\text{عدد موظفين مستوى الإدارة الدنيا وأعزب}}{\text{عدد الموظفين الكلي}} = \frac{24}{100} \times \frac{46}{100} = 0.24 \times 0.46 = 0.1$$

• حدثان مستقلتان أي يمكن حدوث احدهما مما لا ياتر على الاخرى وذكرت و بالسؤال و = يتم ضرب الحوادث أو اختيار نقطة التقاء الحادثتين كم تم بحل السؤال .

ثانياً : اختيار موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احسب احتمال أن يكون موظفي الادارة الدنيا بشرط أنه متزوج؟
- احتمال أن يكون الموظف أعزب بشرط أنه من موظفي الادارة العليا ؟

الحل :

نفرض أن $A_1 = \{\text{أن يكون الموظف من مستوى الإدارة الدنيا}\}$

$A_2 = \{\text{أن يكون الموظف متزوج}\}$

$B_3 = \{\text{أن يكون الموظف من مستوى الإدارة العليا}\}$

$B_4 = \{\text{أن يكون الموظف أعزب}\}$

فيكون بالتالي:

١- احتمال أن يكون الموظف من موظفي الإدارة الدنيا بشرط أن يكون متزوج :

احتمال أن يكون من موظفي الإدارة الدنيا بشرط انه متزوج

احتمال أن يكون متزوج

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{14}{100}}{\frac{54}{100}} = \frac{14}{54}$$

إذا احتمال أن يكون الموظف من موظفي الإدارة الدنيا بشرط أنه متزوج هو : 0.259

٢- احتمال أن يكون الموظف أعزب بشرط أنه من موظفي الادارة العليا :

احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من موظفي الإدارة العليا

احتمال أن يكون موظفي الإدارة العليا

$$P(B_1 | B_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{20}{100}}{\frac{32}{100}} = \frac{20}{32}$$

إذا احتمال أن يكون الموظف أعزب بشرط أنه من موظفي الادارة العليا هو 0.625

- تم تطبيق القانون السابق الخاص بحالة (الاحتمال الشرطي) :

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$$

لكن بهذه الحالة لا يهم حفظ القانون فقط طريقة تطبيقه
احتمال شرطي / (لا يتحقق الحدث الاول إلا بشرط تحقق الحدث الثاني) يأخذ تقاطع الحدثين ثم يقسم على الحدث الثاني

ثالثاً : تم اختيار ٢ موظف من الجدول السابق بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن يكون الموظفين من الإدارة الدنيا ؟
- احتمال أن يكون الموظفين متزوجان؟
- احتمال أن يكون للموظفين نفس الحالة الاجتماعية؟
- احتمال أن يكون الموظفين من القسم نفسه؟

الحل:

• بدون حفظ القوانين فقط طريقة تطبيقها

١- احتمال أن يكون الموظفان من موظفي الإدارة الدنيا يعني أن يكون :

الموظف الأول من الإدارة الدنيا (الحادثة A_1) و الموظف الثاني من الإدارة الدنيا (الحادثة A_2)
وحيث أنهما مستقلان (لأن السحب مع الإرجاع) فإن:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2) = \frac{24}{100} \times \frac{24}{100} = \frac{576}{10000} = 0.0576$$

تم ضرب الحوادث

٢- احتمال أن يكون الموظفان متزوجان ، يعني أن يكون :

الموظف الأول متزوج (الحادثة B_1) و الموظف الثاني متزوج (الحادثة B_2)
وحيث أنهما مستقلان (لأن السحب مع الإرجاع) فإن:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2) = \frac{54}{100} \times \frac{54}{100} = \frac{2916}{10000} = 0.2916$$

٣- احتمال أن يكون للموظفين نفس الحالة الاجتماعية يعني أن يكون:

الموظفان كلاهما متزوجين (الحادثة A) أو أن يكون كلاهما أعزبين (الحادثة B) فإن:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= P(A_1 A_2) + P(B_1 B_2) \\ &= P(A_1 \times A_2) + P(B_1 \times B_2) \\ &= \left[\frac{54}{100} \times \frac{54}{100} \right] + \left[\frac{46}{100} \times \frac{46}{100} \right] = \left[\frac{2916}{10000} \right] + \left[\frac{2116}{10000} \right] \\ &= 0.2916 + 0.2116 \\ &= 0.5032 \end{aligned}$$

الأول متزوج و الثاني متزوج

أو

الأول أعزب و الثاني أعزب

وبما ان : و = ضرب ، أو = +
تم ضرب الحوادث المستقلة لكل حاله على
حدى ثم جمعهما

٤- احتمال أن يكون الموظفان من القسم نفسه يعني أن يكون:

الموظفان كلاهما من الإدارة الدنيا (الحادثة A) أو أن يكون كلاهما من الإدارة المتوسطة (الحادثة B) أو أن يكون كلاهما من الإدارة العليا (الحادثة C) فإن:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= P(A_1 A_2) + P(B_1 B_2) + P(C_1 C_2) \\ &= P(A_1 \times A_2) + P(B_1 \times B_2) + P(C_1 \times C_2) \\ &= \left[\frac{24}{100} \times \frac{24}{100} \right] + \left[\frac{44}{100} \times \frac{44}{100} \right] + \left[\frac{32}{100} \times \frac{32}{100} \right] = \left[\frac{576}{10000} \right] + \left[\frac{1936}{10000} \right] + \left[\frac{1024}{10000} \right] \\ &= 0.0576 + 0.1936 + 0.1024 \\ &= 0.3536 \end{aligned}$$

مثل حاله السابقة: لكن هنا ٣ حالات مستقلة
وبما ان : و = ضرب ، أو = +
تم ضرب الحوادث المستقلة لكل حاله على
حدى ثم جمعهما

٣- مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات، تنتج الآلة الأولى ٤٠% من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٢٥% والباقي من إنتاج الآلة الثالثة، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٤% و ٣% و ٥.٥%، سحبت وحدة عشوائية من إنتاج المصنع فوجد أنها جيدة، احسب الاحتمالات التالية:

- أن تكون القطعة الجيدة من إنتاج الآلة الأولى؟
- أن تكون القطعة الجيدة من إنتاج الآلة الثانية؟

الحل :

بالبداية نخطط إنتاج المصنع لكل آلة واستخراج إنتاج الآلة الثالثة من باقي إنتاج الآلتان الأولى والثانية ونسبة الإنتاج الجيد من باقي نسبة المعيب حسب التالي: على أساس ان إنتاج المصنع بالكامل = ١٠٠%

الآلات	نسبة الإنتاج	إنتاج المعيب	إنتاج الجيد
الآلة الأولى	٤٠%	٤%	٦%
الآلة الثانية	٢٥%	٣%	٧%
الآلة الثالثة	٣٥%	٥.٥%	٤.٥%

$$P(A_r|B) = \frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)} \quad 1 \leq r \leq n \quad \text{بتطبيق قانون نظرية بايز}$$

والحل بطريقة مباشرة بفهم طريقة تطبيق القانون بدون حفظه او الحل بشكل مطول كالتالي :

بما ان القانون ينص على :

نظرية بايز / يضرب كل حدث بالاحتمال الخاص فيه .. ثم يتم اخذ الحدث المطلوب ويقسم على / جميع الاحداث الأخرى مضروبه باحتمالاتها بما فيهم الحدث المطلوب والجمع بينها.

وبما ان المطلوب أن تكون القطعة الجيدة من إنتاج الآلة الأولى :

فالحل كالتالي :

الجيد للآلة ١ × نسبة إنتاج الآلة ١

(الجيد للآلة ١ × نسبة إنتاج الآلة ١) + (الجيد للآلة ٢ × نسبة إنتاج الآلة ٢) + (الجيد للآلة ٣ × نسبة إنتاج الآلة ٣)

$$\frac{0.40 \times 0.06}{(0.40 \times 0.06) + (0.25 \times 0.07) + (0.35 \times 0.045)}$$

المطلوب الثاني أن تكون القطعة الجيدة من إنتاج الآلة الثانية:

نفس الطريقة السابقة لكن الحدث الثاني بالبسط على بقية الأحداث بالمقام .

$$\frac{(0.25 \times 0.07)}{(0.40 \times 0.06) + (0.25 \times 0.07) + (0.35 \times 0.045)}$$

اسئلة الإختبار الخاصة بالمحاضرة الثانية ... نموذج c (السؤال ٤٤/٤٥)

أجب عن الفقرات (٤٤) و (٤٥) باستخدام المعلومات التالية :

"مصنع لانتاج لعب الاطفال يمتلك ثلاث آلات A و B و C ، تنتج الآلة الأولى ٢٥% من الانتاج والآلة الثانية ٤٠% والباقي من انتاج الآلة الثالثة فإذا كانت نسبة المعيب في الآلات الثلاثة على الترتيب هو ٣% و ٤% و ٦% .

سحبت وحدة واحدة عشوائيا من انتاج المصنع" ، احسب الاحتمالات التالية :-

(٤٤) احتمال ان تكون الوحدة المسحوبة معيبة :

أ- $0.25 \times 0.97 + 0.40 \times 0.96 + 0.35 \times 0.94$

ب- $0.25 \times 0.03 + 0.40 \times 0.04 + 0.35 \times 0.06$

ج- $0.75 \times 0.03 + 0.60 \times 0.04 + 0.65 \times 0.06$

د- لا شيء مما سبق

بالحالة السابقة / كانت الحوادث شاملة اي لا بد من حدوث احداها عند عمل تجربه ..

فهنا حدد وحده معيبه فقط . ولم يكمل من اي انتاج آله ممكن أن تكون ..

بالبداية يتم استخراج انتاج الآلة الثالثة لانه لم يذكر بالسؤال :

انتاج الآلة الاولى + انتاج الآلة الثانية = $0.25 + 0.40 = 0.65$

انتاج المصنع بالكامل = 0.10 إذن انتاج الآلة الثالثة = $0.10 - 0.65 = 0.35$

فيتم ضرب المعيب لكل آله بنسبة انتاجها .. $0.25 \times 0.03 + 0.40 \times 0.04 + 0.35 \times 0.06$

والحل الصحيح المطابق للأرقام الموجوده بالسؤال الفقرة (ب)

(٤٥) احتمال ان تكون الوحدة المسحوبة معيبة ومن انتاج الآلة الثالثة :-

أ- $\frac{(0.35 \times 0.49)}{(0.25 \times 0.03) + (0.40 \times 0.04) + (0.35 \times 0.06)}$

ب- $\frac{(0.40 \times 0.04)}{(0.25 \times 0.03) + (0.40 \times 0.04) + (0.35 \times 0.06)}$

ج- $\frac{(0.35 \times 0.06)}{(0.25 \times 0.03) + (0.40 \times 0.04) + (0.35 \times 0.06)}$

د- لا شيء مما سبق

تحل بقانون نظرية بايز لانه حدد ان تكون الوحدة المسحوبه معيبه ومن الآلة الثالثة ..

المعيب للآلة_٣ × نسبة انتاج الآلة_٣

(المعيب للآلة_١ × نسبة انتاج الآلة_١) + (المعيب للآلة_٢ × نسبة انتاج الآلة_٢) + (المعيب للآلة_٣ × نسبة انتاج الآلة_٣)

وبالتعويض من الارقام .. تكون الإجابة الصحيحة الفقرة (ج)