-إختبارات جودة التوفيق :-

إذا كان لدينا مجموعة من المفردات لعينة مأخوذة من مجتمع الدراسة و نرغب في التعرف على التوزيع الاحتمالي لهذه البيانات ، ويتم ذلك عن طريق ما يسمى بتوفيق المنحنيات حيث نبدأ بافتراض توزيع إحتمالى نظري يمكن أن تخضع له البيانات ، ويتوقف على بعض المقاييس الاحصائية الهامة للبيانات مثل الوسط الحسابي و الوسيط والانحراف المعياري ، ثم تستخدم بيانات العينة و التوزيع الاحتمالي المفترض في تقدير معالم هذا التوزيع والذى يفيد بدوره في الحصول على الاحتمالات ومن ثم التكرارات المتوقعة .

ثم تستخدم بيانات العينة و التوزيع الاحتمالي المفترض في تقدير معالم هذا التوزيع و الذي يفيد بدوره في الحصول على الاحتمالات ومن ثم التكرارات المتوقعة .

ومن ثم **فإن جودة التوفيق** هو اختبار إحصائي يمكن بإستخدامه معرفة هل التوزيع أو المنحنى الاحصائي النظري الذي تم توفيقه باستخدام بيانات العينة المأخوذه من المجتمع الأصلي يمثل تمثيلاً جيدا توزيع المتغير محل الدراسة في هذا المجتمع أم لا ؟ أو بمعنى أخر هل هناك إختلاف بين التوزيع الاحتمالي النظري الذي تم توفيقه و توزيع العينة ؟

إختبار كا^2 لجودة التوفيق :-

يستخدم أختبار كا^2 لاختبار ما اذا كانت بيانات العينة تتبع توزيع إحتمالى نظري معين أو للتأكد من صحة فرض معين ، ويتم ذلك من خلال معرفة ما إذا كان هناك فروق معنوية بين التكرارات الفعلية و التكرارات المتوقعة ، فكلما كان هذا الفرق صغير كلما اقترب التوزيعان الفعلي و النظري .

أولاً : إختبار كا2 لتوفيق التوزيعات الاحتمالية النظرية أو أي توزيع آخر غير محدد الصيغة

مثال (1) :-

الجدول التالي يبين توزيع 200 طالب بكلية العلوم الإدارية و التخطيط بجامعة الملك فيصل حسب المعدل التراكمي للطالب :-

المعدل التراكمي	0 -	1 -	2 -	3 -	4 - 5	المجموع
عدد الطلاب	28	35	53	45	39	200

و المطلوب : توفيق توزيع منتظم يوضح توزيع الطلاب حسب المعدل التراكمي وإختبار جودة التوفيق بدرجة ثقة 95% .

الحل :-

H_0 : توزيع الطلاب بكلية حسب فئات المعدل التراكمي يتبع التوزيع المنتظم .

H_1 : توزيع الطلاب بكلية حسب فئات المعدل التراكمي لا يتبع التوزيع المنتظم .

حيث أن هناك خمس فئات للمعدل التراكمي فيتم توزيع الطلاب على الخمس فئات بالتساوي و لكل فئة تتكرار متوقع يساوي مجموع التكرارات على خمسة (200/5 = 40) ، كما يتضح من الجدول التالي :-

فئات المعدل التراكمي	التكرارات المشاهدة ش	التكرارات المتوقعة ت	(ش – ت)^2	(ش – ت)^2 / ت
0 -	28	40	144	3.6
1 -	35	40	25	0.625
2 -	53	40	169	4.225
3 -	45	40	25	0.625
4 - 5	39	40	1	0.025
المجموع	**200**	**200**		**9.1**

إذاً كا ^{2} المحسوبة = 9.1

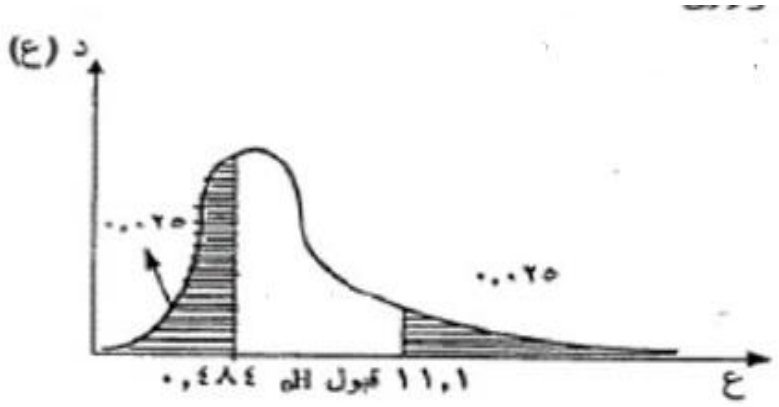
درجات الحرية = (عدد الفئات – 1)

= (5-1) = 4

و عند مستوى معنوية 5% فإن قيمتي كا ^{2} الجدولية هما (11.1 , 0.484) و تكون منطقتي القبول و الرفض للفرض العدمي كما يلي :-

و حيث أن قيمة كا ^{2} المحسوبة تقع في منطقة القبول

لذلك نقبل الفرض العدمى و هو ما يعني أن منحنى التوزيع المنتظم يعتبر توفيق جيد لتوزيع طلاب الكلية حسب فئات المعدل التراكمي .



مثال (2) :-

الجدول التالي يبين توزيع 100 موظف من موظفي إحدى الشركات حسب فئات الدخل الشهري (بالريال) :-

فئات الدخل الشهرى	100 -	200 -	300 -	400 -	500 - 600	المجموع
عدد الموظفين	12	15	22	35	16	100

و المطلوب : توفيق توزيع منتظم يوضح توزيع الموظفين حسب الدخل الشهري وإختبار جودة التوفيق بدرجة ثقة 95% .

الحل :-

H_0 : توزيع الموظفين حسب فئات الدخل الشهري يتبع التوزيع المنتظم .

H_1 : توزيع الموظفين حسب فئات الدخل الشهري لا يتبع التوزيع المنتظم .

حيث أن هناك خمس فئات للدخل الشهري فيتم توزيع الموظفين على الخمس فئات بالتساوي و لكل فئة تتكرار متوقع يساوي مجموع التكرارات على خمسة (100/5 = 20) ، كما يتضح من الجدول التالي :-

فئات الدخل الشهري	التكرارات المشاهدة ش	التكرارات المتوقعة ت	(ش – ت)^2	(ش – ت)^2 / ت
100 -	12	20	64	3.2
200 -	15	20	25	1.25
300 -	22	20	4	0.2
400 -	35	20	225	11.25
500 -600	16	20	16	0.8
المجموع	**100**	**100**		**16.7**

إذاً كا ^{2} المحسوبة = 16.7

درجات الحرية = (عدد الفئات – 1)

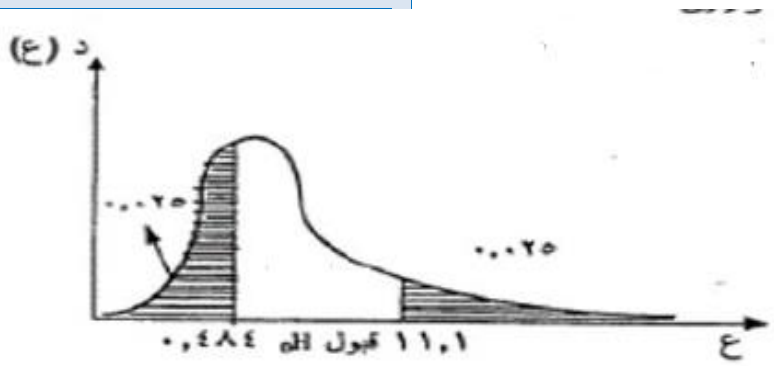
= (5-1) = 4

و عند مستوى معنوية 5% فإن قيمتي كا ^{2} الجدولية هما (11.1 , 0.484) و تكون منطقتي القبول و الرفض للفرض العدمي كما يلي :-

و حيث أن قيمة كا ^{2} المحسوبة تقع في منطقة الرفض

لذلك نرفض الفرض العدمى و نقبل الفرض البديل و هو

ما يعني أن منحنى التوزيع المنتظم لا يعتبر توفيق جيد لتوزيع الدخل الشهري للموظفين .



مثال (3) :-

قامت إحدى شركات الادوية بتوريد 100 كرتونه مصل الحمة الشوكية لأحد المستشفيات كل كرتونة تحتوى على 30 زجاجة مصل و لوحظ توزيع عدد زجاجات المصل المكسورة بالكرتونة وكان كما يلي :-

عدد الزجاجات المكسورة بالكرتونه	0	1	2	3	4	5	المجموع
عدد الكراتين	22	28	35	10	3	2	100

و المطلوب : توفيق دالة إحتمال توزيع ذات الحدين لعدد زجاجات المصل المكسورة بالكرتونة في الشركة واختبار جودة التوفيق عند درجة الثقة 95% .

الحل :-

دالة التوزيع الاحتمال لتوزيع ذات الحدين تتوقف على معلمتين n و p أي عدد الفئات و الاحتمال :-

أولاً عدد الفئات تساوى 5 أي أن n = 5 .

ثانياً : الاحتمال :-

نحسب المتوسط أولاً $\mu = \frac{0\times 22 + 1\times 28 + 2\times 35 + 3\times 10 + 4\times 3 + 5\times 2}{100} = 1.5$

لا تنسى أن :- $\mu = n\,p$

$1.5 = 5 \times P$

$P = 0.3$

H_0 : عدد زجاجات المصل المكسورة بالكرتونة الواحدة يتبع التوزيع ثنائي الحدين بالمعلمتين n = 5 , p = 0.3.

H_1 : عدد زجاجات المصل المكسورة بالكرتونة الواحدة لا تتبع التوزيع ثنائي الحدين بالمعلمتين n = 5 , p = 0.3.

و من خلال الاعتماد على معلمات التوزيع ثنائي الحدين يمكن تكوين جدول توزيع ثنائي الحدين ، كما يتضح من الجدول التالي :-

عدد الزجاجات المكسورة	الاحتمال	التكرار المتوقع
0	$^5c_0 \times (0.3)^0 \times (0.7)^5 = 0.1681$	16.81
1	$^5c_1 \times (0.3)^1 \times (0.7)^4 = 0.3602$	36.02
2	$^5c_2 \times (0.3)^2 \times (0.7)^3 = 0.3087$	30.87
3	$^5c_3 \times (0.3)^3 \times (0.7)^2 = 0.1323$	13.23
4	$^5c_4 \times (0.3)^4 \times (0.7)^1 = 0.0284$	2.84
5	$^5c_5 \times (0.3)^5 \times (0.7)^0 = 0.0024$	0.24
المجموع	**1**	**100**

لاحظ أن التكرار المتوقع = الاحتمال × عدد الكراتين 100

ولان إختبار كا2 يشترط ألا يقل التكرار المتوقع لاي خلية عن 5 ، لذلك سيتم دمج الخلايا الثلاثة الاخيرة لكي يصبح التكرار المتوقع لهم معا أكبر من أو يساوي 5 كما يتضح من الجدول التالي :-

عدد الزجاجات المكسورة	التكرارات المشاهدة ش	التكرارات المتوقعة ت	(ش – ت)^2	(ش – ت)^2 / ت
0	22	16.81	26.94	1.60
1	28	36.02	64.32	1.79
2	35	30.87	17.06	0.55
3-5	15	16.31	1.72	0.11
المجموع	100	100		4.05

إذاً كا ^{2} المحسوبة = 4.05

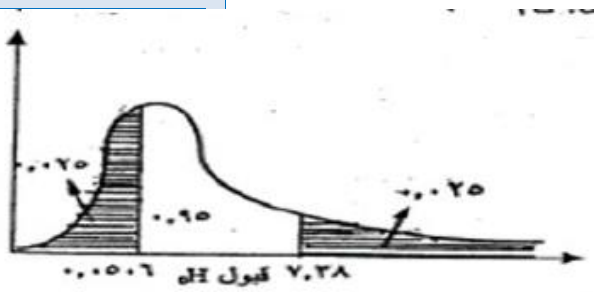
درجات الحرية = عدد الخلايا بعد الدمج – عدد المعلمات =

= 4 – 2 = 2

و عند مستوى معنوية 5% فإن قيمتي كا 2 الجدولية هما (7.38 , 0.0506) و تكون منطقتي القبول و الرفض للفرض العدمي كما يلي :-

و حيث أن قيمة كا ^{2} المحسوبة تقع في منطقة القبول

لذلك نقبل الفرض العدمى و هو ما يعني أن منحنى التوزيع ثنائي الحدين يعتبر توفيق جيد لتوزيع عدد الزجاجات حسب الزجاجات المكسورة .



مثال (4) :-

قامت إحدى المطاعم بتوريد 207 صندوق لأحد المستشفيات كل صندوق يحتوى على 60 زجاجة مياه و لوحظ أن توزيع عدد زجاجات المياه المكسورة بالكرتونة كان كما يلي :-

عدد زجاجات المياه المكسورة بالكرتونه	0	1	2	3	4	5	المجموع
عدد الكراتين	40	50	72	29	9	7	207

و المطلوب : توفيق دالة إحتمال توزيع ذات الحدين لعدد زجاجات المياه المكسورة بالكرتونة واختبار جودة التوفيق عند درجة الثقة 95% .

دالة التوزيع الاحتمال لتوزيع ذات الحدين تتوقف على معلمتين n و p أي عدد الفئات و الاحتمال :-

أولاً عدد الفئات تساوى 5 أي أن n = 5 .

ثانياً : الاحتمال :-

نحسب المتوسط أولاً $\mu = \frac{0\times 40 + 1\times 50 + 2\times 72 + 3\times 29 + 4\times 9 + 5\times 7}{207} = 1.7$

لا تنسى أن :- $\mu = n\,p$

$1.7 = 5 \times P$

$P = 0.34$

H_0 : عدد زجاجات المياه المكسورة بالكرتونة الواحدة يتبع التوزيع ثنائي الحدين بالمعلمتين n = 5 , p = 0.34.

H_1 : عدد زجاجات المياه المكسورة بالكرتونة الواحدة لا تتبع التوزيع ثنائي الحدين بالمعلمتين n = 5 , p = 0.34.

و من خلال الاعتماد على معلمات التوزيع ثنائي الحدين يمكن تكوين جدول توزيع ثنائي الحدين ، كما يتضح من الجدول التالي :-

عدد الزجاجات المكسورة	الاحتمال	التكرار المتوقع
0	$^5c_0 \times (0.34)^0 \times (0.66)^5 = 0.1252$	25.9
1	$^5c_1 \times (0.34)^1 \times (0.66)^4 = 0.3226$	66.77
2	$^5c_2 \times (0.34)^2 \times (0.66)^3 = 0.3323$	68.795
3	$^5c_3 \times (0.34)^3 \times (0.66)^2 = 0.1712$	35.44
4	$^5c_4 \times (0.34)^4 \times (0.66)^1 = 0.0441$	9.128
5	$^5c_5 \times (0.34)^5 \times (0.66)^0 = 0.0045$	0.94
المجموع	**1**	**207**

لاحظ أن التكرار المتوقع = الاحتمال × عدد الكراتين 207

ولان إختبار كا2 يشترط ألا يقل التكرار المتوقع لاي خلية عن 5 ، لذلك سيتم دمج الخلايا الاثنين الاخيرة لكي يصبح التكرار المتوقع لهم معا أكبر من أو يساوي 5 كما يتضح من الجدول التالي :-

عدد الزجاجات المكسورة	التكرارات المشاهدة ش	التكرارات المتوقعة ت	(ش – ت)^2	(ش – ت)^2 / ت
0	40	25.9	198.81	7.676
1	50	66.77	281.2329	4.211
2	72	68.795	10.27	0.149
3	29	35.44	41.47	1.17
4-5	16	10.07	35.16	3.49
المجموع	207	207		16.7

إذاً كا ^{2} المحسوبة = 16.7

درجات الحرية = عدد الخلايا بعد الدمج – عدد المعلمات =

= 5 – 2 = 3

و عند مستوى معنوية 5% فإن قيمتي كا 2 الجدولية هما (9.346 , 0.216) و تكون منطقتي القبول و الرفض للفرض العدمي كما يلي :-

و حيث أن قيمة كا ^{2} المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذلك نقبل الفرض البديل و هو ما يعني أن منحنى التوزيع ثنائي الحدين لا يعتبر توفيق جيد لتوزيع عدد الزجاجات حسب الزجاجات المكسورة .

اختار أحد الباحثين عينة حجمها n=800 شخصا من أحد المدن، وكان توزيعهم حسب فصيلة الدم كالتالي:

فصيلة الدم	A	B	AB	O
عدد الأشخاص (التكرار المشاهد)	200	150	100	350

مثال (5) :-

هل يتفق هذا التوزيع مع توزيع أفراد مدينةأخرى كان توزيع فصيلة دمهم حسب النسب التالية:

فصيلة الدم	A	B	AB	O
النسب المئوية للأشخاص	25%	15%	15%	45%

استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل :-

الفروض الإحصائية:

H_0: توزيع فصيلة الدم في العينة يتفق مع التوزيع المناظر للمدينة الأخرى

H_A : توزيع فصيلة الدم في العينة لايتفق مع التوزيع المناظر للمدينة الأخرى

لابد أولاً من الحصول على التكرار المتوقع و ذلك عن طريق تحويل النسب التي حصلنا عليها في التمرين إلى أعداد وذلك بضرب هده النسب في مجموع التكرارات 800

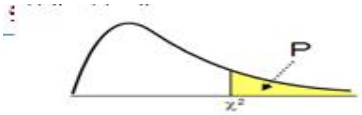
$$E_1 = np_1 = 800\,(0.25) = 200$$
$$E_2 = np_2 = 800\,(0.15) = 120$$
$$E_3 = np_3 = 800\,(0.15) = 120$$
$$E_4 = np_4 = 800\,(0.45) = 360$$

فصيلة الدم	التكرارات المشاهدة ش	التكرارات المتوقعة ت	(ش – ت)^2	(ش – ت)^2 / ت
A	200	200	0	0
B	150	120	900	7.5
AB	100	120	400	3.33
O	350	360	100	0.2778
المجموع	800	800		11.11

درجات الحرية = 4 – 1 = 3

و عند مستوى معنوية 5% فإن قيمتي كا 2 الجدولية هما (9.346 , 0.216) و تكون منطقتي القبول و الرفض للفرض العدمي كما يلي :-

و حيث أن قيمة كا ² المحسوبة تقع في منطقة الرفض لذلك نقبل الفرض البديل و هو ما يعني أن توزيع فصيلة الدم في المدينتين مختلف .



جدول توزيع χ^2

DF	P 0.995	0.975	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	0.0000393	0.000982	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879	9.550	10.828
2	0.0100	0.0506	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597	12.429	13.816
3	0.0717	0.216	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838	14.796	16.266
4	0.207	0.484	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860	16.924	18.467
5	0.412	0.831	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.086	16.750	18.907	20.515
6	0.676	1.237	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548	20.791	22.458
7	0.989	1.690	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278	22.601	24.322
8	1.344	2.180	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955	24.352	26.124
9	1.735	2.700	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589	26.056	27.877
10	2.156	3.247	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188	27.722	29.588
11	2.603	3.816	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757	29.354	31.264
12	3.074	4.404	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300	30.957	32.909
13	3.565	5.009	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	29.819	32.535	34.528
14	4.075	5.629	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319	34.091	36.123
15	4.601	6.262	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801	35.628	37.697
16	5.142	6.908	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267	37.146	39.252
17	5.697	7.564	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718	38.648	40.790
18	6.265	8.231	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156	40.136	42.312
19	6.844	8.907	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582	41.610	43.820
20	7.434	9.591	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997	43.072	45.315
21	8.034	10.283	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401	44.522	46.797
22	8.643	10.982	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796	45.962	48.268
23	9.260	11.689	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181	47.391	49.728
24	9.886	12.401	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.559	48.812	51.179
25	10.520	13.120	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928	50.223	52.620
26	11.160	13.844	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290	51.627	54.052
27	11.808	14.573	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.963	49.645	53.023	55.476
28	12.461	15.308	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.993	54.411	56.892
29	13.121	16.047	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.336	55.792	58.301
30	13.787	16.791	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672	57.167	59.703
31	14.458	17.539	37.359	41.422	44.985	48.232	49.226	52.191	55.003	58.536	61.098

مثال (6) :-

قام أحد الباحثين بإختبار مدى أتفاق نتائج الطلاب للمعدلات التراكمية مع التوزيع المنتظم و حصل على النتائج التالية :-

فئات المعدل التراكمي	التكرارات المشاهدة ش	التكرارات المتوقعة ت
0 -	56	80
1 -	70	80
2 -	106	80
3 -	90	80
4 - 5	78	80
المجموع	**400**	**400**

المطلوب :-

1- **تقدير قيمة كا² المحسوبة .**
2- **إذا علمت أن حدود قيمة كا² الجدولية هي (11.1 , 0.484) فهل يمكن قبول الفرض العدمي .**

فئات المعدل التراكمي	التكرارات المشاهدة ش	التكرارات المتوقعة ت	(ش – ت)^2	(ش – ت)^2 / ت
0 -	56	80	576	7.2
1 -	70	80	100	1.25
2 -	106	80	676	8.45
3 -	90	80	100	1.25
4 - 5	78	80	4	0.05
المجموع	**400**	**400**		**18.2**

إذاً كا ^{2} المحسوبة = 18.2

درجات الحرية = (عدد الفئات – 1)

= (5-1) = 4

و عند مستوى معنوية 5% فإن قيمتي كا ^{2} الجدولية هما (11.1 , 0.484) و تكون منطقتي القبول و الرفض للفرض العدمي كما يلي :-

و حيث أن قيمة كا ^{2} المحسوبة تقع في منطقة الرفض

لذلك نقبل الفرض البديل و هو ما يعني أن منحنى

التوزيع المنتظم يعتبر توفيق جيد لتوزيع طلاب الكلية

حسب فئات المعدل التراكمي .